F 2м

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT *elmləri seriyası*

серия ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

1

2018

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2018

УДК 18A72

SOFT MODULLAR KATEQORİYASINDA TƏRS LİMİTİN TÖRƏMƏ FUNKTORU

S.E.ABDULLAYEV, S.A.BAYRAMOV

Bakı Dövlət Universiteti

sebuhi_abdullaye@mail.ru, baysadi@gmail.com

Bu işdə yumşaq(soft) modulların bəzi xassələri öyrənilir, daha sonra soft modulların tərs sistemi təyin edilir və göstərilir ki, onun limiti bu kateqoriyada mövcuddur və funktoriyaldır. Ümumiyyətlə, tərs sistemlərin dəqiq ardıcıllığının limiti dəqiq deyil. Buna görə tərs limitin törəmə funktoru - $\underline{\lim}^{(1)}$ *anlayışı müəyyən edilir və nəhayət, homoloji cəbrdən istifadə edərək törəmələrlə dəqiq olmayan ardıcıllığı dəqiq ardıcıllığa tamamlayırıq.*

Açar sözlər: Soft modul, tərs limit funktoru, zincir kompleksi, tərs limitin törəməsi

Bir çox tətbiqi məsələlərin həllində klassik riyazi üsullar azlıq edir. Ona görə riyaziyyatda yeni, klassik olmayan nəzəriyyələrinin qurulmasına ehtiyac hiss olunur. İlk belə nəzəriyyə Lütfi-zadə tərəfindən 1965-ci ildə qeyri-səlis çoxluqlar nəzəriyyəsi adlanan nəzəriyyə qurulmuşdu [17]. Daha sonra başqa nəzəriyyələr: intuitiv qeyri-səlis çoxluqlar, interval dəyərli çoxluqlar, qaba (Rought) çoxluqlar nəzəriyyələri qurulmuşdur. 1999-cu ildə Molodtsov tərəfindən bəzi tətbiqi məsələlərin araşdırılması üçün yumşaq (soft) çoxluqlar nəzəriyyəsi verilmişdir [15]. Bu nəzəriyyənin inkişafında Maji və s. alimlərin böyük təsiri olmuşdu [13]. Aktaş və Çağman [2] soft qurup verərək, bəzi xassələrini öyrənmişdilər. Daha sonra soft halqa, soft modul kateqoriyaları daxil edilmiş, bu kateqoriyalarda bəzi araşdırmalar aparılmışdır [1-16]. Hər bir yeni qurulmuş kateqoriyada onun cəbri əməllərə görə qapalılıq problemi ən vacib məsələlərdən biridir. Tərs və düz limitlər bu cəbri əməllərlə ifadə olunduğundan, tərs limitin varlığı və onun xassələrinin müxtəlif kateqoriyalarda araşdırılmasında bir çox tədqiqatlar aparılmışdır [8, 9,10,11,12].

Bu işdə yumşaq (soft) modulların bəzi xassələri öyrənilir, daha sonra soft modulların tərs sistemi təyin edilir və göstərilir ki, onun limiti bu kateqoriyada mövcuddur və funktoriyaldır. Ümumiyyətlə, tərs sistemlərin dəqiq ardıcıllığının limiti dəqiq deyil. Buna görə tərs limitin törəmə funktoru - $\underline{\lim}^{(1)}$ anlayışını müəyyən edilir və nəhayət, homoloji cəbrdən istifadə edərək törəmələrlə dəqiq olmayan ardıcıllığı dəqiq ardıcıllığa tamamlayırıq.

Əvvəlcə bizə lazım olan bəzi məlumatları verək. U abstrakt bir çoxluq, E parametrlər çoxluğu, $P(U)$ U çoxluğunun alt çoxluqlar ailəsi və $A \subseteq E$ olsun

Tərif 2.1 [15] (F,A) cütü U üzərində soft çoxluq adlanır belə ki, $F: A \to P(U)$

Başqa sözlə desək U üzərində soft çoxluq U çoxluğunun parametrə bağlı alt çoxluqlar ailəsidir.

Tərif 2.2 [13] U üzərində verilmiş iki (F,A) və (G,B) soft çoxluqları üçün (F,A) (G,B)-nin soft alt çoxluğu adlanır, əgər aşağıdakı şərtlər ödənərsə

(1) $A \subset B$ və

(2) $\forall \varepsilon \in A$, $\mathrm{F}(\varepsilon)$ çoxluğu $\mathrm{G}(\varepsilon)$ çoxluğunun alt çoxluğudur. Bu əlaqə aşağıdakı kimi gösdərilir $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$.

U üzərində verilmiş iki (F,A) və (G,B) soft çoxluqları soft bərabər adlanır, belə ki, (F,A) (G,B) -nin soft alt çoxluğudur, eyni zamanda (G,B) (F,A) -nın soft alt çoxluğudur.

Tərif 2.3 [13] U üzərində verilmiş iki (F,A) və (G,B) soft çoxluqlarının kəsişməsi (H,C) soft çoxluqudur, burada $C = A \cap B$ və $\forall \varepsilon \in C$, $H(\varepsilon) = \mathrm{F}(\varepsilon) \cap \mathrm{G}(\varepsilon)$. Bu $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (H,C)$ şəklində ödənilir.

Tərif 2.4 [13] Əgər (F,A) və (G,B) soft çoxluqlardırsa, onda (F,A) **və** (G,B) $(F,A) \wedge (G,B)$ kimi işarə edilir. $(F,A) \wedge (G,B)$ $(H, A x B)$ kimi müəyyən edilir, burada $H(\alpha,\beta) = \mathrm{F}(\alpha) \cap \mathrm{G}(\beta)$, $\forall (\alpha,\beta) \in A \times B$.

Tərif 2.5 (F,A) və (G,B) iki soft çoxluqlarının birləşməsi (H,C) U üzərində elə soft çoxluqdur ki, $C = A \cup B$ və $\forall \varepsilon \in C$ üçün

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} \mathrm{F}(\varepsilon), & gr\ \varepsilon \in \mathrm{A-B}, \\ \mathrm{G}(\varepsilon), & gr\ \varepsilon \in \mathrm{B-A}, \\ \mathrm{F}(\varepsilon) \cup \mathrm{G}(\varepsilon), & gr \varepsilon \in \mathrm{A \cup B}. \end{cases}$$

Bu əməliyyat $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (H,C)$ kimi ifadə olunur.

M sol R –modul, A boş olmayan hər hansı çoxluq və (F,A) cütü M üzərində soft çoxluq olsun.

Tərif 2.6 [16] (F,A) soft çoxluğu yalnız və yalnız o vaxt M üzərində soft modul adlanır ki, bütün $x \in A$ üçün $F(x) < M$.

Xassə 2.7 [16] Tutaq ki, (F,A) və (G,B) M üzərində iki soft modullardır.

(1) $(F,A) \tilde{\cap} (G,B)$ M üzərində soft moduldur.

(2) $(F,A) \tilde{\cup} (G,B)$ M üzərində soft moduldur, əgər $A \cap B = \emptyset$.

Tərif 2.8 [16] Tutaq ki, (F,A) və (G,B) M üzərində iki soft modullardır. Onda $(F,A) + (G,B)$ $(H,\ A \times B)$ kimi müəyyən ediilir, burada bütün $(x,y) \in A \times B$ cütlər üçün $H(x,y) = F(x) \times G(y)$ ödənir.

Təklif 2.9 [16] Tutaq ki, (F,A) və (G,B) M üzərində iki soft modullardır.

Onda $(F, A) + (G, B)$ cəmi də M üzərində soft moduldur.

Tərif 2.10 [16] (F, A) və (G, B) uyğun olaraq M və N üzərində iki soft modul olsun. Onda $(F, A) \times (G, B) = (H, A \times B)$ bütün $(x, y) \in A \times B$ cütü üçün $H(x, y) = F(x) \times G(y)$ kimi təyin edilir.

Xassə 2.11 [16] (F, A) və (G, B) uyğun olaraq M və N üzərində iki soft modul isə $F(x) \times G(y)$ $M \times N$ üzərində soft moduldur.

Tərif 2.12 [16] (F, A) və (G, B) uyğun olaraq M və N üzərində iki soft modul, $f : M \to N$, $g : A \to B$ iki funksiya olsun. (f, g) cütü aşağıdakı şərtləri ödərsə soft homomorfizm adlanır:

(1) $f : M \to N$ modulların homomorfizmidir;

(2) $g : A \to B$ çoxluqların inikasıdır.

(3) $f\big(F(x)\big) = G(g(x))$, $\forall x \in A$.

§1. Soft modullar kateqoriyasında tərs sistemin limiti

SMod ilə soft modullar kateqoriyasını göstərək. Bu kateqoriyada hasil və toplama əməliyyatları daxil edək.

$\{(F_i, A_i)\}_{i\in I}$ ailəsi $\{M_i\}_{i\in I}$ modullar ailəsi üzərində soft modullar ailəsi olsun. $A = \prod_{i\in I} A_i$ və $M = \prod_{i\in I} M_i$ çoxluğunu və modulunu quraq. $F : A \to P(M)$ inikasını $\forall a = \{a_i\} \in A$ üçün $F(a) = \prod_{i\in I} F(a_i)$ düsturu ilə verək. Hər $a_i \in A_i$ üçün $F(a_i)$ M_i modulunun alt modulu olduğundan $(F(a)$ modulu M-nin alt moduludur. Beləliklə, $(F_n A)$ M üzərində bir soft moduludur. Bu soft modulu $\prod_{i\in I}(F_i, A_i)$ şəklində göstərək və $\{(F_i, A_i)\}_{i\in I}$ ailəsinin hasili adını verək.

Əgər $q_{i_0} : \prod_{i\in I} A_i \to A_{i_0}$, $p_{i_0} : \prod_{i\in I} M_i \to M_{i_0}$ proyeksiya inikasları isə, onda $(p_{i_0}, q_{i_0}) : \prod_{i\in I}(F_i, A_i) \to (F_{i_0}, A_{i_0})$ soft modulların soft homomorfizmidir.

İndi $\{(f_i, g_i) : (F_i, A_i) \to (K_i, B_i)\}_{i\in \tau}$ soft modullar ailəsinin soft homomorfizmləri isə

$$\left(\prod f_i, \prod g_i\right) : \prod_{i\in \tau}(F_i, A_i) \to \prod_{i\in \tau}(K_i, B_i)$$

soft modulların soft homomorfizmidir və

$$\begin{array}{ccc} \prod(F_i, A_i) & \xrightarrow[(p_{i_0}, q_{i_0})]{} & (F_{i_0}, A_{i_0}) \\ \prod_i (f_i, g_i)\downarrow & & \downarrow (f_i, g_i) \\ \prod(K_i, B_i) & \xrightarrow[(p'_{i_0}, q'_{i_0})]{} & (K_{i_0}, B_{i_0}) \end{array}$$

diaqramı kommutativdir.

Təklif 1. Hasil əməliyytı soft modullar kateqoriyasında bir funktordur.

Yenə $\{(F_i, A_i)\}_{i\in I}$ soft modullar ailəsi və hər bir A_i parametrlər çoxluğunda a_{i_0} nöqtəsi qeyd olunsun, elə ki, $F_i(a_{i_0}) = 0$-dır. $A = \prod_{i\in I} A_i$, $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ alaq və $F : A \to P(M)$ inikasını $F(a_i) = \oplus F(a_i)$ şəklində verək $\forall a = \{a_i\} \in A$ üçün. Onda (F, A) cütü M modulu üzərində soft moduldur. Bu soft modulu $\bigoplus_{i\in I}(F_i, A_i)$ şəklində göstərək və $\{(F_i, A_i)\}$ ailəsinin düz cəmi adını verək.

$\varphi_j : A_j \to \prod_{i\in I} A_i$ inikasını $\varphi_j(a_j) = \{a_i\}$ şəklində verək, burada əgər $i \neq j$ isə $a_i = a_{i_0}$, $i = j$ isə $a_i = a_j$-dir. $f_j : M_j \to \bigoplus_i M_i$ daxil etmə inikası olsun, onda $(\varphi_j, f_j) : (F_j, A_j) \to \bigoplus_{i\in I}(F_i, A_i)$ soft modulların soft homomorfizmidir.

Əgər $\{(f_i, g_i) : (F_i, A_i) \to (K_i, B_i)\}_{i\in I}$ soft modullar ailəsinin soft homomorfizmlər ailəsi isə

$$\left(\bigoplus_i f_i, \prod_i g_i\right) : \bigoplus_{i\in I}(F_i, A_i) \to \bigoplus_{i\in I}(K_i, B_i)$$

soft modulların soft homomorfizmidir və

$$\begin{array}{ccc} (F_j, A_j) & \to & \oplus(F_i, A_i) \\ (f_i, g_i)\downarrow & & \downarrow \left(\oplus f_i, \prod g_i\right) \\ (K_j, B_j) & \to & \oplus(K_i, B_i) \end{array}$$

diaqramı kommutativdir.

Təklif 2. Soft modullar kateqoriyasında düz cəm əməliyyatı bir funktordur.

I istiqamətlənmiş çoxluq olsun, bu çoxluğa bir kateqoriya kimi baxaq.

Tərif 1. Hər $D : I^{0p} \to SMod$ $(D : I \to SMod)$ funktoruna *SMod* kateqoriyasında tərs (düz) sistem deyilir.

Tərifə görə hər tərs sistemi

$$(\{F_i, A_i)\}_{i\in I}, \{(p_i^{i'}, q_i^{i'}) : (F_{i'}, A_{i'}) \to (F_i, A_i)\}_{i<i'}) \qquad (1)$$

şəklində yaza bilərik, elə ki aşağıdakı şərtlər ödənir:

1) $i = i'$ üçün $(p_i^{i'}, q_i^{i'}) = 1_{(F_i, A_i)}$;

2) $i < i' < i''$ üçün $(p_i^{i''}, q_i^{i''}) = (p_{i'}^{i''}, q_{i'}^{i''}) \circ (p_i^{i'}, q_i^{i'})$.

Teorem 1. (1) şəklində olan hər tərs sistemin limiti var və yeganədir.

İsbatı. (1) tərs sisteminin tərifindən alırıq ki,

$$(\{A_i\}_{i\in I}, \{q_i^{i'}\}_{i<i'}) \qquad (2)$$

çoxluqların tərs sistemidir və

$$(\{M_i\}_{i\in I}, \{q_i^{i'}\}_{i<i'}) \qquad (3)$$

modulların tərs sistemidir.

Bu tərs sistemlərin limitləri $A=\varprojlim_i A_i$, $M=\varprojlim_i M_i$ P olsun. $F:A\to P\left(\prod_{i\in I} M_i\right)$ inikasını təyin edək. $\forall a=\{a_i\}\in A$ üçün $q^{i'}(a_{i'})=a_i$ şərti ödənir və $(p_i^{i'},q_i^{i'}):(F_{i'},A_{i'})\to(F_i,A_i)$ soft modulların homomorfizmi olduğundan

$$p_i^{i'}(F_{i'}(a_i))=F_i(,q_i^{i'}(a_{i'}))=F_i(a_i)\text{-dir.}$$

Onda

$$\left(\{F_i(a_i)\}_{i\in I},(p_i^{i'}|_{F_{i'}(a_{i'})}:F_i(a_i)\}_{i<i'}\right)$$

alt modulların tərs sistemi olur, bu sistemin limitini $\varprojlim F_i(a_i)$ ilə göstərək.

İndi $F:A\to P\left(\prod_{i\in I}M_i\right)$ inikasını $F(a)=\varprojlim F_i(a_i)$ düsturu ilə verək.

Beləliklə, (F,A) cütü M üzərində bir soft moduldur. (F,A) cütünün (1) tərs sisteminin limiti olduğunu isbatlayaq. (H,B) cütü N modulu üzərində ixtiyari soft modul və $\{(h_i,\varphi_i):(H,B)\to(F_i,A_i)\}_{i\in I}$ aşağıdakı şərti ödəyən soft homomorfizmlər ailəsi olsun:

$$(p_i^{i'},q_i^{i'})\cdot(h_{i'},\varphi_{i'})=(h_i,\varphi_i)\quad \forall i<i'$$

$(\psi,\gamma):(H,B)\to(F,A)$ soft homomorfizmini verək. $\gamma:B\to A$ inikasını $\gamma(b)=\{\varphi_i(b)\}$, $\psi:N\to M$ homomorfizmini isə $\psi(x)=\{h_i(x)\}$ düsturları ilə təyin edək. Göstərə bilərik ki,

$$(\pi_i,q_i):\varprojlim(F_i,Ai)\to(F_i,A_i)(q_i:\varprojlim A_i\to A_i,\pi_i:\varprojlim M_i\to M_i)$$

soft homomorfizmləri üçün

$$\begin{tikzcd}
(H,B) \arrow[r, "(h_i,\varphi_i)"] \arrow[d, "(\psi,\gamma)"'] & (F_i,A_i) \\
(F,A) \arrow[ur, "(\pi_i q_i)"'] &
\end{tikzcd}$$

diaqramı kommutativdir.

İndi

$$\left(\{(K_j,B_j)_{j\in J},\{(r_j^{j'},t_j^{j'})\}_{j<j'}\right) \qquad (4)$$

soft modulların tərs sistemi, $\varphi:J\to I$ izoton inikas və $(f_j,g_j):(F_{\varphi(j)},A_{\varphi(j)})\to(K_j,B_j)$ soft modulların homomorfizmi olsun.

Tərif 2. Əgər hər $j<j'$ üçün

$$\begin{tikzcd}
(F_{\varphi(j')},A_{\varphi(j')}) \arrow[r] \arrow[d] & (K_{j'},B_{j'}) \arrow[d] \\
(F_{\varphi(j)},A_{\varphi(j)}) \arrow[r] & (K_j,B_j)
\end{tikzcd}$$

diaqramı kommutativdirsə $(\varphi,\{f_j,g_j)\}_{j\in J})$ ailəsinə (1) sistemindən (4) gedən morfizmi deyilir.

SMod kateqoriyasında tərs sistemlər və onların morfizmləri kateqoriya təşkil edirlər, bunu *Jnv*(*SMod*) ilə göstərək.

$(\varphi,\{f_j,g_j)\}_{j\in J})$ tərs sistemlərin morfizmi olsun. Tərifdən

$$\begin{tikzcd}
\prod A_{\varphi(J)} \arrow[r] \arrow[d] & \prod M_{\varphi(J)} \arrow[d] \\
\prod B_j \arrow[r] & \prod N_j
\end{tikzcd}$$

diaqramı kommutativdir. Burdan alırıq ki,

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim A_{\varphi(j)} \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim M_{\varphi(j)} \arrow[d] \\
\varprojlim B_j \arrow[r] & \varprojlim N_j
\end{tikzcd}$$

diaqramı kommutativdir. Beləliklə,

$$(\varprojlim f_i,\varprojlim g_i):\varprojlim(F_{\varphi(j)},A_{\varphi(j)})\to\varprojlim(K_j,B_j)$$

soft modulların homomorfizmidir. Bununla aşağıdakı teorem isbatlanmış olar.

Teorem 2. $(\{F_i,A_i)\}_{i\in I}$, $\{(p_i^{i'},q_i^{i'})_{i<i'})\to\varprojlim(F_i,A_i)$ qarşı gəlməsi *Jnv*(*SMod*) kateqoriyasından *SMod* kateqoriyasına gedən funktordur.

Tərs limit funktoru dəqiq ardıcıllığının dəqiqliyini saxlamadığını bilirik. Bu məsələni *SMod* kateqoriyasında araşdıraq.

2. Tərs limit funktorun törəməsi

Bundan sonra bütün soft modullarda parametrlər çoxluğunun eyni olduğunu qəbul edək, onda soft modulların tərs sistemi

$$(\{(F_i,A)\}_i,\{(p_i^{i'},1_A):(F_{i'},A)\to(F_i,A)\}_{i<i'})$$

şəklində olacaq. Hər $a\in A$ üçün

$$(\{(F_i(a)\}_i,\{p_i^{i'}:F_{i'}(a)\to F_i(a)\}_{i<i'})$$

modulların tərs sistemi olacaq və

$$(\varprojlim(F_i,A))(a)=\varprojlim F_i(a)$$

ödənir.

İndi $d:\prod_i M_i\to\prod_i M_i$ homomorfizmini

$$d(\{x_i\})=\{x_i-p_i^{i'}(x_{i'})\}$$

şəklində təyin edək. Aydındır ki, $\forall a\in A$ üçün

$$d(a)=d|_{\prod_i F(a)}:\prod_i F(a)\to\prod_i F(a)$$

uyğun modulların homomorfizmidir. Onda $\ker d(a)$ və $co\ker d(a)$ modullarını verə bilərik. Aydındır ki, $\ker d(a)=\varprojlim F_i(a)$-dır. Hər $a\in A$ üçün

$co\ker d(a)$ ilə verilən modula $\prod_i M_i$ modulu üzərində bir soft modul olaraq qəbul edilə bilər. Bu soft modulu $\varprojlim^{(1)}(F_i, A)$ kimi göstərək və bu soft modula tərs limit funktorunun birinci törəmə funktoru adını verək.

Beləliklə, $\varprojlim_i(F_i, A) = \ker d$, $\varprojlim_i^{(1)}(F_i, A) = co\ker d$ bərabərliyi alınır.

Təklif 3. $\varprojlim_i^{(1)}$ soft modulların tərs sistemlər kateqiriyasından soft modullar kateqoriyasına gedən bir funktordur.

Aşağıdakı kozincir kompleksinə baxaq

$$C = 0 \to \prod (F_\alpha, A) \xrightarrow{\ d\ } (F_\alpha, A) \to 0 .$$

Aydındır ki, bu kozincir kompleksinin $H^0(C)$ kohomoloji soft modulu $\varprojlim_i(F_\alpha, A) = \ker d$, $H^1(C)$ isə $\varprojlim_i^{(1)}(F_i, A) = co\ker d$ bərabərdir.

Təklif 4. $\varprojlim_i(F_\alpha, A) = H^0(C)$, $\varprojlim_i^{(1)}(F_i, A) = H^1(C)$ -dir.

$\varprojlim_i^{(1)}$ funktorunun bəzi xassələrini araşdıraq. I istiqamətlənmiş çoxluq olaraq N natural ədədlər çoxluğunu alaq, onda tərs sistem

$$(F_1, A) \underset{p_1^2}{\leftarrow} (F_2, A) \underset{p_2^3}{\leftarrow} \dots \tag{5}$$

şəklində olacaq.

Teorem 3. $(F_1, A) \overset{p_1^2}{\leftarrow} (F_2, A) \overset{p_2^3}{\leftarrow} \dots$ soft modulların tərs sistemidə hər bir sonsuz alt sistemi üçün $\varprojlim^{(1)}$ funktoru dəyişmir.

İsbatı. $S = \{i, j, k, \dots\}$ çoxluğu N natural ədədlər çoxluğunun sonsuz alt çoxluğu olsun. Təklif 5-dən soft modulların alt sistemində $\varprojlim_s{}^{(1)}$ aşağıdakı

$$d' : \prod_{s \in S} (F_s, A) \to \prod_{s \in S} (F_s, A)$$

soft homomorfizmi ilə təyin olunur. Modulların

$$f_0, f_1 : \prod_{s \in S} M_s \to \prod_{n \in N} M_n$$

Homomorfizmlərini

$$f_0(x_i, x_j, x_k, \dots) = (p_1^i(x_i), p_2^i(x_i), \dots, p_{i-1}^i(x_i), p_{i+1}^j(x_j), \dots, p_{j-1}^j(x_j), \dots),$$

$$f_1(x_i, x_j, x_k, \dots) = (0, \dots, (x_i), 0, \dots, x_j, 0, \dots, x_k, 0 \dots)$$

düsturları ilə verək. Asanlıqla yoxlaya bilərik ki,

$$\begin{array}{ccc} \prod_{s \in S} M_s & \xrightarrow{f_0} & \prod_{n \in N} M_n \\ \downarrow d' & & \downarrow d \\ \prod_{s \in S} M_s & \underset{f_1}{\to} & \prod_{n \in N} M_n \end{array}$$

diaqramı kommutativdir. Beləliklə f_0, f_1 homomorfizmləri $C' =: 0 \to \prod_{s \in S}(F_s, A) \xrightarrow{d'} \prod_{s \in S}(F_s, A) \to 0$ C' soft modulların kozincir kompleksindən C kozincir kompleksinə gedən homomorfizmlərdir.

İndi isə

$$g_0, g_1 : \prod_{n \in N} M_n \to \prod_{s \in S} M_s$$

Homomorfizmləri

$$g_0(x_1, x_2, \dots) = (x_i, x_j, x_k, \dots)$$

$$g_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \dots + p_i^{j-1}(x_{j-1}),$$

$$x_j + p_j^{j+1}(x_{j+1}) + \dots + p_j^{k-1}(x_{k-1}), \dots)$$

şəklində verək. Onda yenə yoxlaya bilərik ki, g_0, g_1 homomorfizmləri C kozincir kompleksinin C' kompleksinə gedən homomorfizmlərdir və

$$g_0 \circ f_0 = g_1 \circ f_1 = 1_{\prod_{s \in S}(F_s, A)}$$

bərabərliyi ödənir.

$$D : \prod_{n \in N} M_n \to \prod_{n \in N} M_n$$

homomorfizmini

$$D(x_1, x_2, \dots) = (x_1 + p_1^2(x_2) + \dots + p_1^{i-1}(x_{i-1}), x_2 + p_2^3(x_3) + \dots + p_2^{i-1}(x_{i-1}), \dots,$$

$$x_{i-1}, 0, x_{i+1} + p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2}) + \dots + p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1}), x_{i+1} + \dots + p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1}), 0, \dots)$$

düsturu ilə təyin edək. Hesablamalar göstərir ki, D homomorfizmi $f_0 \circ g_0$ və $f_1 \circ g_1$ homomorfizmləri arasında kozincir homotopiyadır. Onda

$$0 \to \prod_{n \in N}(F_n, A) \to \prod_{n \in N}(F_n, A) \to 0$$

$$0 \to \prod_{s \in S}(F_s, A) \to \prod_{s \in S}(F_s, A) \to 0$$

soft modulların kozincir kompleksləri kozincir homotopik ekvivalentdirlər və deməli, onların kohomoloji modulları bərabərdirlər. Nəzərə alsaq ki, $\varprojlim^{(1)}$ funktoru birinci kohomoloji moduluna bərabərdir, teorem isbatlanır.

Teorem 4. Əgər

$$(F_1, A) \overset{p_1^2}{\leftarrow} (F_2, A) \overset{p_2^3}{\leftarrow} \dots$$

SMod tərs sistemində p_i^{i+1} homomorfizmləri epimorfizmlər isə $\underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n, A) = 0$ -dır.

İsbatı. $\underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n, A)$ funktoru

$$d : \prod_n (F_n, A) \to \prod_n (F_n, A)$$

homomorfizmi ilə təyin olunur. p_i^{i+1} homomorfizmləri epimorfizmlər olduğundan d homomorfizmi də epimorfizmdir. Onda

$$\underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n, A) = co\ker d$$

olduğundan $\underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n, A) = 0$ -dır.

Teorem 5.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (F_2', A) & \to & (F_2, A) & \to & (F_2'', A) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (F_1', A) & \to & (F_1, A) & \to & (F_1'', A) & \to & 0
\end{array}$$

soft modulların tərs sistemlərinin qısa dəqiq ardıcıllığı olsun. Onda soft modulların

$$\begin{array}{l}
0 \to \underleftarrow{\lim}(F_n', A) \to \underleftarrow{\lim}(F_n, A) \to \underleftarrow{\lim}(F_n'', A) \to \\
\quad\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\
\to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n', A) \to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n, A) \to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n'', A) \to 0
\end{array}$$

ardıcıllığı dəqiqdir.

İsbatı. Soft modulların hər bir $\{(F_n, A)\}_{n \in N}$ tərs sistemi üçün

$$C =: 0 \to \prod_{n \in N} (F_n, A) \xrightarrow{d} \prod_{n \in N} (F_n, A) \to 0$$

soft modulların kozincir kompleksidir və

$$H^0(C) = \underleftarrow{\lim}(F_n, A), \ H^1(C) = \underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n, A) \tag{6}$$

bərabərliyi ödənir. Eyni şəkildə $\{(F_n', A)\}_n$ və $\{(F_n'', A)\}$ tərs sistemləri üçün

$$C' =: 0 \to \prod_{n \in N} (F_n', A) \xrightarrow{d'} \prod_{n \in N} (F_n', A) \to 0,$$

$$C'' =: 0 \to \prod_{n \in N} (F_n'', A) \xrightarrow{d''} \prod_{n \in N} (F_n'', A) \to 0$$

kozincir komplekslərinin kohomoloji modulları

$$H^0(C') = \underleftarrow{\lim}(F_n', A), \ H^1(C') = \underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n', A) \tag{7}$$

$$H^0(C'') = \underleftarrow{\lim}(F_n'', A), \ H^1(C'') = \underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n'', A) \tag{8}$$

şəklindədir. Teoremin şərtinə görə

$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

soft modulların kozincir komplekslərinin qısa dəqiq ardıcıllığıdır. Bu ardıcıllığın kohomoloji modullarının

$$\begin{array}{l}
0 \to H^0(C') \to H^0(C) \to H^0(C'') \to H^1(C') \to H^1(C) \to \\
H^1(C'') \to H^2(C') \to H^2(C) \to H^2(C'') \to \ldots
\end{array}$$

dəqiq ardıcıllığı alınır. (6),(7),(8) bərabərliklərini nəzərə alsaq

$$H^2(C') = H^2(C) = H^2(C'') = H^3(C') = \ldots = 0$$

$$\begin{array}{l}
0 \to \underleftarrow{\lim}(F_n', A) \to \underleftarrow{\lim}(F_n, A) \to \underleftarrow{\lim}(F_n'', A) \to \\
\underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n', A) \to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n, A) \to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n'', A) \to 0
\end{array}$$

dəqiq ardıcıllığı əldə olunur.

ƏDƏBİYYAT

1. U.Acar, F.Koyuncu, and B.Tanay, Soft Sets and Soft Rings, Comput.Math.Appl. 59(2010) 3458-3463.
2. H.Aktaş and N.Çağman, Soft Sets and Soft Group, İnform. Sci.177(2007) 2726-2735.
3. S.A.Bayramov and C.Gunduz(Aras), Intuitionistic Fuzzy Soft Modules, Computers and Mathematitics with Application, 62(2011), 2480-2486
4. S.A.Bayramov, Fuzzy and Fuzzy Soft Structures in Algebras, Lambert Academic Publishing, 2012.
5. Dold A.Lectures on Algebraic Topology Springer - Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.
6. S.Eilenberg and N.Steenrood,Foundations of Algebraic Topology, Princeton, 1952.
7. F.Feng,Y.B.Jun and X.Zhao, Soft Semirings, Comput.Math.Appl. 56(2008) 2621-2628.
8. M.Ghadiri and B.Davvaz, Direct System and Direct Limit of H_v-Modules, Iran. J.Sci.Technol.Trans.A Sci 128(A2) (2004) 267-275
9. C.Gunduz (Aras) and S.Bayramov, Inverse and Direct System in Category of fuzzy modules, Fuzzy Sets, Rough Sets and Multivalued Operations and Applications 2(1) (2011) 11-25.
10. Sheng-Gang Li, Inverse Limits in Category *L –Top(I)*[1], Fuzzy Sets and Systems 108 (1999) 235-241.
11. Sheng-Gang Li, Inverse Limits in Category *L –Top(II)*[1], Fuzzy Sets and Systems 109 (2000) 291-299.
12. V.Leoreanu, Direct Limits and Inverse Limits of *SHR* Semigroups, Southeast Asian Bull. Math. 25 (2001) 421-426.
13. P.K.Maji, A.R. Roy and R.Bisman, An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem, Comput.Math.Appl. 44 (2002) 1077-1083.
14. J.Milnor, On Axiomatic Homology Theory, Pac.J.Math.12 (1962) 337-341.
15. D.Molodtsov, Soft Set Theory - Fist Results, Comput. Math. Appl.37 (1999) 19-31.
16. Qiu-Mei Sun,Zi-Liong Zhang and Jing Liu, Soft Sets and Soft Modules, Lecture Notes in Comput. Sci.5009 (2008) 403-409.
17. L.A.Zadeh, Fuzzy Sets, İnformation and Control 8(1965), 338-353.

ПРОИЗВОДНЫЙ ФУНКТОР ОБРАТНОГО ПРЕДЕЛА В КАТЕГОРИИ СОФТ МОДУЛЕЙ

С.Э.АБДУЛЛАЕВ, С.А.БАЙРАМОВ

РЕЗЮМЕ

В этой работе исследуется вопрос существования предела обратной системы в категории софт модулей, доказывается существование и функториальность обратного предела. Далее рассматривается проблема о точности пределов обратных систем точных последовательностей, в связи с чем вводится производный функтор обратного предела.

Ключевые слова: софт модули, функтор обратного предела, ценные комплексы, производный функтор обратного предела.

DERIVATIVE FUNCTOR OF INVERSE LIMIT IN THE CATEGORY OF SOFT MODULES

S.E.ABDULLAYEV, S.A.BAYRAMOV

SUMMARY

The paper studies the basic concepts of soft module. Later, we introduce the inverse system in the category of soft modules and prove that its limit exists in this category. Generally, the limit of the inverse system of exact sequences of soft modules is not exact. Then, we define the notion $\underleftarrow{\lim}^{(1)}$ which is the first derived functor of the inverse limit functor. Finally, using methods of homology algebra, we prove that the inverse system limit of the exact sequence of soft modules is exact.

Key words: Soft modules, functor of inverse limit, chain complex, derivate functor of inverse limit.

Redaksiyaya daxil oldu: 05.01.2018-ci il
Çapa imzalandı: 09.04.2018-ci il