UDK 517.35

TRİKOMİ TƏNLİYİ ÜÇÜN MƏHDUD MÜSTƏVİ OBLASTDA QEYRİ-LOKAL VƏ QLOBAL HƏDLİ SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ DAXİLİNDƏ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI

Ş.A.NİFTULLAYEVA, N.Ə.ƏLİYEV
Lənkəran Dövlət Universiteti
sebineniftullayeva_90@mail.ru

Baxılan işdə Trikomi tənliyi üçün qeyri-lokal və qlobal hədlər tutan sərhəd şərtləri daxilində məsələnin fredholmuğu araşdırılmışdır. Bu araşdırma tənliyin fundamental həllinin köməyilə alınmış zəruri şərtlərin köməyilə aparılmışdır.

Açar sözlər. Trikomi tənliyi, qeyri-lokal və qlobal hədli sərhəd şərtləri, fundamental həll, əsas münasibətlər, zəruri şərtlər, sinqulyarlıqlar, requlyarizasiya, fredholmluq.

Məlumdur ki, klassik riyazi fizika tənliklərində $[1]-[2]$ və xüsusi törəməli tənliklərdə sərhəd məsələsinə, əsasən elliptik tip tənliklər üçün baxılır $[3]-[5]$. Sonralar isə parabolik və hiperbolik tip tənliklər üçün də sərhəd məsələlərinə baxılmışdır $[6]-[8]$. Nəhayət, qarışıq və birgə tip tənliklər üçün də əvvəlcə lokal, indi isə qeyri-lokal və qlobal hədlər tutan sərhəd şərtləri daxilində məsələlərin həlləri araşdırılmışdır $[9]-[14]$.

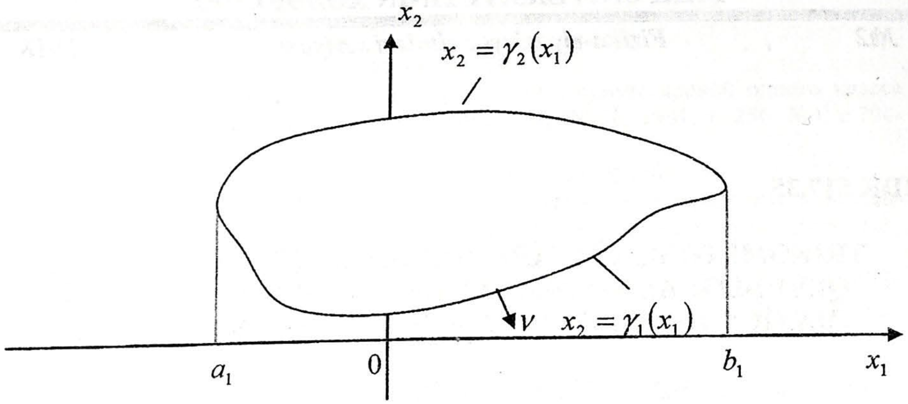
Məsələnin qoyuluşu:

$$lu \equiv x_2 \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = 0, \qquad x=(x_1,x_2) \in D \subset R^2, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\left\{\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}^{(k)}(x_1)\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_j}\bigg|_{x_2=\gamma_k(x_1)} + \alpha_{io}^{(k)}(x_1)u(x)\big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} + \sum_{j=1}^{2}\int_{a_1}^{b_1}K_{ij}^{(k)}(x_1,t_1)\frac{\partial u(t_1,t_2)}{\partial t_j}\bigg|_{t_2=\gamma_k(t_1)} dt_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{a_1}^{b_1}K_{i0}^{(k)}(x_1,t_1)u(t_1,t_2)\Big|_{t_2=\gamma_k(t_1)} dt_1\right\} = \alpha_i(x_1) \quad x_1 \in [a_1,b_1], \quad i=1,2, \tag{2}$$

burada (1) tənliyi $x_2 > 0$ yarımmüstəvisində elliptik, $x_2 < 0$ yarımmüstəvisində isə hiperbolikdir. Həqiqi ox üzərində bu tənlik parabolikə cırlaşır.



$\alpha_{ij}^{(k)}(x_1)$, $K_{ij}^{(k)}(x_1,t_1)$, $\alpha_i(x_1)$, $i=1,2;\ j=\overline{0,2};$ $k=1,2$ olduqda verilmiş kəsilməz funksiyalar, (2) şərtləri xətti asılı deyil, D oblastı x_2 istiqamətində qabarıq $\Gamma=\partial D$ sərhədi isə Lyapunov xəttidir. Sərhəd Γ-nın bölündüyü Γ_1 və Γ_2 hissələrinin tənlikləri uyğun olaraq $x_2=\gamma_1(x_1)$ və $x_2=\gamma_2(x_2)$, $\gamma_1(x_1)<\gamma_2(x_1)$ $x_1\in(a_1,b_1)$.

Məlumdur ki, (1) tənliyinin fundamental həlli [9]:

$$U(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+\frac{4}{9}(x_2-\xi_2)^3}, \qquad (3)$$

şəklindədir.

<u>Əsas münasibətlər və zəruri şərtlər</u>

Verilmiş (1) tənliyini (3) fundamental həllinə skalyar vurub, Ostroqradski-Qaus formulunu tətbiq etməklə ikinci Qrin formulu alınır. Buradan zəruri şərtləri ayırsaq, alarıq:

$$u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)u(x_1,\gamma_1(x_1))\frac{1}{1+\frac{4}{9}\gamma_1'^3(\sigma_1)(x_1-\xi_1)}\cdot\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots,$$

$$\xi_1\in(a_1,b_1) \qquad (4)$$

$$u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)u(x_1,\gamma_2(x_1))\frac{1}{1+\frac{4}{9}\gamma_2'^3(\sigma_2)(x_1-\xi_1)}\cdot\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots,$$

$$\xi_1\in(a_1,b_1) \qquad (5)$$

Burada (...) ilə sinqulyar olmayan hədlərin cəmi işarə edilmişdir.

İndi isə ikinci əsas münasibətin alınması ilə məşğul olaq. Bunun üçün (1) tənliyinin hər iki tərəfini (3) fundamental həllinin x_1-ə görə törəməsinə skalyar vuraq.

Beləliklə, ikinci əsas münasibət aşağıdakı şəkildə alınmış olur.

$$\int_\Gamma x_2\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\cos(\nu,x_1)dx+\int_\Gamma\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\cos(\nu,x_2)dx-$$

$$-\int_\Gamma\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}\cos(\nu,x_1)dx+\int_\Gamma\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}\cos(\nu,x_2)dx=$$

$$\int_D\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\left[x_2\frac{\partial^2U(x-\xi)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2U(x-\xi)}{\partial x_2^2}\right]dx=\begin{cases}\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}, & \xi\in D,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}, & \xi\in\partial D.\end{cases} \qquad (6)$$

Burada da ikinci Qrin formulunda olduğu kimi alınan iki ifadənin ikincisi zəruri şərtlərdir. Onları ayırsaq:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\bigg|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}=\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\gamma_1(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\frac{x_1-\xi_1}{(x_1-\xi_1)^2+\frac{4}{9}(\gamma_1(x_1)-\gamma_1(\xi_1))^3}\gamma_1'(x_1)dx_1+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\frac{-(x_1-\xi_1)}{(x_1-\xi_1)^2+\frac{4}{9}(\gamma_1(x_1)-\gamma_1(x_1))^3}dx_1+\ldots, \qquad (7)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\bigg|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\gamma_2(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\frac{-(x_1-\xi_1)}{(x_1-\xi_1)^2+\frac{4}{9}(\gamma_2(x_1)-\gamma_2(\xi_1))^3}\gamma_2'(x_1)dx_1+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\frac{x_1-\xi_1}{(x_1-\xi_1)^2+\frac{4}{9}(\gamma_2(x_1)+\gamma_2(x_1))^3}dx_1+\ldots \qquad (8)$$

Nəhayət, üçüncü əsas münasibəti alaq. Bunun üçün verilmiş (1) tənliyini (3) fundamental həllinin x_2-yə görə törəməsinə skalyar vuraq:

$$\int_\Gamma x_2\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}\cos(\nu,x_1)dx+\int_\Gamma\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}\cos(\nu,x_2)dx-$$

$$-\int_\Gamma x_2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\cos(\upsilon,x_2)dx+\int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}dx+$$

$$+\int_\Gamma x_2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\cos(\upsilon,x_1)dx=\begin{cases}\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}, & \xi\in D,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}, & \xi\in \Gamma.\end{cases} \qquad (9)$$

Buradan da zəruri şərtləri ayıraq:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\bigg|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_{11})}=\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\gamma_1(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\frac{1}{(x_1-\xi_1)+\frac{4}{9}(x_1-\xi_1)^2\cdot\gamma_1'(\sigma)^3}dx_1-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\frac{1}{(x_1-\xi_1)+\frac{4}{9}(x_1-\xi_1)^2\cdot\gamma_1'(\sigma)^3}dx_1+\ldots \qquad (10)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\bigg|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=-\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\gamma_2(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}$$

$$\frac{1}{(x_1-\xi_1)+\frac{4}{9}(x_1-\xi_1)^2\cdot\gamma_2'(\sigma)^3}dx_1-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1}\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\frac{1}{(x_1-\xi_1)+\frac{4}{9}(x_1-\xi_1)^2\cdot\gamma_2'(\sigma)^3}dx_1+\ldots \qquad (11)$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem 1. Əgər D oblastı x_2 istiqamətində qabarıq məhdud müstəvi oblast, $\Gamma=\partial D$ sərhədi Lyapunov xəttidirsə, onda D-də təyin olunmuş (1) tənliyinin ixtiyari həlli üçün (4)-(5), (7)-(8) və (10)-(11) sinqulyar zəruri şərtlər ödənilir.

Zəruri şərtlərdə sinqulyarlıqların saflaşdırılması

Teoremdə göstərilən ifadələrdə sinqulyarlıqların əmsallarını saflaşdıraq:

$$u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}u(x_1,\gamma_1(x_1))\cdot\frac{\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1\ldots, \qquad (4_1)$$

$$u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}u(x_1,\gamma_2(x_1))\cdot\frac{\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+\ldots \qquad (5_1)$$

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\bigg|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\cdot\frac{\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\cdot\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots \qquad (7_1)$$

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\bigg|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\cdot\frac{\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\cdot\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots \qquad (8_1)$$

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\bigg|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\cdot\frac{\gamma_1(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\cdot\frac{\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+\ldots$$

(10_1)

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\bigg|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\cdot\frac{\gamma_2(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\cdot\frac{\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}dx_1+\ldots (11_1)$$

Zəruri şərtlərdə olan sinqulyarlıqların requlyarizasiyası

Bunun üçün (4_1)-(5_1) (7_1)-(8_1) və (10_1)-(11_1) dən istifadə etməklə aşağıdakı kimi xətti kombinasiyaya baxaq.

$$\beta_{i2}^{(1)}(\xi_1)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\bigg|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{i2}^{(2)}(\xi_1)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\bigg|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}+\beta_{i1}^{(1)}(\xi_1)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\bigg|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}$$

$$+\beta_{i1}^{(2)}(\xi_1)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\bigg|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}++\beta_{i0}^{(1)}(\xi_1)\,u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))+\beta_{i0}^{(2)}(\xi_1)\,u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\left[\beta_{i2}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)+\beta_{i1}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)\right]\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\left[\beta_{i2}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)+\beta_{i1}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)\right]\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\gamma_1(x_1)}\left[\beta_{i2}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)+\beta_{i1}^{(1)}(x_1)\right]\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\left[\beta_{i1}^{(2)}(x_1)-\beta_{i2}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)\right]\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}u(x_1,\gamma_1(x_1))\left[\beta_{i0}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)\right]\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}u(x_1,\gamma_2(x_1))\left[\beta_{i0}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)\right]\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots \qquad (12)$$

Aldığımız (12) ifadəsində inteqralları birləşdirib, sinqulyarlığı ayırsaq, alınan ifadəni (2) sərhəd şərtində uyğun hədlərlə tutuşdurmaqla, alarıq:

$$-\left[\beta_{i2}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)+\beta_{i1}^{(1)}(x_1)\right]=\alpha_{i2}^{(1)}(x_1),$$
$$\beta_{i1}^{(2)}(x_1)-\beta_{i2}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)=\alpha_{i2}^{(2)}(x_1),$$
$$\beta_{i2}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)+\beta_{i1}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)=\alpha_{i1}^{(1)}(x_1),$$
$$-\left[\beta_{i2}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)+\beta_{i1}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)\right]=\alpha_{i1}^{(2)}(x_1),$$
$$\beta_{i0}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)=\alpha_{i0}^{(1)}(x_1),$$
$$-\beta_{i0}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)=\alpha_{i0}^{(2)}(x_1).$$

Bu ifadələrdən naməlum $\beta_{ij}^{(k)}(x_1)$ əmsallarını təyin edək.

$$\beta_{i0}^{(1)}(x_1)=\frac{\alpha_{i0}^{(1)}(x_1)}{\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)},\qquad \beta_{i0}^{(2)}(x_1)=-\frac{\alpha_{i0}^{(2)}(x_1)}{\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)},\tag{13}$$

$$\beta_{i1}^{(1)}(x_1)=\frac{\gamma_1(x_1)\alpha_{i2}^{(1)}(x_1)+\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)\alpha_{i1}^{(1)}(x_1)}{\gamma_1(x_1)\left[-1+\gamma_1(x_1)\gamma_1'^2(x_1)\right]},\tag{14}$$

$$\beta_{i2}^{(1)}(x_1)=\frac{-\alpha_{i1}^{(1)}(x_1)-\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)\alpha_{i2}^{(1)}(x_1)}{\gamma_1(x_1)\left[-1+\gamma_1(x_1)\gamma_1'^2(x_1)\right]}.$$

$$\beta_{i1}^{(2)}(x_1)=\frac{-\gamma_2(x_1)\alpha_{i2}^{(2)}(x_1)+\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)\alpha_{i1}^{(2)}(x_1)}{-\gamma_2(x_1)\left[1+\gamma_2(x_1)\gamma_2'^2(x_1)\right]},$$

$$\beta_{i2}^{(2)}(x_1)=\frac{\alpha_{i1}^{(2)}(x_1)+\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)\alpha_{i2}^{(2)}(x_1)}{-\gamma_2(x_1)\left[1+\gamma_2(x_1)\gamma_2'^2(x_1)\right]}\tag{15}$$

Aldığımız (13)-(15) ifadələrini (12)-də yerinə yazsaq, alarıq:

$$\frac{-\alpha_{i1}^{(1)}(\xi_1)-\gamma_1(\xi_1)\gamma_1'(\xi_1)\alpha_{i2}^{(1)}(\xi_1)}{\gamma_1(\xi_1)\left[-1+\gamma_1(\xi_1)\gamma_1'^2(\xi_1)\right]}\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\frac{\alpha_{i1}^{(2)}(\xi_1)+\gamma_2(\xi_1)\gamma_2'(\xi_1)\alpha_{i2}^{(2)}(\xi_1)}{-\gamma_2(\xi_1)\left[1+\gamma_2(\xi_1)\gamma_2'^2(\xi_1)\right]}\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}+$$
$$+\frac{\alpha_{i2}^{(1)}(\xi_1)+\gamma_1'(\xi_1)\alpha_{i1}^{(1)}(\xi_1)}{-1+\gamma_1(\xi_1)\gamma_1'^2(\xi_1)}\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\frac{\alpha_{i2}^{(2)}(\xi_1)-\gamma_2'(\xi_1)\alpha_{i1}^{(2)}(\xi_1)}{1+\gamma_2(\xi_1)\gamma_2'^2(\xi_1)}\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}+$$
$$+\frac{\alpha_{i0}^{(1)}(\xi_1)}{\gamma_1(\xi_1)\gamma_1'(\xi_1)}u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))-\frac{\alpha_{i0}^{(2)}(\xi_1)}{\gamma_2(\xi_1)\gamma_2'(\xi_1)}u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\Big\{\alpha_i(x_1)-\sum_{j=1}^{2}\int_{a_1}^{b_1}K_{ij}^{(k)}(x_1t_1)\times$$
$$\times\left.\frac{\partial u(t_1,t_2)}{\partial t_j}\right|_{t_2=\gamma_k(t_1)}dt_1-\int_{a_1}^{b_1}K_{i0}^{(k)}(x_1,t_1)u(t_1,t_2)\big|_{t_2=\gamma_k(t_1)}dt_1\Big\}\frac{dx_1}{x_1-\xi_1}+\ldots\qquad(i=1,2)\tag{16}$$

Aldığımız ifadənin sağ tərəfində birinci hədd məchul funksiya daxil olmadığından bu sinqulyar inteqral Koşinin baş mənasında mövcuddur.

Asanlıqla görmək olar ki, əgər

$$\alpha_i(x_1)\in C^{(1)}(a_1,b_1),\qquad \alpha_i(a_1)=\alpha_i(b_1)=0,\tag{17}$$

şərtləri ödənilərsə onda bu inteqral adi mənada da mövcuddur. Qalan iki hədlərdə isə inteqralların növbəsini dəyişməklə bu hədlərdə olan sinqulyarlıqlar requlyarlaşdırılır.

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem 2. Əgər D oblastı x_2 istiqamətində qabarıq məhdud müstəvi oblast, sərhədi Γ Lyapunov xətti olmaqla xətti asılı olmayan (2) sərhəd şərtlərinin $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1,t_1)$, $i=1,2;$ $j=\overline{0,2};$ $k=1,2$ əmsalları Hölder sinfindən olmaqla, $K_{ij}^{(k)}(x_1,t_1)$, $i=1,2;$ $j=\overline{0,2};$ $k=1,2$ nüvələri kəsilməz funksiyalar olub, sağ tərəfi (17) şərtlərini ödəyirsə, onda aldığımız (16) ifadələri requlyardır.

Beləliklə, (2) və (16) şəklində 4 requlyar ifadəmiz mövcuddur. Bu 4 xətti cəbri tənliklər sistemindən

$$\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)},\quad\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)},\quad\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)},\quad\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\tag{18}$$

məchulları Kramer qaydası ilə təyin olunur.

Bunun üçün aşağıdakı şərt ödənməlidir.

$$\Delta(\xi_1)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}^{(1)}(\xi_1)&\alpha_{11}^{(2)}(\xi_1)&\alpha_{12}^{(1)}(\xi_1)&\alpha_{12}^{(2)}(\xi_1)\\\alpha_{21}^{(1)}(\xi_1)&\alpha_{21}^{(2)}(\xi_1)&\alpha_{22}^{(1)}(\xi_1)&\alpha_{22}^{(2)}(\xi_1)\\\alpha_{31}^{(1)}(\xi_1)&\alpha_{31}^{(2)}(\xi_1)&\alpha_{32}^{(1)}(\xi_1)&\alpha_{32}^{(2)}(\xi_1)\\\alpha_{41}^{(1)}(\xi_1)&\alpha_{41}^{(2)}(\xi_1)&\alpha_{42}^{(1)}(\xi_1)&\alpha_{42}^{(2)}(\xi_1)\end{vmatrix}\neq 0,\tag{19}$$

burada

$$\begin{cases}\alpha_{i+2,1}^{(1)}(\xi_1)=\dfrac{\alpha_{i2}^{(1)}(\xi_1)+\gamma_1'(\xi_1)\alpha_{i1}^{(1)}(\xi_1)}{\gamma_1(\xi_1)\gamma_1'^2(\xi_1)-1},\\[2ex]\alpha_{i+2,1}^{(2)}(\xi_1)=\dfrac{\alpha_{i2}^{(2)}(\xi_1)-\gamma_2'(\xi_1)\alpha_{21}^{(2)}(\xi_1)}{\gamma_2(\xi_1)\gamma_2'(\xi_1)+1},\\[2ex]\alpha_{i+2,2}^{(1)}(\xi_1)=\dfrac{\alpha_{i1}^{(1)}(\xi_1)+\gamma_1(\xi_1)\gamma_1'(\xi_1)\alpha_{i2}^{(1)}(\xi_1)}{\gamma_1(\xi_1)\left[1-\gamma_1(\xi_1)\gamma_1'^2(\xi_1)\right]},\\[2ex]\alpha_{i+2,2}^{(2)}(\xi_1)=-\dfrac{\alpha_{i1}^{(2)}(\xi_1)+\gamma_2(\xi_1)\gamma_2'(\xi_1)\alpha_{i2}^{(2)}(\xi_1)}{\gamma_2(\xi_1)\left[1+\gamma_2(\xi_1)\gamma_2'^2(\xi_1)\right]}.\end{cases}\tag{20}$$

Yuxarıda verdiyimiz (18) məchulları $u(\xi_1, \gamma_k(\xi_1))$ və bütün 6 məchulun inteqralları vasitəsilə təyin olunur.

Analizdən məlum olan

$$u'(\xi_1, \gamma_k(\xi_1)) = \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)} + \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)} \gamma_k'(\xi_1), \quad k=1,2$$

ifadəsinə əsasən $u(\xi_1, \gamma_k(\xi_1))$ üçün də həmin 6 məchulların köməyilə ifadələr alınmış olur.

Bununla da aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 3. Teorem 2-nin şərtləri və (19) şərti daxilində qoyulmuş (1)-(2) sərhəd məsələsi Fredholm tiplidir.

ƏDƏBİYYAT

1. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1954, 444 с.
2. Михлин С.Г., Курс математической физики. М.: Наука,1968, 576 с.
3. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, М.: ГИФМЛ, 1961, 400 с.
4. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977, 432 с.
5. Берс Л., Джон Ф., Щехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир,1966, 352 с.
6. Дикинов Х.Ж., Керефов А.А., Нахущев А.М. Об одной краевой задаче нагруженного уравнения теплопроводности, Дифференциальные уравнения, 1976, т. 12, №1, с. 177-179.
7. Алиев Н.А., Альгулиев Р.М. Граничная задача для уравнения гиперболического типа. / Спектральная теория дифференциальных операторов. / Тематический сборник научных трудов. Баку, 1984, 3-9.
8. Алиев Н.А., Ахмедов Р.Г., Исследование решений краевых задач для уравнений гиперболического типа на области часть границы которой совпадает с характеристикой. / Прикладные вопросы функционального анализа. Баку, 1987, с. 3-8.
9. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа, М.–Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947, 192 с.
10. Алиев Н.А., Мамедов Ф.О., Задача смешанного типа для уравнения первого порядка, Изв. АН Азерб. ССР, ир. ФТМН, 1983, №6, с. 110-113.
11. Бицадзе А.В, Уравнения смешанного типа, Изд. АН СССР, 1959, 180 с.
12. Aliev N. and Jahanshahi M. Sufficient Conditions for Reduction of the BVP including a Mixed PDE with non-Local Boundary Conditions to Fredholm Inteqral Equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 1997, v.28, No3, p.419-425.
13. Fatemi M.R. Aliev N.A. General Linear Boundary Value Problem for the Second-Order Integro-Differential Loaded Equation with Boundary Conditions containing Both non-Local and Global Terms, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analisis, 2010, 12 p.
14. Ali Y.D.G., Nihan A.A. A Problem for a Composite Type Equation of Third Order with General Linear Boundary Conditions, Transachions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical – Technical and Mathematical Sciences. Ins. Mathematics and Mechanics Azerbaijan, Baku No4, 2009, pp.35-46.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЩЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ НА ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С НЕЛОКАЛНЫМИ И ГЛОБАЛЬНЫМИ СЛОГАЕМЫМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Ш.А.НИФТУЛЛАЕВА, Н.А.АЛИЕВ

РЕЗЮМЕ

Излагаемая работа посвящено исследование фредгольмовости граничной задачи для уравнения Трикоми с нелокальными и глобальными слагаемыми в граничных условиях. Исследование проводится с помощью необходимых условий которые получены из фундаментального решения рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: Уравнения Трикоми, граничная условия с нелокальными и глобальными слогаемыми, фундаментальное решения, основные соотношение, необходимые условии, сингулярность, регуляризация, фредгольмовость.

RESEARCH OF THE SOLUTION OF THE SUM WITHIN NON-LOCAL AND GLOBAL LIMITED VERGE IN THE SPHERE OF LIMITED SURFACE FOR TRIKOMI EQUATION

Sh.A.NIFTULLAYEVA, N.A.ALIYEV

SUMMARY

The fredholmness of the sum within non-local and global limited verge for Trikomi equation was searched in the work studied. This research work was carried out with the help of important conditions gained with the fundamental solution of the equation.

Key words: Trikomi equation, non-local and global border conditions, fundamental solution, main relations, important conditions, singulars, regulations, fredholmness.

Redaksiyaya daxil oldu: 18.04.2018-ci il
Çapa imzalandı: 28.06.2018-ci il