UOT 517.977.52

BİR PİLLƏVARİ XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTLƏRİ

M.Ü.ÇIRAXOVA
Bakı Dövlət Universiteti
Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının İdarəetmə Sistemləri İnstitutu
kmansimov@mail.ru

İşdə xətti Volterra fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər alınır.

Açar sözlər: Volterra tipli fərq tənliklər sistemi, optimal idarəetmə məsələsi, həllin göstərilişi, optimallıq üçün zəruri şərt, pilləvari optimal idarəetmə məsələsi.

Bir çox işlərdə (bax, məsələn [1-10]) adi diferensial tənliklər sistemilə təsvir olunan pilləvari optimal idarəetmə məsələləri tədqiq edilmiş və optimallıq üçün müxtəlif zəruri şərtlər alınmışdır. Bu işdə isə Volterra tipli fərq tənliklər sistemilə təsvir olunan bir diskret pilləvari optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

1. Məsələnin qoyuluşu. Tutaq ki, idarə olunan obyekt

$$x(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[A(t,\tau)x(\tau)+f(t,\tau,u)\right],\ t\in T_1=\{t_0,t_0+1,t_0+2,\dots,t_1-1,t_1\},$$

$$y(t)=\sum_{\tau=t_1}^{t}\left[B(t,\tau)y(\tau)+g(t,\tau,v)\right]+G(x(t_1)),\ t\in T_2=\{t_1,t_1+1,\dots,t_2\} \qquad (1)$$

Volterra tipli xətti fərq tənliklər sistemilə təsvir olunur.

Burada $A(t,\tau)$, $B(t,\tau)-$ verilmiş $(n\times n)$-ölçülü diskret matris funksiyalar, $f(t,\tau,u)$, $g(t,\tau,v)-$ verilmiş, t,τ-ya görə diskret, uyğun olaraq u və v-yə görə kəsilməz vektor-funksiyalar, t_0, t_1, t_2- verilmiş ədədlər olub, t_2-t_1 fərqi natural ədəddir, $G(x)-$ verilmiş n-ölçülü kəsilməz diferensiallanan vektor-funksiyadır, $u(t)$ ($v(t)$) – r (q)-ölçülü idarəedici vektor-funksiya olub, öz qiymətlərini verilmiş, boş olmayan, məhdud U (V) çoxluğundan alır, yəni

$$u(t)\in U\subset R^r,\ t\in T_1,$$
$$v(t)\in V\subset R^v,\ t\in T_2 \qquad (2)$$

məhdudiyyətləri ödənilir.

Bu şərtləri ödəyən $(u(t),v(t))$ cütünə mümkün idarə deyəcəyik. Bu (1) tənliklər sisteminin bütün mümkün idarələrə uyğun həlləri üzərində

$$S(u,v)=\varphi_1(x(t_1))+\varphi_2(y(t_2)) \qquad (3)$$

funksionalını təyin edək.

Burada $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ – verilmiş, kəsilməz diferensiallanan funksiyalardır.

Məsələnin qoyuluşu. Mümkün idarələr içərisindən eləsini tapmaq tələb olunur ki, (1) sisteminin ona uyğun həlli ilə birlikdə (3) funksionalına minimum qiymət versin. (3) funksionalına (1)-(2) şərtləri daxilində minimum qiymət verən $(u(t),v(t))$ mümkün idarəsinə optimal idarə, uyğun $(u(t),v(t),x(t),y(t))$ prosesinə isə optimal proses deyəcəyik.

2. Funksionalın artım düsturunun qurulması. Tutaq ki, $(u(t),v(t))$ qeyd olunmuş mümkün idarə, $(\bar{u}(t)=u(t)+\Delta u(t),\ \bar{v}(t)=v(t)+\Delta v(t))$ isə ixtiyari mümkün idarədir. Onda aydındır ki, trayektoriyanın artımı olan $(\Delta x(t),\Delta y(t))$

$$\Delta x(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[A(t,\tau)\Delta x(\tau)+\left[f(t,\tau,\bar{u}(\tau))-f(t,\tau,u(\tau))\right]\right],\ t\in T_1, \qquad (4)$$

$$\Delta y(t)=\sum_{\tau=t_1}^{t}\left[B(t,\tau)\Delta y(\tau)+\left[g(t,\tau,\bar{v}(\tau))-g(t,\tau,v(\tau))\right]\right]+\left[G(\bar{x}(t_1))-G(x(t_1))\right],\ t\in T_2 \qquad (5)$$

tənliklər sisteminin həllidir.

Fərz edək ki, $p(t)$ və $q(t)$ hələlik naməlum n və m-ölçülü vektor-funksiyalardır. Bu (4) eyniliyinin hər iki tərəfini soldan $p(t)$ vektor-funksiyasına vurub t-yə görə t_0-dan t_1-ə qədər cəmləsək alarıq ki,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}p'(t)\Delta x(t)=\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}p'(t)A(t,\tau)\Delta x(\tau)\right]+\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}p'(t)\left[f(t,\tau,\bar{u}(\tau))-f(t,\tau,u(\tau))\right]\right]. \qquad (6)$$

Daha sonra (5) eyniliyinin hər iki tərəfini $q(t)$-yə soldan skalyar vurub, alınan münasibətin hər iki tərəfini t-yə görə t_1-dən t_2-yə qədər cəmləyək. Nəticədə alarıq ki,

$$\sum_{t=t_1}^{t_2}q'(t)\Delta y(t)=\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[\sum_{\tau=t_1}^{t}q'(t)B(t,\tau)\Delta y(\tau)\right]+\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[\sum_{\tau=t_1}^{t}q'(t)\left[g(t,\tau,\bar{v}(\tau))-g(t,\tau,v(\tau))\right]\right]+$$
$$+\sum_{t=t_1}^{t_2}q'(t)\left[G(\bar{x}(t_1))-G(x(t_1))\right]. \qquad (7)$$

[11-14] işlərinə analoji olaraq alarıq ki,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t} p'(t)A(t,\tau)\Delta x(\tau)\right]=\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1} p'(\tau)A(\tau,t)\Delta x(t)\right],$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t} p'(t)[f(t,\tau,\bar{u}(\tau))-f(t,\tau,u(\tau))]\right]=\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1} p'(\tau)[f(\tau,t,\bar{u}(t))-f(\tau,t,u(t))]\right],$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[\sum_{\tau=t_1}^{t} q'(t)B(t,\tau)\Delta y(\tau)\right]=\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[\sum_{\tau=t}^{t_2} q'(\tau)B(\tau,t)\Delta y(t)\right],$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[\sum_{\tau=t_1}^{t} q'(t)[g(t,\tau,\bar{v}(\tau))-g(t,\tau,v(\tau))]\right]=\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[\sum_{\tau=t}^{t_2} q'(\tau)[g(\tau,t,\bar{v}(t))-g(\tau,t,v(t))]\right].$$

Bu eyniliklәri nәzәrә alıb

$$H_1(t,u,p)=\sum_{\tau=t_1}^{t} p'(\tau)f(\tau,t,u),\qquad M(t,v,q)=\sum_{\tau=t_2}^{t} q'(\tau)g(\tau,t,v)$$

Hamilton-Pontryagin funksiyalarını daxil edәk.

Onda $S(u,v)$ funksionalının artımını

$$\Delta S(u,v)=S(\bar{u},\bar{v})-S(u,v)=[\varphi_1(\bar{x}(t_1))-\varphi_1(x(t_1))]+[\varphi_2(\bar{y}(t_2))-\varphi_2(y(t_2))]+\sum_{t=t_0}^{t_1} p'(t)\Delta x(t)- \quad (8)$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1} p'(\tau)A(\tau,t)\right]\Delta x(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1}[H_1(t,\bar{u}(t),p(t))-H_1(t,u(t),p(t))]+\sum_{t=t_1}^{t_2} q'(t)\Delta y(t)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[\sum_{\tau=t_1}^{t_2} q'(\tau)B(\tau,t)\right]\Delta y(t)-\sum_{t=t_1}^{t_2}[M_1(t,\bar{v}(t),q(t))-M_1(t,v(t),q(t))]-\sum_{t=t_1}^{t_2} q'(t)[G(\bar{x}(t_1))-G(x(t_1))]$$

şәklindә yaza bilәrik.

Daha sonra

$$N(x)=\left[\frac{\partial\varphi_2(y(t_2))}{\partial y}-\sum_{t=t_1}^{t_2} q(t)\right]' G(x)$$

işarәlәmәsini daxil edәk.

Teylor düsturundan istifadә edәrәk yaza bilәrik ki,

$$\varphi_1(\bar{x}(t_1))-\varphi_1(x(t_1))=\frac{\partial\varphi_1'(x(t_1))}{\partial x}\Delta x(t_1)+o_1(\|\Delta x(t_1)\|),$$

$$\varphi_2(\bar{y}(t_2))-\varphi_2(y(t_2))=\frac{\partial\varphi_2'(y(t_2))}{\partial y}\Delta y(t_2)+o_2(\|\Delta y(t_2)\|),$$

$$N(\bar{x}(t_1))-N(x(t_1))=\frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x}\Delta x(t_1)+o_3(\|\Delta x(t_1)\|).$$

Nәhayәt, (4), (5) tәnliklәrindәn aydındır ki.

$$\Delta x(t_1)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1} A(t_1,\tau)\Delta x(\tau)+\left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1} f(\tau,t,\bar{u}(t))-f(\tau,t,u(t))\right]. \quad (9)$$

$$\Delta y(t_2)=\sum_{\tau=t_1}^{t_2} B(t_1,\tau)\Delta y(\tau)+\sum_{\tau=t_1}^{t_2}[g(\tau,t,\bar{v}(t))-g(\tau,t,\bar{v}(t))]+[G(\bar{x}(t_1))-G(x(t_1))]. \quad (10)$$

Ona görә dә yaza bilәrik ki,

$$\Delta S(u,v)=\sum_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_1'(x(t_1))}{\partial x}A(t_1,t)\Delta x(t)+\sum_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_1'(x(t_1))}{\partial x}[f(t_1,t,\bar{u}(t))-f(t_1,t,u(t))]+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2}\frac{\partial\varphi_2'(y(t_2))}{\partial y}B(t_1,t)\Delta y(t)+\sum_{t=t_1}^{t_2}\frac{\partial\varphi_2'(y(t_2))}{\partial y}[g(t_1,t,\bar{v}(t))-f(t_1,t,v(t))]+$$

$$+\frac{\partial\varphi_2'(y(t_2))}{\partial y}[G(\bar{x}(t_1))-G(x(t_1))]+\sum_{t=t_0}^{t_1} p'(t)\Delta x(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1} p'(\tau)A(\tau,t)\right]\Delta x(t)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1}[H_1(t,\bar{u}(t),p(t))-H_1(t,u(t),p(t))]+\sum_{t=t_1}^{t_2} q'(t)\Delta y(t)-\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[\sum_{\tau=t_1}^{t_2} q'(\tau)B(\tau,t)\right]\Delta y(t)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2}[M_1(t,\bar{v}(t),q(t))-M_1(t,v(t),q(t))]-\sum_{t=t_1}^{t_2} q'(t)[G(\bar{x}(t_1))-G(x(t_1))]$$

Buradan alarıq ki,

$$\Delta S(u,v)=\sum_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_1'(x(t_1))}{\partial x}A(t_1,t)\Delta x(t)+\sum_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_1'(x(t_1))}{\partial x}[f(t_1,t,\bar{u}(t))-f(t_1,t,u(t))]+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2}\frac{\partial\varphi_2'(y(t_2))}{\partial y}B(t_1,t)\Delta y(t)+\sum_{t=t_1}^{t_2}\frac{\partial\varphi_2'(y(t_2))}{\partial y}[g(t_1,t,\bar{v}(t))-f(t_1,t,v(t))]+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x}A(t_1,t)\Delta x(t)+\sum_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x}[f(t_1,t,\bar{u}(t))-f(t_1,t,u(t))]+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1} p'(t)\Delta x(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1} p'(\tau)A(\tau,t)\right]\Delta x(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1}[H_1(t,\bar{u}(t),p(t))-H_1(t,u(t),p(t))]+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2} q'(t)\Delta y(t)-\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[\sum_{\tau=t_1}^{t_2} q'(\tau)B(\tau,t)\right]\Delta y(t)-\sum_{t=t_1}^{t_2}[M_1(t,\bar{v}(t),q(t))-M_1(t,v(t),q(t))]+$$

$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)+o_2(\|\Delta y(t_2)\|)+o_3(\|\Delta x(t_1)\|).$$

Bәzi qruplaşdırmalar aparaq. Nәticәdә görәrik ki,

$$\Delta S(u,v)=\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial\varphi_1'(x(t_1))}{\partial x}A(t_1,t)+\frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x}A(t_1,t)+p'(t)\Delta x(t)-\sum_{\tau=t}^{t_1}p'(\tau)A(\tau,t)\right]\Delta x(t)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1}[H_1(t,\bar u(t),p(t))-H_1(t,u(t),p(t))]+\sum_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_1'(x(t_1))}{\partial x}[f(t_1,t,\bar u(t))-f(t_1,t,u(t))]+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x}[f(t_1,t,\bar u(t))-f(t_1,t,u(t))]++\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[q'(t)+\frac{\partial\varphi_2'(y(t_2))}{\partial y}B(t_1,t)-\sum_{\tau=t_1}^{t_2}q'(\tau)B(\tau,t)\right]\Delta y(t)-$$
$$-\sum_{t=t_1}^{t_2}[M_1(t,\bar v(t),q(t))-M_1(t,v(t),q(t))]+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)+o_2(\|\Delta y(t_2)\|)+o_3(\|\Delta x(t_1)\|).\quad(11)$$

Əgər fərz etsək ki, $p(t)$ və $q(t)$ uyğun olaraq aşağıdakı məsələnin (qoşma məsələ) həllidir

$$p(t)=-A'(t_1,t)\left[\frac{\partial\varphi_1'(x(t_1))}{\partial x}-\frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x}\right]+\sum_{\tau=t}^{t_1}A'(\tau,t)p(\tau),$$
$$q(t)=B'(t_1,t)\frac{\partial\varphi_2'(y(t_2))}{\partial y}+\sum_{\tau=t_1}^{t_2}B'(\tau,t)q(\tau),$$

onda (11) artım düsturu aşağıdakı şəklə düşər:

$$\Delta S(u,v)=-\sum_{t=t_0}^{t_1}[H_1(t,\bar u(t),p(t))-H_1(t,u(t),p(t))]+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_1'(x(t_1))}{\partial x}[f(t_1,t,\bar u(t))-f(t_1,t,u(t))]-\sum_{t=t_1}^{t_2}[M_1(t,\bar v(t),q(t))-M_1(t,v(t),q(t))]+\quad(12)$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1}\frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x}[f(t_1,t,\bar u(t))-f(t_1,t,u(t))]+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)+o_2(\|\Delta y(t_2)\|)+o_3(\|\Delta x(t_1)\|).$$

İndi aşağıdakı şəkildə Hamilton-Pontryagin funksiyasını daxil edək:

$$H(t,u,p)=H_1(t,u,p)-\left[\frac{\partial\varphi_1'(x(t_1))}{\partial x}+\frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x}\right]'f(t_1,t,u(t)).$$

Bu halda (12) artım düsturu aşağıdakı şəklə düşər:

$$\Delta S(u,v)=-\sum_{t=t_0}^{t_1}[H(t,\bar u(t),p(t))-H(t,u(t),p(t))]+\sum_{t=t_1}^{t_2}[M_1(t,\bar v(t),q(t))-$$
$$-M_1(t,v(t),q(t))]+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)+o_2(\|\Delta y(t_2)\|)+o_3(\|\Delta x(t_1)\|).\quad(13)$$

3. Həllin artımının normasının qiymətləndirilməsi. İndi $\|\Delta x(t_1)\|$ və $\|\Delta y(t_2)\|$ -ni qiymətləndirək. Bu məqsədlə [12] işinin nəticəsindən istifadə edərək, (4), (5) tənliklərinin həllərini aşağıdakı kimi yazaq:

$$\Delta x(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\Delta_{\bar u(t)}f(\tau,t,u(t))-\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\sum_{s=\tau}^{t}R_1(t,s)\Delta_{\bar u(\tau)}f(s,\tau,u(\tau))\right],\quad(14)$$

$$\Delta y(t)=\sum_{\tau=t_1}^{t}[\Delta_{\bar v(t)}g(\tau,t,v(t))]+[G(\bar x(t_1))-G(x(t_1))]-$$
$$-\sum_{\tau=t_1}^{t_2}\left[\sum_{s=\tau}^{t}R_2(t,s)\Delta_{\bar v(t)}g(s,\tau,v(\tau))\right]-\sum_{\tau=t_1}^{t}R_2(t,\tau)[G(\bar x(t_1))-G(x(t_1))].\quad(15)$$

Bu (4) və (5) göstərilişlərindən alırıq ki,

$$\|\Delta x(t)\|\le\sum_{\tau=t_0}^{t}\|\Delta_{\bar u(t)}f(\tau,t,u(t))\|+\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\sum_{s=\tau}^{t}\|R_1(t,s)\Delta_{\bar u(\tau)}f(s,\tau,u(\tau))\|\right],\quad(16)$$

$$\|\Delta y(t)\|\le\sum_{\tau=t_1}^{t}\|\Delta_{\bar v(t)}g(\tau,t,v(t))\|+\sum_{\tau=t_1}^{t_2}\left[\sum_{s=\tau}^{t}\|R_2(t,s)\Delta_{\bar v(t)}g(s,\tau,v(\tau))\|\right]+L_1\|\Delta x(t_1)\|.\quad(17)$$

Burada və sonralar hesab edirik ki,

$$\Delta_{\bar u(\tau)}f(t,\tau,u(\tau))=f(t,\tau,\bar u(\tau))-f(t,\tau,u(\tau)),$$
$$\Delta_{\bar v(\tau)}g(t,\tau,v(\tau))=g(t,\tau,\bar v(\tau))-g(t,\tau,v(\tau)).$$

4. Optimallıq üçün zəruri şərt. Tutaq ki, $(u^0(t),v^0(t))$ idarəsi optimal idarədir və

$$f(t,\tau,U)=\{\alpha:\ \alpha=f(t,\tau,u),\ u\in U\},$$
$$g(t,\tau,V)=\{\beta:\ \beta=g(t,\tau,v),\ v\in V\}\quad(18)$$

çoxluqları qabarıqdır.

Onda $(u^0(t),v^0(t))$ mümkün idarəsinin xüsusi artımını

$$\Delta u_\varepsilon(t)=u(t;\varepsilon)-u^0(t),\quad t\in T_1,$$
$$\Delta v_\varepsilon(t)=v(t;\varepsilon)-v^0(t),\quad t\in T_2\quad(19)$$

düsturu ilə təyin etmək olar.

Burada $\varepsilon\in[0,1]$ ixtiyari ədəd, $u(t;\varepsilon)$ $(v(t;\varepsilon))$ isə elə mümkün idarədir ki,

$$f(t,\tau,u(\tau;\varepsilon))-f(t,\tau,u^o(\tau))=\varepsilon[f(t,\tau,u(\tau))-f(t,\tau,u^o(\tau))],$$
$$(g(t,\tau,v(\tau;\varepsilon))-g(t,\tau,v^o(\tau))=\varepsilon[g(t,\tau,v(\tau))-g(t,\tau,v^o(\tau))])$$

münasibəti ödənir.

Harada ki $u(t)$ $(v(t))$ $u(t;\varepsilon)$ $(v(t;\varepsilon))$ mümkün idarəsinə uyğun mümkün idarədir.

$(x^0(t),y^0(t))$ trayektoriyasının idarənin (19) düsturu ilə təyin olunmuş xüsusi artımına uyğun artımını $(\Delta x_\varepsilon(t),\Delta y_\varepsilon(t))$ ilə işarə edək. Bu (16), (17) qiymətləndirilməsindən aydındır ki,

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \le Z_1\varepsilon, \quad t\in T_1,$$
$$\|\Delta y_\eta(t)\| \le Z_2\varepsilon, \quad t\in T_2.$$

Ona görə də (13) artım düsturundan alırıq ki,

$$S(u^\circ+\Delta u_\varepsilon, v^\circ+\Delta v_\varepsilon)-S(u^\circ,v^\circ) = -\varepsilon\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H(t,u(t),p^\circ(t))-H(t,u^0(t),p^\circ(t))\right]+\right.$$
$$\left. + -\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[M(t,v(t),q^\circ(t))-M(t,v^0(t),q^\circ(t))\right]\right]+o(\varepsilon).$$

Bu ayrılışdan $u(t)$ və $v(t)$-nin ixtiyariliyinə əsasən aşağıdakı hökmün isbatını alırıq.

Teorem 1. Əgər (18) çoxluqları qabarıqdırsa, onda baxılan məsələdə $(u^0(t),v^0(t))$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt aşağıdakı münasibətlərin ödənməsidir:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[H(t,u(t),p^\circ(t))-H(t,u^\circ(t),p^\circ(t))\right]\le 0, \tag{20}$$

hər bir $u(t)\in U,\ t\in T_1$ üçün,

$$\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[M(t,v(t),q^\circ(t))-M(t,v^\circ(t),q^\circ(t))\right]\le 0. \tag{21}$$

hər bir $v(t)\in V,\ t\in T_2$ üçün.

Bu zəruri şərt optimallıq üçün diskret maksimum formasında birinci tərtib zəruri şərtdir.

Qeyd edək ki, digər şərtlər daxilində baxılan məsələ üçün xəttiləşdirilmiş maksimum şərti formasında zəruri şərt də almaq olar.

Teorem 2. Tutaq ki, U və V çoxluqları qabarıqdır, $f(t,\tau,u)$ $(g(t,\tau,v))$ vektor-funksiyası isə $u(v)$ -yə görə kəsilməz törəməyə malikdir. Onda $(u^0(t),v^0(t))$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt ixtiyari $u(t)\in U,\ t\in T_1$ və $v(t)\in V,\ t\in T_2$ üçün uyğun olaraq

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[H'_u(t,u^0(t),p^\circ(t))(u(t)-u^\circ(t))\right]\le 0, \tag{22}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[M'_v(t,v^0(t),q^\circ(t))(v(t)-v^\circ(t))\right]\le 0 \tag{23}$$

bərabərsizliklərinin ödənməsidir.

Bu zəruri şərt baxılan məsələ üçün xəttiləşdirilmiş maksimum şərtinin analoqudur.

Teoremin isbatına keçək.

Tutaq ki, $(u^0(t),v^0(t))$ qeyd olunmuş, $(\bar u(t)=u^\circ(t)+\Delta u(t),\ \bar v(t)=v^\circ(t)+\Delta v(t))$ isə ixtiyari mümkün idarədir. Onda $S(u,v)$ funksionalının bu mümkün idarələrə uyğun artımını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\Delta S(u^\circ,v^\circ)=S(\bar u,\bar v)-S(u^\circ,v^\circ)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H(t,\bar u(t),p^\circ(t))-H(t,u^0(t),p^\circ(t))\right]-$$
$$-\sum_{t=t_1}^{t_2}\left[M(t,\bar v(t),q^\circ(t))-M(t,v^0(t),q^\circ(t))\right]+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)+o_2(\|\Delta y(t_2)\|)+o_3(\|\Delta x(t_1)\|)=$$
$$=-\sum_{t=t_0}^{t_1}H'_u(t,u^0(t),p^\circ(t))\Delta u(t)-\sum_{t=t_1}^{t_2}M'_v(t,v^0(t),q^\circ(t))\Delta v(t)+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)+$$
$$+o_2(\|\Delta y(t_2)\|)+o_3(\|\Delta x(t_1)\|)-\sum_{t=t_0}^{t_1}o_4(\|\Delta u(t_1)\|)-\sum_{t=t_1}^{t_2}o_5(\|\Delta v(t_2)\|). \tag{24}$$

Şərtə görə U və V çoxluqları qabarıqdır. Ona görə $(u^0(t),v^0(t))$ mümkün idarəsinin xüsusi artımını

$$\Delta u_\mu(t)=\mu(u(t)-u^\circ(t)),\ t\in T_1,$$
$$\Delta v_\mu(t)=\mu(v(t)-v^\circ(t)),\ t\in T_2 \tag{25}$$

düsturu ilə təyin edə bilərik. Burada $\mu\in[0,1]$ ixtiyari ədəd, $u(t)\in U,\ t\in T_1$ və $v(t)\in V,\ t\in T_2$ ixtiyari mümkün idarələrdir.

İndi $(\Delta x_\mu(t),\Delta y_\mu(t))$ ilə $(x^0(t),y^0(t))$ trayektoriyasının idarənin (1.35) düsturu ilə təyin olunmuş xüsusi artımına uyğun artımını işarə edək.

Göstərmək olar ki,

$$\|\Delta x_\mu(t)\|\sim\mu,\quad t\in T_1,$$
$$\|\Delta y_\mu(t)\|\sim\mu,\quad t\in T_2. \tag{26}$$

Onda bu (26) və (25) düsturlarını funksionalın (24) artım düsturunda nəzərə alsaq, aşağıdakı ayrılışı alarıq:

$$S(u^\circ(t)+\Delta u_\mu(t),v^\circ(t)+\Delta v_\mu(t))-S(u^\circ(t),v^\circ(t))=$$
$$-\mu\left[\sum_{t=t_0}^{t_1}H'_u(t,u^0(t),p^\circ(t))(u(t)-u^\circ(t))+\sum_{t=t_1}^{t_2}M'_v(t,v^0(t),q^\circ(t))(v(t)-v^\circ(t))\right]+o(\mu).$$

Buradan aydındır ki,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}H'_u(t,u^0(t),p^\circ(t))(u(t)-u^\circ(t))+\sum_{t=t_1}^{t_2}M'_v(t,v^0(t),q^\circ(t))(v(t)-v^\circ(t))\le 0.$$

Axırıncı bərabərsizlikdən $u(t)$ və $v(t)$ -nin ixtiyariliyinə əsasən teoremin isbatını alarıq.

ƏDƏBİYYAT

1. Авалишвили Н.М. Принцип максимума для оптимальной задачи с переменной структурой и запаздыванием // В сб. оптимальные задачи в системах с переменной структурой . Тбилиси: ТГУ, 1985, с.48-71.
2. Арсенашвили А.И., Тадумадзе Т.А. Необходимые условия оптимальности в нейтральных системах управления с непрерывным преемственностью // Труды ИПМ им. И.Н. Векуа. 1988, т. 27, с. 9-45.
3. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Н.: Наука, 1987, 226 с.
4. Багирова С.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в одной ступенчатой задаче управления. // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 2005, № 3, с. 183-188.
5. Батурин В.А., Дыхта В.А. и др. Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения. М.: Наука, 1990, 190 с.
6. Батурин В.А., Лемперт А.А. Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления. // Вычислительные технологии. 2003, т. 8, с. 103-108.
7. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // ДАН СССР. 1967, т. 176, № 4, с. 754-756.
8. Исмайлов Р.Р., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в ступенчатых задачах управления // Кибернетика и системный анализ. 2008, т. 44, № 1, с. 101-115.
9. Кириченко С.Б. Оптимальное управление системами с промежуточными фазовыми ограничениями // Кибернетика и системный анализ. 1994, № 4, с. 104-111.
10. Лемперт А.А., Урбанович Д.Е. Оптимизация сбросов загрязняющих веществ в бассейне реки при экологических ограничениях. // География и природные ресурсы. Специальный выпуск. 2004, с. 212-215.
11. Ивинская Е.В., Колмановский В.Б. Об ограниченности решений некоторых разностных уравнений Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2000, № 8, с. 89-97.
12. Колмановский В.Б. О предельной периодичности решений некоторых систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2001, № 5, с. 36-43.
13. Колмановский В.Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2000, № 4, с. 42-51.
14. Колмановский В.Б. Об асимптотической эквивалентности решений некоторых разностных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2001, № 4, с. 47-55.
15. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности в дискретных системах управления // Управляемые системы. ИМ СО АН СССР. 1979, в. 18, с. 14-25.
16. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Мн.: БГУ, 1981, 350 с.
17. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Мн.: БГУ, 1973, 185 с.
18. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256 с.
19. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности высокого порядка (обзор). Препринт ИМ АН БССР. Мн. 1982, № 30 (155), 48 с.

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

М.У.ЧЫРАХОВА

РЕЗЮМЕ

В работе изучается одна задача оптимального управления описываемая системой линейных разностных уравнений Вольтерра. Установлены необходимые условия оптимальности первого порядка.

Ключевые слова: система разностных уравнений типа Вольтерра, задача оптимального управления, представление решения, необходимое условие оптимальности, ступенчатая задача оптимального управления.

OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE STEP LINEAR OPTIMAL CONTROL PROBLEM

M.U.CHIRAKHOVA

SUMMARY

The paper investigates one optimal control problem described with the system of Volterra type linear differential equations. First order necessary optimality conditions are obtained.

Key words: the system of Volterra type differential equations, optimal control problem, representation of the solution, optimality condition

Redaksiyaya daxil oldu: 28.02.2018-ci il
Çapa imzalandı: 09.04.2018-ci il