UOT 517.977.52

İKİ DƏYİŞƏN STRUKTURLU XƏTTİ OPTİMAL İDARƏTMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

Ə.H.YAZDANXAH
Bakı Dövlət Universiteti
yazdankhah1@yahoo.co.uk

İşdə xətti diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan, iki optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.

Açar sözlər: dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsi, optimallıq üçün zəruri şərt, artım üsulu.

1. Bir dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsində tənzimləyicinin analitik konstruksiyası məsələsi. Tutaq ki, idarə olunan obyekt

$$\dot{x} = A_1(t)x + B_1(t)u, \quad t \in T_1 = [t_0, t_1], \tag{1.1}$$

$$\dot{y} = A_2(t)y + B_2(t)v, \quad t \in T_2 = [t_1, t_2] \tag{1.2}$$

diferensial tənliklər sistemi və

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.3}$$

$$y(t_1) = C\,x(t_1) \tag{1.4}$$

başlanğıc şərtləri ilə təsvir olunur.

Burada $x(t)$ $(y(t))$ – n (m)-ölçülü faza vektoru, t_0, t_1, t_2 $(t_0 < t_1 < t_2)$ – verilmiş ədədlər, $A_1(t)$, $B_1(t)$, $A_2(t)$, $B_2(t)$ – verilmiş kəsilməz, uyğun olaraq $(n \times n)$ və $(m \times m)$ ölçülü matris funksiyalar, C – verilmiş sabit matris, x_0 – verilmiş sabit vektor, $u(t)$ $(v(t))$ – r (q)-ölçülü hissə-hissə kəsilməz (sonlu sayda birinci növ kəsilmə nöqtəsinə malik) idarəedici vektor funksiya olub öz qiymətlərini boş olmayan, məhdud və açıq U (V) coxluğundan alır, yəni

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in [t_0, t_1],$$
$$v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in [t_1, t_2] \tag{1.5}$$

məhdudiyyətləri ödənir.

Bu şərtləri ödəyən $(u(t), v(t))$ cütünə mümkün idarə deyəcəyik. (1)-(4) məsələsinin $(u(t), v(t))$ mümkün idarəsinə uyğun hissə-hissə hamar $(x(t), y(t))$ həllinə isə mümkün trayektoriya, $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ kvartetinə isə mümkün proses deyəcəyik.

Bu (1.1)-(1.4) məsələsinin bütün mümkün idarələrə uyğun həlləri üzərində təyin olunmuş

$$J(u,v) = \frac{1}{2}x'(t_1)N_1\,x(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[x'(t)N_2(t)x(t) + u'(t)N_3(t)u(t)]dt + \frac{1}{2}y'(t_2)M_1\,y(t_2) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}[y'(t)M_2(t)y(t) + v'(t)M_3(t)v(t)]dt \tag{1.6}$$

funksionalının minimallaşdırılması məsələsinə baxaq.

Burada N_1, M_1 – verilmiş $(n \times n)$ və $(m \times m)$ ölçülü sabit matrislər, $N_i(t)$, $M_i(t)$, $i = 2,3$ uyğun ölçülü verilmiş kəsilməz matris funksiyalardır.

Bu (1.6) funksionalına (1.1)-(1.5) şərtləri daxilində minimum verən $(u^o(t), v^o(t))$ cütünə mümkün idarə, $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ prosesinə isə opimal proses deyəcəyik.

Fərz edək ki, $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ qeyd olunmuş mümkün prosesdir və

$$H_1(t, x, u, \psi_1) = -\frac{1}{2}[x'N_2(t)x + u'N_3(t)u] + \psi_1'[A_1(t)x + B_1(t)u],$$

$$H_2(t, y, v, \psi_2) = -\frac{1}{2}[y'M_2(t)y + v'M_3(t)v] + \psi_2'[A_2(t)y + B_2(t)v]$$

Hamilton-Pontryagin funksiyalarını daxil edək.

Burada $\psi = \psi_i(t)$, $i = 1,2$ uyğun olaraq n və m ölçülü vektor funksiyalar olaraq

$$\dot{\psi}_1 = -A_1'(t)\psi_1 + N_2(t)x, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1.7}$$

$$\dot{\psi}_2 = -A_2'(t)\psi_2 + M_2(t)y, \quad t \in [t_1, t_2] \tag{1.8}$$

xətti, bircins olmayan diferensial tənliklər sisteminin

$$\psi_1(t_1) = -N_1\,x(t_1) + C\psi_2(t_1), \tag{1.9}$$

$$\psi_2(t_2) = -M_1\,y(t_2) \tag{1.10}$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllidirlər.

Tutaq ki,

$$N_1 \geq 0,\ M_1 \geq 0,\ N_2(t) > 0,\ M_2(t) > 0,\ N_3(t) > 0,\ M_3(t) > 0. \tag{1.11}$$

Bu (11) şərtlərini nəzərə alaraq məsələn [1, 2] işlərində istifadə olunan üsulun vasitəsilə göstərmək olar ki, $(u(t), v(t))$ mümkün idarəsinin baxılan məsələdə optimal idarə olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\frac{\partial H_1(t, x(t), u(t), \psi_i(t))}{\partial u} = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial H_2(t, y(t), v(t), \psi_2(t))}{\partial v} = 0, \quad t \in [t_1, t_2] \tag{1.13}$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir.

Əgər H_i, $i=1,2$ Hamilton-Pontryagin funksiyalarının ifadələrini nəzərə alsaq, (1.12) və (1.13) bərabərliklərini

$$B_1'(t)\psi_1(t)-N_3(t)u(t)=0,$$
$$B_2'(t)\psi_{21}(t)-N_3(t)v(t)=0$$

şəklində yaza bilərik.

Bu münasibətlərdən alırıq ki, $(u(t),v(t))$ optimal idarəsi

$$u(t)=N_3^{-1}(t)B_1'(t)\psi_1(t), \tag{1.14}$$
$$v(t)=M_3^{-1}(t)B_2'(t)\psi_2(t) \tag{1.15}$$

düsturları vasitəsilə təyin olunurlar.

Daha sonra (1.14) və (1.15) düsturlarını (1.1)-(1.4) və (1.7)-(1.10) məsələlərində yerinə qoysaq alarıq ki,

$$\dot{x}(t)=A_1(t)x(t)+B_1(t)N_3^{-1}(t)B_1'(t)\psi_1(t), \tag{1.16}$$
$$x(t_0)=x_0, \tag{1.17}$$
$$\dot{y}(t)=A_2(t)y(t)+B_2(t)M_3^{-1}(t)B_2'(t)\psi_2(t), \tag{1.18}$$
$$y(t_1)=C\,x(t_1), \tag{1.19}$$
$$\dot{\psi}_1=-A_1'(t)\psi_1(t)+N_2(t)x(t), \tag{1.20}$$
$$\psi_1(t_1)=-N_1\,x(t_1)+C\,\psi_2(t_1), \tag{1.21}$$
$$\dot{\psi}_2(t)=-A_2'(t)\psi_2(t)+M_2(t)y(t), \tag{1.22}$$
$$\psi_2(t_2)=-M_1\,y(t_2). \tag{1.23}$$

Əgər

$$D_1(t)=B_1(t)N_3^{-1}(t)B_1'(t),$$
$$D_2(t)=B_2(t)M_3^{-1}(t)B_2'(t)$$

işarələmələri daxil etsək (1.16)-(1.19) məsələlərini

$$\dot{x}(t)=A_1(t)x(t)+D_1(t)\psi_1(t),$$
$$\dot{y}(t)=A_2(t)y(t)+D_2(t)\psi_2(t), \tag{1.24}$$
$$x(t_0)=x_0,\quad y(t_1)=C\,x(t_1) \tag{1.25}$$

şəklində yaza bilərik.

İndi $\psi_i(t)$, $i=1,2$ vektor-funksiyalarını

$$\psi_1(t)=-P_1(t)x(t), \tag{1.26}$$
$$\psi_2(t)=-P_2(t)y(t) \tag{1.27}$$

şəklində axtaraq.

Bu (1.26), (1.27) düsturlarının hər iki tərəfini diferensiallasaq alarıq ki,

$$\dot{\psi}_1(t)=-\dot{P}_1(t)x(t)-P_1(t)\dot{x}(t),$$
$$\dot{\psi}_2(t)=-\dot{P}_2(t)y(t)-P_2(t)\dot{y}(t).$$

Buradan (1.20)-(1.23), (1.24)-(1.25) əsasən alarıq ki,

$$-A_1'(t)\psi_1(t)+N_2(t)x(t)=-\dot{P}_1(t)x(t)-P_1(t)[A_1(t)x(t)+D_1(t)\psi_1(t)],$$
$$-A_2'(t)\psi_2(t)+M_2(t)y(t)=-\dot{P}_2(t)y(t)-P_2(t)[A_2(t)y(t)+D_2(t)\psi_2(t)].$$

Buradan alırıq ki,

$$[P_1(t)D_1(t)-A_1'(t)]\psi_1(t)=-\dot{P}_1(t)x(t)-P_1(t)A_1(t)x(t)-N_2(t)x(t),$$
$$[P_2(t)D_2(t)-A_2'(t)]\psi_2(t)=-\dot{P}_2(t)y(t)-P_2(t)A_2(t)y(t)-M_2(t)y(t),$$
$$[A_1'(t)P_1(t)-P_1(t)D_1(t)P_1(t)+\dot{P}_1(t)+P_1(t)A_1(t)+N_2(t)]x(t)=0,$$
$$[A_2'(t)P_2(t)-P_2(t)D_2(t)P_2(t)+\dot{P}_2(t)+P_2(t)A_2(t)+M_2(t)]y(t)=0.$$

Axırıncı iki münasibətin ixtiyari $x(t)$ və $y(t)$ üçün ödənməsi yalnız və yalnız o vaxt mümkündür ki,

$$\dot{P}_1(t)=-A_1'(t)P_1(t)-P_1(t)A_1(t)-N_2(t)+P_1(t)D_1(t)P_1(t), \tag{1.28}$$
$$\dot{P}_2(t)=-A_2'(t)P_2(t)-P_2(t)A_2(t)-M_2(t)+P_2(t)D_2(t)P_2(t). \tag{1.29}$$

Bu tənliklər üçün başlanğıc şərtləri tapaq.

Aydındır ki,

$$\psi_1(t_1)=-P_1(t_1)x(t_1),$$
$$\psi_2(t_2)=-P_2(t_2)y(t_2).$$

Ona görə də alırıq ki,

$$-N_1\,x(t_1)+C\,\psi_2(t_1)=-P_1(t_1)x(t_1),$$
$$-N_2\,y(t_2)=-P_2(t_2)y(t_2).$$

Buradan (1.26), (1.27) münasibətlərinə əsasən alırıq ki,

$$-N_1\,x(t_1)-C\,P_2(t_1)y(t_1)=-P_1(t_1)x(t_1),$$
$$-N_1\,x(t_1)-C\,P_2(t_2)C\,x(t_1)=-P_1(t_1)x(t_1).$$

Deməli,

$$P_1(t_1)=N_1+C\,P_2(t_1)C, \tag{1.30}$$
$$P_2(t_2)=N_2. \tag{1.31}$$

Alınmış (1.28), (1.29) tənlikləri Rikkati tipli matris tənliklər sistemidir. Onlar üçün başlanğıc şərtlər isə (1.30), (1.31) düsturları vasitəsilə verilir.

Əgər (1.28)-(1.31) məsələsini həll etsək, onda optimal idarə

$$u(t)=-N_3^{-1}(t)B_1'(t)P_1(t)x(t),$$
$$v(t)=-M_3^{-1}(t)B_2'(t)P_2(t)y(t)$$

düsturları vasitəsilə verilər.

2. Bolsa tipli dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün kafi şərt. Bolsa tipli

$$S(u,v)=\varphi_1(x(t_1))+\varphi_2(y(t_2))+\int_{t_0}^{t_1}\left[f^o(t,x(t))+h_1(t,u(t))\right]dt+\int_{t_1}^{t_2}\left[g^o(t,y(t))+h_2(t,v(t))\right]dt \quad (2.1)$$

funksionalının

$$u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in[t_0,t_1],$$

$$v(t)\in V\subset R^q,\quad t\in[t_1,t_2] \quad (2.2)$$

$$\dot{x}=A(t)x+f(t,u),\quad t\in[t_0,t_1], \quad (2.3)$$

$$x(t_0)=x_0, \quad (2.4)$$

$$\dot{y}=B(t)y+g(t,v(t)),\quad t\in[t_1,t_2] \quad (2.5)$$

$$y(t_1)=G(x(t_1)) \quad (2.6)$$

şərtləri daxilində minimumunun tapılması məsələsinə baxaq.

Burada $u(t)$ $(v(t))$ – r (q)-ölçülü hissə-hissə kəsilməz (sonlu sayda kəsilmə nöqtəsinə malik) idarəedici vektor funksiya, $A(t)$, $B(t)$ – verilmiş, uyğun olaraq $(n\times n)$ və $(m\times m)$ ölçülü kəsilməz matris funksiyalar, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ – verilmiş kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyalar, $f(t,u)$, $g(t,v)$ – verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən kəsilməz, uyğun olaraq n və m ölçülü vektor-funksiyalar, $f^o(t,u)$, $g^o(t,v)$ isə verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən uyğun olaraq x və y-ə görə kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyalar, $G(x)$ – verilmiş kəsilməz diferensiallanan m ölçülü vektor-funksiya, t_0, t_1, t_2 $(t_0<t_1<t_2)$ – verilmiş ədədlər, x_0 – verilmiş sabit vektor, $h_1(t,u)$, $h_2(t,v)$ – verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən kəsilməz skalyar funksiyalar, U və V isə verilmiş, boş olmayan məhdud çoxluqlardır.

Yuxarıda qoyulan şərtləri ödəyən hər bir $(u^o(t),v^o(t))$ cütünə baxılan məsələdə mümkün idarə deyəcəyik.

Fərz edək ki, $(u^o(t),v^o(t),x^o(t),y^o(t))$,

$(\bar{u}(t)=u^o(t)+\Delta u(t),\bar{v}(t)=v^o(t)+\Delta v(t),\bar{x}(t)=$
$=x^o(t)+\Delta x(t),\bar{y}(t)=y^o(t)+\Delta y(t))$ – iki mümkün prosesdir.

$$H(t,u,\psi^o)=\psi^{o'}\cdot f(t,u)-h_1(t,u),$$

$$M(t,v,p^o)=p^{o'}\cdot g(t,v)-h_2(t,u),$$

$$N(x)=p^{o'}(t_1)G(x)$$

işarələmələrini daxil edək.

Burada $\psi^o(t)$, $p^o(t)$ uyğun olaraq n və m ölçülü vektor-funksiyalar olub (qoşma dəyişənlər)

$$\dot{\psi}^o=-A'(t)\psi^o+\frac{\partial f^o(t,x^o(t))}{\partial x},\quad t\in[t_0,t_1], \quad (2.7)$$

$$\psi^o(t_1)=-\frac{\partial\varphi_1(x^o(t_1))}{\partial x}+N_x(x^o(t_1)), \quad (2.8)$$

$$\dot{p}^o=-B'(t)p+\frac{\partial g^o(t,y^o(t))}{\partial y}, \quad (2.9)$$

$$p^o(t_2)=-\frac{\partial\varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y}. \quad (2.10)$$

Daxil edilmiş işarələmələri nəzərə alsaq, (2.1) funksionalının artımını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\Delta S(u^o,v^o)=S(\bar{u},\bar{v})-S(u^o,v^o)=\left[\varphi_1(\bar{x}(t_1))-\varphi_1(x^o(t_1))\right]+\left[\varphi_2(\bar{y}(t_2))-\varphi_2(y^o(t_2))\right]+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[f^o(t,\bar{x}(t))-f^o(t,x^o(t))\right]dt+\int_{t_1}^{t_2}\left[g^o(t,\bar{y}(t))-g^o(t,y^o(t))\right]dt+\psi^{o'}(t_1)\Delta x(t_1)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\dot{\psi}^{o'}(t)\Delta x(t)dt+p^{o'}(t_2)\Delta y(t_2)-\left[N(\bar{x}(t_1))-N(x^o(t_1))\right]-\int_{t_0}^{t_1}\dot{p}^{o'}(t)\Delta y(t)dt- \quad (2.11)$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[H(t,\bar{u}(t),\psi^o(t))-H(t,u^o(t),\psi^o(t))\right]dt-\int_{t_1}^{t_2}\left[M(t,\bar{v}(t),p^o(t))-M(t,v^o(t),p^o(t))\right]dt.$$

Buradan, Teylor düsturundan istifadə etməklə və nəzərə almaqla ki, $(\psi^o(t),p^o(t))$ (2.7)-(2.8), (2.9)-(2.10) məsələlərinin həllidir, (2.11) artım düsturunu

$$\Delta S(u^o,v^o)=-\int_{t_0}^{t_1}\left[H(t,\bar{u}(t),\psi^o(t))-H(t,u^o(t),\psi^o(t))\right]dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[M(t,\bar{v}(t),p^o(t))-M(t,v^o(t),p^o(t))\right]dt+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)+o_2(\|\Delta y(t_2)\|)-o_3(\|\Delta x(t_1)\|)+ \quad (2.12)$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}o_4(\|\Delta x(t)\|)dt+\int_{t_1}^{t_2}o_5(\|\Delta y(t)\|)dt$$

şəklində yaza bilərik.

Burada $o_i(\cdot)$, $i=\overline{1,5}$ kəmiyyətləri uyğun olaraq

$$\varphi_1(\bar{x}(t_1))-\varphi_1(x^o(t_1))=\frac{\partial\varphi_1'(x^o(t_1))}{\partial x}\Delta x(t_1)+o_1(\|\Delta x(t_1)\|),$$

$$\varphi_2(\bar{y}(t_2))-\varphi_2(y^o(t_2))=\frac{\partial\varphi_2'(y^o(t_2))}{\partial y}\Delta y(t_2)+o_2(\|\Delta y(t_2)\|),$$

$$N(\bar{x}(t_1))-N(x^o(t_1))=N_x'(x^o(t_1))\Delta x(t_1)+o_3(\|\Delta x(t_1)\|),$$

$$f^o(t,\bar{x})-f^o(t,x^o)=\frac{\partial f^o(t,x^o)}{\partial x}\Delta x+o_4(\|\Delta x\|),$$

$$g^o(t,\bar{y})-g^o(t,y^o)=\frac{\partial g^o(t,y^o)}{\partial y}\Delta y+o_5(\|\Delta y\|)$$

ayrılışlarından təyin olunurlar.

Alınmış (2.12) artım düsturunun köməyilə aşağıdakı hökm isbat edilir.

Teorem 2.1. Tutaq ki, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$, $f^o(t,u)$, $g^o(t,v)$ funksiyaları faza vektoruna nəzərən qabarıq, $N(x)$ isə çökükdür. Onda $(u^o(t),v^o(t))$ mümkün idarəsinin (2.1)-(2.6) məsələsində optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$H(\theta,u^o(\theta),\psi^o(\theta))=\max_{u\in U} H(\theta,u,\psi^o(\theta))$$

(hər bir $\theta\in[t_0,t_1)$ üçün),

$$M(\xi,v^o(\xi),p^o(\xi))=\max_{u\in U} M(\xi,v,p^o(\xi))$$

(hər bir $\xi\in[t_1,t_2)$ üçün)

münasibətlərinin ödənməsidir.

Teoremi isbat edərkən [1] işində veilmiş sxemin təkmilləşdirilmiş variantından istifadə edilir.

ƏDƏBİYYAT

1. Lee E.B., Markus L. Foundation of Optimal Control Theory. New-York, London, Sydney. 1967, 576 p.
2. Афанасьев В.И., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1989, 447 с.

О ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

АЛИРЕЗА Г. ЯЗДАНХАГ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются две задачи оптимального управления с переменной структурой.

Ключевые слова: задача оптимального управления с переменной структурой, необходимые условие оптимальности, формула приращения.

ON TWO LINEAR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH VARIABLE STRUCTURES

ALIREZA H. YAZDANKHAH

SUMMARY

The paper considers two linear optimal control problems with variable structures.

Key words: optimal control problems with variable structures, necessary optimality condition, the increments formula.

Redaksiyaya daxil oldu: 03.04.2018-ci il
Çapa imzalandı: 28.06.2018-ci il