УДК 517.928

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB KOMPLEKS PARAMETRDƏN ASILI TƏNLİK ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN XARAKTERİSTİK DETERMİNANTININ SIFIRLARININ ASİMPTOTİKASI HAQQINDA

S.Z.ƏHMƏDOV
Bakı Dövlət Universiteti
salehmedov0@gmail.com

İşdə dördüncü tərtib parametrdən asılı tənlik üçün bir məsələnin xarakteristik determinantının sıfırlarının asimptotikası tapılmışdır. Sıfırların daha dəqiq asimptotik göstərilişi qurulmuşdur.

Açar sözlər: fundamental həll, asimptotika, analitik funksiya, Vronski determinantı, asimptotik düstur.

İşdə aşağıdakı məsələyə baxılır.

$$iy^{IV} + q(x)y'' - \lambda^4 y = 0\,,\ 0 < x < 1 \tag{1}$$

$$L_1(y) \equiv y(0) = 0$$
$$L_2(y) \equiv y'(0) = 0$$
$$L_3(y) \equiv y(1) = 0$$
$$L_4(y) \equiv y'(1) = 0 \tag{2}$$

Burada q(x) kompleks qiymətli funksiyadır.

(1) tənliyinə uyğun Birhof mənada xarakteristik tənliyin kökləri

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{p}} e^{-\frac{\pi}{8}i}\ ;\ \theta_2 = i\theta_1\ ;\ \theta_3 = -\theta_1\ ;\ \theta_4 = -i\theta_1$$

şəklindədir.

(1) tənliyinin fundamental həllərinin asimptotikasını qurmaq məqsədilə λ-kompleks müstəvisini aşağıdakı qayda ilə səkkiz sektora bölək.

$$S_1 = \{\lambda : -\lambda_1 tg\frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 tg\frac{\pi}{8}\}$$
$$S_2 = \{\lambda : \lambda_1 tg\frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 tg\frac{3\pi}{8}\}$$
$$S_3 = \{\lambda : \lambda_1 tg\frac{3\pi}{8} < \lambda_2; \lambda_1 tg\frac{5\pi}{8} < \lambda_2\}$$
$$S_4 = \{\lambda : -\lambda_1 tg\frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 tg\frac{5\pi}{8}\}$$
$$S_5 = \{\lambda : \lambda_1 tg\frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 tg\frac{7\pi}{8}\}$$

$$S_6 = \{ \lambda : -\lambda_1 tg\frac{7\pi}{8} < \lambda_2 < -\lambda_1 tg\frac{5\pi}{8} \}$$

$$S_7 = \{ \lambda : \lambda_2 < -\lambda_1 tg\frac{5\pi}{8} \; ; \lambda_2 < -\lambda_1 tg\frac{3\pi}{8} \}$$

$$S_8 = \{ \lambda : -\lambda_1 tg\frac{3\pi}{8} < \lambda_2 < -\lambda_1 tg\frac{\pi}{8} \}$$

Əgər q(x) funksiyası [0,1] parçasında kəsilməz diferensiallanan olarsa , onda S_n $(n = \overline{1,8})$ sektorlarının hər birində $|\lambda|$ –nın böyük qiymətlərində (1) tənliyinin fundamental həllərinin asimptotikası aşağıdakı göstərişə malikdir.

$$\frac{d^p y_k(x,\lambda)}{dx^p} = (\lambda\theta_k)^p \left[1 + \frac{1}{4\lambda\theta_k}\int_0^x q(\tau)d\tau + \frac{E_{kpn}(x,\lambda)}{\lambda^2}\right] e^{\lambda\theta_k x} \; ; \; k = \overline{1,4} \; ; \; p = \overline{0,3} \; ; \; \lambda \in S_n \; (n = \overline{1,8})$$, ([2] , [4]).

burada $E_{kpn}(x,\lambda)$ funksiyası λ –ya görə analitik , $x - a$ görə məhdud funksiyadır.

(1) – (2) spektral məsələyə uyğun $G(x,\xi,\lambda)$ Qrin funksiyası aşağıdakı kimi qurulur :

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \; ; \; \lambda \in S_k \, , k = \overline{1,8} \, ,$$

burada Δ(λ) xarakteristik determinant olub aşağıdakı kimi tapılır :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) \\ L_3(y_1) & L_3(y_2) & L_3(y_3) & L_3(y_4) \\ L_4(y_1) & L_4(y_2) & L_4(y_3) & L_4(y_4) \end{vmatrix}$$

$\Delta(x,\xi,\lambda)$ Köməkçi determinantı isə aşağıdakı şəkildədir :

$$\Delta(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & y_3(x,\lambda) & y_4(x,\lambda) \\ L_1(g)_x & L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) \\ L_2(g)_x & L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) \\ L_3(g)_x & L_3(y_1) & L_3(y_2) & L_3(y_3) & L_3(y_4) \\ L_4(g)_x & L_4(y_1) & L_4(y_2) & L_4(y_3) & L_4(y_4) \end{vmatrix}$$

$g(x,\xi,\lambda)$ Koşi funksiyası

$$g(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} z_k(\xi,\lambda) y_k(x,\lambda)$$

"+"əgər $0 \le \xi \le x \le 1$, "-" əgər $0 \le x \le \xi \le 1$

kimi tapılır.

$$z_k(\xi,\lambda) = \frac{V_{4k}(\xi,\lambda)}{V(\xi,\lambda)} \, , \quad k = \overline{1,4}$$

$V_{4k}(\xi,\lambda)$ funksiyası $V(\xi,\lambda)$ Vronski determinantının dördüncü sətir elementlərinin cəbri tamamlayıcısıdır.

Δ(λ) xarakteristik determinantının sıfırlarının asimptotikasını tapmaq üçün aşağıdakı teoremi verək.

Teorem.

Əgər q(x) $\epsilon \, C^1[0,1]$ olduqda $\Delta(\lambda)$ xarakteristik determinantın sıfırlarının asimptotikası aşağıdakı kimi göstərişə malikdir.

$$\lambda_n^4 = \pi^4\left(n^4 + 2n^3 + \frac{3}{2}n^2\right)i - \pi^2 n^2 \int_0^1 q(\tau)d\tau + O(n) \, , n \to \infty \qquad (3)$$

İsbatı.

λ kompleks müstəvisində Δ(λ) xarakteristik determinantının baş hissəsini ayırsaq alarıq:

λ kompleks parametri yalnız (1) tənliyində λ^4 kimi iştirak etdiyindən deməkolar ki ,

$$y(x,\lambda) = y(x,i\,\lambda) = y(x,-\lambda) = y(x,-i\,\lambda)$$

bərabərliyi doğrudur.Bu onu göstərir ki, (1) – (2) spektral məsələnin həllini o cümlədən Δ(λ) xarakteristik determinantın sıfırlarını birinci rübdə tapmaq kifayətdir. λ kompleks müstəvisinin birinci rübündə Δ(λ) xarakteristik determinantın baş hissəsi

$$\Delta_1(\lambda) = \left[1 + \frac{1}{\lambda}b_2(1) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] e^{\lambda(\theta_1+\theta_2)} + \left[1 + \frac{1}{\lambda}b_4(1) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] e^{\lambda(\theta_1+\theta_4)} \, , |\lambda| \to +\infty$$

şəklindədir.Burada $b_k = \frac{1}{4\theta_k}\int_0^x q(\tau)d\tau$ və λ kompleks parametri $\lambda_2 = \lambda_1 \, tg\frac{\pi}{8}$ yarımdüzxətti özündə saxlayan yarımzolaqda yerləşir.$R > 0$ olmaqla kifayət qədər böyük ədəddir.

$\Delta_1(\lambda) = 0$ tənliyini həll etmək üçün aşağıdakı düsturdan istifadə edək : ([1] , [3])

$$\lambda_n^m = \mu_n^m + m\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p}\mathrm{res}_{\lambda=\mu_n}\left\{\lambda^{m-1}\left(\frac{f_0(\lambda)}{f_{10}(\lambda)}\right)^p\right\}, \; m = 1,2,... \qquad (4)$$

$$f_{10}(\lambda) = e^{\lambda(\theta_1+\theta_2)} + e^{\lambda(\theta_1+\theta_4)} \qquad (5)$$

$$f_0(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda}b_2(1) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)e^{\lambda(\theta_1+\theta_2)} + \left(\frac{1}{\lambda}b_4(1) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)e^{\lambda(\theta_1+\theta_4)} \qquad (6)$$

$f_{10}(\lambda) = 0$ tənliyini həll etsək alarıq :

$$\mu_n = \frac{1+2n}{n}\cdot\frac{\pi}{\theta} \, , \; n \to \infty \qquad (7)$$

(5) – (7) düsturlarını (4) –də nəzərə alaq:

$$\lambda_n^m = \mu_n^m - m\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p}\mathrm{res}_{\lambda=\mu_n}\left[\lambda^{m-2}\frac{\left(b_4(1)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{\lambda\theta_4} + \left(b_2(1)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{\lambda\theta_2}}{e^{\lambda\theta_4}+e^{\lambda\theta_2}}\right] +$$

$$+ m\sum_{p=2}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p}\underset{\lambda=\mu_n}{\mathrm{res}}\left\{\lambda^{m-1}\left(\frac{f_0(\lambda)}{f_{10}(\lambda)}\right)^p\right\}$$

m = 4 olduqda aşağıdakı düsturu alırıq:

$$\lambda_n^4 = \mu_n^4 - 4\,\frac{b_4(1)}{\theta_4}\mu_n^2 + O(n) \; , n \to \infty.$$

μ_n , θ_4 , $b_4(x)$ ifadələrini nəzərə alsaq (3) düsturunu alarıq.Teorem isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Сagовничий В.А Любишкин В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа Докл. АН, СССР, 1981, т. 256, №4, с.794-798.
2. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла. М.: Наука, 1964, 458 с.
3. Маммедов Ю.А., Ахмедов С.З. Исследование характерического определителя, связанного с решением спектральной задачи Вестник БГУ, сер., физ-мат. наук, 2005, №2 , с.5-12
4. Əhmədov S.Z., Ələsgərova S.T. λ-kompleks parametrindən asılı dördüncü tərtib tənliyin fundamental həllərinin asimptotikasının qurulması. Bakı Universitetinin xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2012. №1, s.70-77.

ОБ АСИМПТОТИКЕ НУЛЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА

С.З.АХМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

В работе найдена асимптотика нулей характеристического определителя одной задачи для уравнения четвертого порядка, зависящего от параметра. Построено более точное асимптотическое представление для нулей характеристического определителя.

Ключевые слова: фундаментальные решения, асимптотика, аналитические функции, непрерывно дифференцируемые функции, детерминант Вронского, асимптотическая формула.

ON ASYMPTOTIC OF THE ZEROS OF THE CHARACTERISTIC DETERMINANT OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER EQUATION DEPENDING ON THE COMPLEX PARAMETER

S.Z.AHMADOV

SUMMARY

The asymptotic of the zeros of the characteristic determinant of a problem for a fourth-order equation depending on a parameter is found in the paper. A more precise asymptotic representation is constructed for the zeros of the characteristic determinant

Keywords: fundamental solution, asymptotic, analytical function, continuous differentiable function, Wronsky determinant, asymptotic formula.

Redaksiyaya daxil oldu: 04.04.2018-ci il
Çapa imzalandı: 28.06.2018-ci il