УДК 622.51-7; 622:007

Выбор математических моделей теплопроводности при прессовании термореактивных пластмасс и численные методы их решений

Дж.А. Керимов, д.т.н.
Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности

e-mail: gunaycabirqizi@gmail.com

Ключевые слова: оптимальная температура, математическая модель, термореактивные материалы, теплопроводность.

Termoreaktiv plastik kütlədən olan hissələrin preslənməsi zamanı istilikkeçirmənin riyazi modellərinin seçilməsi və onların ədədi həlli metodları

C.Ə. Kərimov, t.e.d.
Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti

Açar sözlər: optimal temperatur, riyazi model, termoreaktiv materiallar, istilikkeçirmə.

Məqalədə termoreaktiv materiallardan olan detalların soyuma prosesinin riyazi modeli verilmişdir. Bununla əlaqədar Runqe-Kutt modeli ilə ifadə olunan riyazi asılılığın diferensial tənliyi istilikkeçirmə prosesini nəzərə almaqla polimer materiallar üçün öyrənilir.

Selection of mathematical models of thermal conductivity during thermo-active plastic molding and numerical methods of their solution

J.A. Kerimov, Dr. in Tech. Sc.
Azerbaijan State University of Oil and Gas

Keywords: optimum temperature, mathematical model, thermo-active materials, thermal conductivity.

The paper reviews the development of mathematical models of chilling of thermo-active plastic details. Herewith, the mathematical model of molding process of thermo-active materials is specified. In the result, a software enabling to solve differential equations describing thermal conductivity of polymer materials with the quartic Ringe-Kutta method is developed.

Вопросы выбора оптимальной температуры прессования для пластмассовых изделий с определенной толщиной стенки и геометрией с учетом источника тепла Q, полученного за счет экзотермической реакции при отвердении, до настоящего времени теоретически не изучены. В связи с этим представляет большой интерес определение времени полного нагрева и продолжительности действия источника тепла экзотермической реакции, а также их зависимость от температуры прессования и толщины стенки деталей [1, 2].

Математическая модель вышеуказанного процесса, с учетом тепловой инерции и источника тепла (химическая реакция – Q), описывается следующим дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа

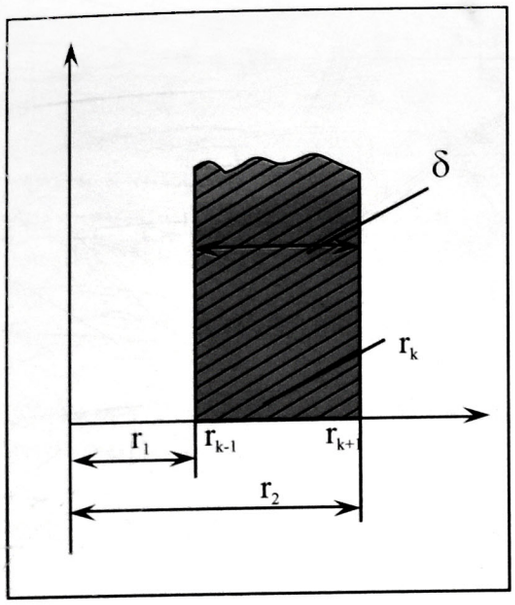
$$\rho c\frac{\partial T}{\partial \tau}+\tau_0\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}=\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)+Q \qquad (1)$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$T(r_1, 0) = T0,\ T(r_2, \tau) = T(r_1, r) = T_c, \qquad (2)$$

где c – удельная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; τ – время реакции (инерционный член); Q – мощность источника тепла химической реакции.

Q определяется из скоростей реакций резол-резитол, резитол-резит, подчиняющихся закону Аррениуса. Для решения математической



Экспериментальная деталь в виде втулки

модели типа 1 выбираем экспериментальную деталь в виде втулки с толщиной стенки δ =5.10, 20.37 мм. К уравнению (1) применим метод интегральных соотношений, предложенный А.А. Дородницыным. С этой целью отрезок $\delta = r_2 - r_1$ (r_1, r_2 – внутренний и наружный радиусы цилиндра) разобьем на k равных частей и проинтегрируем уравнение (1) от r_{k-1} до r_{k+1} по r:

$$\int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} dr + \int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} dr =$$

$$= \int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) dr + \int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} Q dr, \qquad (3)$$

или же, считая ρc, τ и λ постоянными и перейдя на полный дифференциал получим:

$$\rho c \frac{d}{d\tau} \int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} T(r,\tau) dr + \tau_0 \frac{d^2}{d\tau^2} \int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} T(r,\tau) dr =$$

$$= \lambda \int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T(r,\tau)}{\partial \tau} \right) dr + \int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} Q dr. \qquad (4)$$

Для аппроксимации определенных интегралов, входящих в уравнение (4), на точках разбиений используем интерполяционную формулу Лагранжа:

$$T(r,\tau) = \frac{(r-r_k)(r-r_{k+1})}{(r_{k-1}-r)(r_{k-1}-r_{k+1})} T_{k+1} +$$

$$+ \frac{(r-r_{k-1})(r-r_{k+1})}{(r-r_{k-1})(r_k-r_{k+1})} T_k +$$

$$+ \frac{(r-r_{k-1})(r-r_k)}{(r_{k+1}-r_{k-1})(r_{k+1}-r_k)} T_{k+1}, \qquad (5)$$

учитывая, что $\delta = r_{k+1} - r_k = \frac{r_н - r_в}{k}$ получим

$$T(r,\tau) = \frac{(r-r_k)(r-r_{k+1})}{2\delta^2} T_{k-1} - \frac{(r-r_{k-1})(r-r_{k+1})}{\delta^2} T_k +$$

$$+ \frac{(r-r_{k-1})(r-r_k)}{2\delta^2} T_{k+1}. \qquad (6)$$

Вычислим частные производные $\frac{\partial T}{\partial r}$ в точках r_{k-1} и r_{k+1}:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{k-1}}{2\delta^2}\left[(r-r_{k+1}) + (r-r_k)\right] -$$

$$- \frac{T_k}{2\delta^2}\left[(r-r_{k+1}) + (r-r_k)\right] +$$

$$+ \frac{T_{k+1}}{2\delta^2}\left[(r-r_k) + (r-r_{k-1})\right] \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_{k-1}} &= -\frac{1}{2\delta}\left(3T_{k-1} - 4T_k + T_{k+1}\right) \\ \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_{k+1}} &= \frac{1}{2\delta}\left(T_{k-1} - 4T_k + 3T_{k+1}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$\int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} T(r,\tau) dr = 2\delta T_k(\tau),$$

$$\int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} Q dr = \frac{\delta}{3}\left(Q_{k-1} + 4Q_k + Q_{k+1}\right). \qquad (9)$$

Подставляя выражение (9) в (4) получим:

$$2\delta\rho c \frac{dT_k(\tau_0)}{dr} + \tau_0 \frac{d^2 T_k(\tau)}{d\tau^2} \cdot 2\delta =$$

$$= \lambda \int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr + \frac{\delta}{3}\left(Q_{k-1} + 4Q_k + Q_{k+1}\right). \qquad (10)$$

Вычислим определенный интеграл в правой части уравнения (10):

$$\int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} +$$

$$+ \int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{1}{r} dr = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} + \left.\frac{T}{r}\right|_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} + \int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} \frac{T}{r^2} dr, \qquad (11)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_{k+1}} - \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{2\delta}\left(T_{k-1} - 4T_k + 3T_{k+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\delta}\left(3T_{k-1} - 4T_k + T_{k+1}\right) = \frac{1}{2\delta}\left(T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}\right),$$

$$\left.\frac{T}{r}\right|_{r_{k-1}}^{r_{k+1}} = \frac{T_{k+1}}{r_{k+1}} - \frac{T_{k-1}}{r_{k-1}} \qquad (12)$$

Из выражения (6)

$$T=\frac{r^2-(r_k+r_{k+1})\cdot r+r_k r_{k+1}}{2\delta^2}\cdot T_{k-1}-$$
$$-\frac{r^2-r(r_{k-1}+r_{k+1})+r_{k-1}\cdot r_{k+1}}{\delta^2}\cdot T_k+$$
$$+\frac{r^2-r(r_{k-1}+r_k)+r_{k-1}\cdot r_{k+1}}{2\delta^2}\cdot T_{k+1}= \qquad (13)$$
$$=\frac{1}{2\delta^2}\{(T_{k-1}-2T_k+T_{k+1})r^2-$$
$$-[(r_k+r_{k+1})\cdot T_{k-1}-2(r_{k-1}+r_{k+1})\cdot T_k+(r_{k-1}+r_k)\cdot T_{k+1}]\cdot r+$$
$$+(r_k\cdot r_{k+1}\cdot T_{k+1}-2\cdot r_{k-1}\cdot r_{k+1}\cdot T_k+r_{k-1}\cdot r_k\cdot T_{k+1})\}.$$

Отсюда

$$\int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}}\frac{T}{r^2}dr=\frac{1}{2\delta^2}\left\{\int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}}(T_{k-1}-2T_{k-1}+T_{k+1})dr-\right.$$
$$-\int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}}\left[(r_k+r_{k+1})\cdot T_{k-1}-2(r_{k-1}+r_{k+1})\cdot T_k+\right.$$
$$\left.+(r_{k-1}+r_k)\cdot T_{k+1}\right]\frac{dr}{r}+\int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}}(r_k\cdot r_{k+1}\cdot T_{k-1}-$$
$$\left.-2\cdot r_{k-1}\cdot r_{k+1}\cdot T_k+r_{k-1}\cdot r_k\cdot T_{k+1})\frac{dr}{r^2}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2\delta^2}(T_{k-1}-2T_{k-1}+T_{k+1})(r_{k+1}-r_{k-1})-$$
$$-\left[(r_k+r_{k+1})\cdot T_{k-1}-2(r_{k-1}+r_{k+1})\cdot T_k+\right.$$
$$\left.+(r_{k-1}+r_k)\cdot T_{k+1}\right]\cdot(\ln r_{k+1}-\ln r_{k-1})= \qquad (14)$$
$$=\frac{1}{2\delta^2}\{2\delta(T_{k-1}-2T_{k-1}+T_{k+1})+$$
$$+2\delta\left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\cdot T_{k-1}-2T_k+\frac{r_k}{r_{k+1}}\cdot T_{k+1}\right)-$$
$$-\ln\frac{r_{k+1}}{r_{k-1}}[(r_k\cdot r_{k+1})\cdot T_{k-1}-2(r_{k-1}+r_{k+1})\cdot T_k+$$
$$\left.+(r_{k-1}+r_k)\cdot T_{k+1}]\right\}=$$
$$=\frac{1}{\delta}\left(\frac{r_{k-1}+r_k}{r_{k-1}}\cdot T_{k-1}-4T_k+\frac{r_{k+1}+r_k}{r_{k+1}}T_{k+1}\right)-$$
$$-\frac{1}{2\delta^2}\ln\frac{r_{k+1}}{r_{k-1}}[(r_k\cdot r_{k+1})\cdot T_{k-1}-2(r_{k-1}+r_{k+1})\cdot T_k+$$
$$+(r_{k-1}+r_k)\cdot T_{k+1}]$$

Таким образом, выражения (12), (13) и (14) подставим в (11) получим

$$\int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)dr=\frac{1}{2\delta}(T_{k-1}-2T_{k-1}+T_{k+1})+$$
$$+\frac{1}{r_{k+1}}\cdot T_{k+1}-\frac{1}{r_{k-1}}\cdot T_{k-1}+$$
$$+\frac{1}{\delta}\left(\frac{r_{k-1}+r_k}{r_{k-1}}\cdot T_{k-1}-4T_k+\frac{r_{k+1}+r_k}{r_{k+1}}\cdot T_{k+1}\right)-$$
$$-\frac{1}{2\delta^2}\ln\frac{r_{k+1}}{r_{k-1}}[(r_k\cdot r_{k+1})\cdot T_{k-1}-$$
$$-2(r_{k-1}+r_{k+1})\cdot T_k+(r_{k-1}+r_k)\cdot T_{k+1}]=$$
$$=\frac{1}{\delta}\left(\frac{3r_{k-1}+r_k}{r_{k-1}}\cdot T_{k-1}-8T_k+\right.$$
$$\left.+\frac{3r_{k+1}+r_k}{r_{k+1}}\cdot T_{k+1}\right)-\frac{1}{r_{k-1}}\cdot T_{k-1}+\frac{1}{r_{k+1}}\cdot T_{k+1}-$$
$$-\frac{1}{2\delta^2}\ln\frac{r_{k+1}}{r_{k-1}}[(r_k+r_{k+1})\cdot T_{k-1}- \qquad (15)$$
$$-2(r_{k-1}+r_{k+1})\cdot T_k+(r_{k-1}+r_k)\cdot T_{k+1}]=$$
$$=\frac{1}{\delta}\left(\frac{3r_{k-1}+r_k}{r_{k-1}}\cdot T_{k-1}-8T_k+\right.$$
$$\left.+\frac{3r_{k+1}+r_k}{r_{k+1}}\cdot T_{k+1}\right)-\frac{1}{2\delta^2}\ln\frac{r_{k+1}}{r_{k-1}}[(r_k+r_{k+1})\times$$
$$\times T_{k-1}-2(r_{k-1}+r_{k+1})\cdot T_k+(r_{k-1}+r_k)\cdot T_{k+1}]$$

Отсюда

$$\int_{r_{k-1}}^{r_{k+1}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)dr=\frac{4}{\delta}(T_{k-1}-2T_k+T_{k+1})-$$
$$-\frac{1}{2\delta^2}\ln\frac{r_{k+1}}{r_{k-1}}[(r_k\cdot r_{k+1})\cdot T_{k-1}-$$
$$-2(r_{k-1}+r_{k+1})\cdot T_k+(r_{k-1}+r_k)\cdot T_{k+1}]. \qquad (16)$$

Подставим выражение (16) в (10):

$$2\delta\rho c T_k'+2\delta\tau_0 T_k''=\frac{\delta}{3}(Q_{k-1}+4Q_k+Q_{k+1})+$$
$$+\lambda\left\{\frac{4}{\delta}(T_{k-1}-2T_k+T_{k+1})-\frac{1}{2\delta^2}\ln\frac{r_{k+1}}{r_{k-1}}\times\right.$$
$$\times[(r_k\cdot r_{k+1})\cdot T_{k-1}-2(r_{k-1}+r_{k+1})\times$$
$$\left.\times T_k+(r_{k-1}+r_k)\cdot T_{k+1}]\right\}.$$

Отсюда сделав замену $T_k'(\tau)=U_k(\tau)$ получим:

$$U_k'(\tau)=\frac{\rho c}{\tau_0}U_k(\tau)+\frac{1}{6\tau_0}(Q_{k-1}+4Q_k+Q_{k+1})+$$
$$\frac{\lambda}{2\delta\tau_0}\left\{\frac{4}{\delta}(T_{k-1}-2T_k+T_{k+1})-\frac{1}{2\delta^2}\ln\frac{r_{k+1}}{r_{k-1}}\times\right.$$
$$\times[(r_k\cdot r_{k+1})\cdot T_{k-1}-2(r_{k-1}+r_{k+1})\cdot T_k+$$
$$\left.+(r_{k-1}+r_k)\cdot T_{k+1}]\right\}.$$

$$T_k'(\tau) = U_k(\tau) \qquad (17)$$

Итак, решение краевой задачи (1)–(2) с применением метода интегральных соотношений приводится к отысканию численных решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (17) со следующими условиями [3, 4]

$$T_k(0) = T_0,\ U_k(0) = U_0,\ T_{r2} = T_{r1} = T_c \qquad (18)$$

В узлах разбиений Q_i вычисляются из следующего соотношения:

$$Q_k = k_1\left|-\alpha W_{A_k}\exp\left(-\frac{E_1}{kT_k}\right)\right| +$$

$$+k_2\beta W_{B_k}(1-W_{C_k})\cdot\exp\left(-\frac{E_2}{kT_k}\right), \qquad (19)$$

где W_{Ak}, W_{Bk}, W_{Ck} определяются из следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} W'_{A_k}(\tau) = -\alpha W_{A_k}\exp\left(-\dfrac{E_1}{kT_k}\right) \\ W'_{C_k}(\tau) = \beta W_{B_k}(1-W_{B_k})\exp\left(-\dfrac{E_2}{kT_k}\right) \\ W'_{B_k}(\tau) = -W'_{A_k}(\tau) - W'_{C_k}(\tau) \end{cases} \qquad (20)$$

Начальные условия для системы (20) выглядят следующим образом:

$$W_{Ak}\big|_{\tau=0} = 1;\ W_{Bk}\big|_{\tau=0} = W_{Ck}\big|_{\tau=0} = 0. \qquad (21)$$

Системы уравнений (18), (20) с условиями (14), (21) и соотношениями (19) являются алгоритмом для решения поставленной задачи [5, 6]. Системы решались численным методом Рунге-Кутта четвертого порядка по программе, составленной на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60. Расчеты произведены для материала 03-012-02 при следующих значениях параметров $\alpha = 0.37\cdot10^7\frac{1}{c}$; $\beta = 89.6\frac{1}{c}$; $\frac{E_1}{k} = 8230\cdot k$; $\frac{E_2}{k} = 3450\cdot k$; k_1 = 39 кДж/м^3; k_2 = 5 кДж/м^3; ρ = 1340 кг/м^3; c = 1.68 кДж/м^3; λ = 0.23 Вт/мк.

Результаты численных решений дифференциального уравнения (1), описывающего теплопроводность полимерных материалов с учетом теплового эффекта химической реакции, дают нам возможность впервые рекомендовать математическую модель, описывающую распространение тепла в полимерных материалах при их переработке, а также новый метод решения таких математических моделей на компьютере, что освобождает исследователей от громоздких экспериментальных работ. Предложенный метод универсален для всех термореактивных материалов, перерабатываемых прямым прессованием в нагретой пресс-форме. При расчете на компьютере в дифференциальное уравнение (1) подставляются только величины теплофизических характеристик для каждого материала и размеры (толщины стенок) изготовляемого изделия.

Список литературы

1. *Керимов Д.А.* Научные основы и практические методы оптимизации показателей качества пластмассовых деталей нефтепромыслового оборудования: автореф. дис. докт. техн. наук, Баку, 1985, 55 с.
2. *Растригин Л.А.* Сходимость методы случайного поиска при экстремальном регулировании многопараметрических систем // Автоматика и телемеханика, 1963, № 11, 47 с.
3. *Алгоритмы* и программы случайного поиска / под ред. Л.А. Растригина. – Рига: Зинатне, 1969, 374 с.
4. *Гасанова Е.А.* Влияние температуры на характер деформации пластмасс, работающих в нефтепромысловых оборудованиях // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук, 2017, № 5, с. 34-37.
5. *Мустафаев А.Д., Керимов Д.А.* Опыт оптимизации усадки и точности изготовления деталей из некоторых термореактивных материалов // Третья Ленинградская конференция по вопросу взаимозаменяемости и точности деталей из пластмасс, 1970, 85 с.
6. *Керимов Д.А.* Применение случайного поиска при оптимизации процесса прессования // Труды АзИНЕФТЕХИМа, сентябрь, 1970, 43 с.

References

1. *Kerimov D.A.* Nauchnye osnovy i prakticheskie metody optimizatsii pokazatelei kachestva plastmassovykh detalei neftepromyslovogo oborudovania: avtoref. dis. dokt. tekh. nauk. – Baku, 1985, 55 s.
2. *Rastrigin L.A.* Skhodimost´ metoda sluchainogo poiska pri ekstremal´nom regulirovanii mnogoparametricheskikh sistem // Avtomatika i telemekhanika, 1963, No 11, 47 s.
3. *Algoritmy* i programmy sluchainogo poiska / pod red. L.A. Rastrigina. – Riga: Zinatne, 1969, 374 s.
4. *Gasanova E.A.* Vliyanie temperatury na kharakter deformatsii plastmass, rabotayushchikh v neftepromyslovykh oborudovaniyakh // Aktualnye problemy gumanitarnykh i yestesvennykh nauk, 2017, No 5, s. 34-37.
5. *Mustafaev A.D., Kerimov D.A.* Opyt optimizatsii usadki i tochnosti izgotovlenia detalei iz nekotorykh termoreaktivnykh materialov // Tret´ya Leningradskaya konferentsia po voprosu vzaimozamenyaemosti i tochnosti detalei iz plastmass, 1970, 85 s.
6. *Kerimov D.A.* Primenenie sluchainogo poiska pri optimizatsii protsessa pressovania // Trudy AzINEFTEKHIMa, sentyabr´, 1970, 43 s.