

RİYAZİYYAT

UOT 517.928

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB BİR DİFERENSİAL OPERATORUN MƏXSUSİ
ƏDƏDLƏRİNİN ASİMPOTOTİKASININ TAPILMASI

Y.Ə.MƏMMƏDOV, S.Z.ƏHMƏDOV

Bakı Dövlət Universiteti

salehmedov0@gmail.com

Kəsilən əmsallı dördüncü tərtib parametrdən asılı tənlik üçün bir məsələnin xarakteristik determinantının sıfırlarının dəqiqləşdirilmiş asimptotik ifadəsi tapılmışdır.

Açar sözlər: Fundamental həll, asimptotika, analitik funksiya, məxsusi ədəd, asimptotik düstur

Baxılan məqalə dördtərtibli kompleks parametrlı adi diferensial tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin xarakteristik determinantının sıfırlarının asimptotikasının qurulmasına həsr olunub

$$ipy^{IV} + q(x)y'' - \lambda^4 y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$L_1(y) \equiv y(0) = 0,$$

$$L_2(y) \equiv y'(0) = 0,$$

$$L_3(y) \equiv y(1) = 0,$$

$$L_4(y) \equiv y'(1) = 0,$$

$$L_5(y) \equiv \gamma_1 y(\alpha - 0) + \delta_1 y(\alpha + 0) = 0; \quad (2)$$

$$L_6(y) \equiv \gamma_2 y'(\alpha - 0) + \delta_2 y'(\alpha + 0) = 0,$$

$$L_7(y) \equiv \gamma_3 y''(\alpha - 0) + \delta_3 y''(\alpha + 0) = 0,$$

$$L_8(y) \equiv \gamma_4 y'''(\alpha - 0) + \delta_4 y'''(\alpha + 0) = 0,$$

burada p müsbət həqiqi ədəd, $q(x)$ kəsilən əmsallı kompleks qiymətli funksiyadır

$$q(x) = \begin{cases} q_1(x), & 0 \leq x < \alpha \\ q_2(x), & \alpha \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Bu məsələnin məxsusi funksiyalarının, eləcə də xüsusi törəməli diferensial tənlik üçün uyğun qarışıq məsələnin tədqiqində $q(x)$ funksiyasının əhə

miyyətli rol oynadığını nəzərə alaraq burada məxsusi ədədlərin dəqiqləşdirilmiş asimptotikası alınır. Bunun üçün (1) tənliyinin fundamental həllər sisteminin parametrlər böyük qiymətlərində ($|\lambda| \rightarrow \infty$) asimptotik ifadəsi dəqiqləşdirilir.

Parametrdən asılı (1) tənliyinə uyğun Birkhof mənada xarakteristik tənliyin köklərini:

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{p}} e^{-\frac{\pi}{8} i}, \theta_2 = i\theta_1, \theta_3 = -\theta_1, \theta_4 = -i\theta_1 \quad (3)$$

kimi işarə edək və (1) tənliyinin xətti asılı olmayan həllərinin asimptotikasını qurmaq üçün kompleks müstəvini aşağıdakı qaydada səkkiz sektora bölək [6]:

$$S_1 = \left\{ \lambda : -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \lambda : \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right\}$$

$$S_3 = \left\{ \lambda : \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} \right\}$$

$$S_4 = \left\{ \lambda : -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} \right\}$$

$$S_5 = \left\{ \lambda : \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \right\}$$

$$S_6 = \left\{ \lambda : -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} < \lambda_2 < -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} \right\}$$

$$S_7 = \left\{ \lambda : \lambda_2 < -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}; \lambda_2 < -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right\}$$

$$S_8 = \left\{ \lambda : -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} < \lambda_2 < -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right\}$$

$q_1(x) \in C^1[0, \alpha)$, $q_2(x) \in C^1[0, \alpha)$ olarsa S_n ($n = \overline{1, 8}$) sektorların hər birində $|\lambda|$ -nin böyük qiymətlərində (1) tənliyinin $[0, \alpha)$ və $[\alpha, 1]$ aralıqlarında fundamental həllərinin asimptotikası aşağıdakı kimi qurulur [5]:

$$\frac{d^m y_k(x, \lambda)}{dx^m} = (\lambda \theta_k)^m \left[1 + \frac{1}{4\lambda \theta_k} \int_0^x q_1(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] e^{\lambda \theta_k x};$$

$$k = \overline{1, 4}; m = \overline{0, 3}; \lambda \in S_n (n = \overline{1, 8}), |\lambda| \rightarrow +\infty,$$

(4)

$$\frac{d^m y_{k+4}(x, \lambda)}{dx^m} = (\lambda \theta_k)^m \left[1 + \frac{1}{4\lambda \theta_k} \int_{\alpha}^1 q_2(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] e^{\lambda \theta_k x};$$

$$k = \overline{1, 4}; m = \overline{0, 3}; \lambda \in S_n (n = \overline{1, 8}), |\lambda| \rightarrow +\infty,$$

Spektral məsələyə uyğun $G(x, \xi, \lambda)$ Qrin funksiyası [2, 3]

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}; \lambda \in S_k, k = \overline{1, 8}$$

şəklindədir. Burada $\Delta(\lambda)$ xarakteristik determinant adlanır və aşağıdakı şəkildə tapılır:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3(y_5) & L_3(y_6) & L_3(y_7) & L_3(y_8) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3(y_5) & L_3(y_6) & L_3(y_7) & L_3(y_8) \\ L_5^1(y_1) & L_5^1(y_2) & L_5^1(y_3) & L_5^1(y_4) & L_5^2(y_5) & L_5^2(y_6) & L_5^2(y_7) & L_5^2(y_8) \\ L_6^1(y_1) & L_6^1(y_2) & L_6^1(y_3) & L_6^1(y_4) & L_6^2(y_5) & L_6^2(y_6) & L_6^2(y_7) & L_6^2(y_8) \\ L_7^1(y_1) & L_7^1(y_2) & L_7^1(y_3) & L_7^1(y_4) & L_7^2(y_5) & L_7^2(y_6) & L_7^2(y_7) & L_7^2(y_8) \\ L_8^1(y_1) & L_8^1(y_2) & L_8^1(y_3) & L_8^1(y_4) & L_8^2(y_5) & L_8^2(y_6) & L_8^2(y_7) & L_8^2(y_8) \end{vmatrix}$$

$$L_{k+5}^1(y) \equiv \gamma_{k+1} \frac{d^k y(x, \lambda)}{dx^k} \Big|_{x=\alpha-0}, \quad k = \overline{0, 3}$$

$$L_{k+5}^2(y) \equiv \delta_{k+1} \frac{d^k y(x, \lambda)}{dx^k} \Big|_{x=\alpha+0}, \quad k = \overline{0, 3}$$

$\Delta(x, \xi, \lambda)$ isə $\Delta(\lambda)$ və Koşi funksiyası vasitəsilə tapılır.

Əsas nəticə aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem. Əgər $p > 0$, $q_1(x) \in C^1[0, \alpha]$, $q_2(x) \in C^1[0, \alpha]$,

$D_0(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) \neq 0$ olarsa, onda $\Delta(\lambda)$ xarakteristik

determinantının sıfırları yeganə limit nöqtəsi $\lambda = \infty$ olan hesabi çoxluqdur və bu sıfırlar üçün

$$\lambda_n^4 = \pi^4 \left(n^4 + 2n^3 + \frac{3}{2}n^2 \right) - \pi^2 n^2 \left(\int_0^\alpha q_1(\tau) d\tau + \int_\alpha^1 q_2(\tau) d\tau \right) + O(n),$$

$$n \rightarrow \infty$$

(5)

asimptotik ifadəsi doğrudur.

$$\text{burada, } D_0(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & i\gamma_2 - \delta_2 - i\delta_2 \\ \gamma_3 - \gamma_3 & \delta_3 & -\delta_3 \\ \gamma_4 - \gamma_4 - \delta_4 & i\delta_4 \end{vmatrix}$$

Xarakteristik determinantın sıfırlarının varlığı və hesabi çoxluq təşkil etməsi standart yolla [2, 5], (4) asimptotik düsturlardan istifadə etməklə göstərilir.

Baxılan (1) tənliyinin ixtiyari həlli üçün

$$y(x, \lambda) = y(x, i\lambda) = y(x, -\lambda) = y(x, -i\lambda)$$

bərabərliyinin doğru olduğunu nəzərə alsaq, xarakteristik determinantın sıfırlarının asimptotikasını birinci rübdə tapmaq kifayətdir. Birinci rübdə yerləşən və bucaq əmsalı $i g \frac{\pi}{8}$ olan düz xətti özündə saxlayan zolaqda xarakteristik determinantın baş hissəsini ayırısaq, alınmış ifadə aşağıdakı şəkildə olar [6, 7]:

$$\Delta_1(\lambda) = (1-i) \left[1 + \frac{1}{4p\theta_2\lambda} b(\alpha) \right] e^{(a_1+\theta_2)\lambda} + (1+i) \left[1 + \frac{1}{4p\theta_4\lambda} b(\alpha) \right] e^{(a_1+\theta_4)\lambda} \quad (6)$$

$$\text{Burada } b(\alpha) = \int_0^\alpha q_1(\tau) d\tau + \int_\alpha^1 q_2(\tau) d\tau.$$

$(\Delta_1(\lambda) = 0)$ tənliyini həll etmək üçün aşağıdakı düsturdan istifadə edirik [1, 4])

$$\lambda_n^m = \mu_n^m + m \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \operatorname{res}_{\lambda=\mu_n} \left\{ \lambda^{m-1} \left(\frac{g(\lambda)}{f(\lambda)} \right)^p \right\}, \quad m=1, 2, \dots \quad (7)$$

Burada

$$f(\lambda) = (1-i) e^{(a_1+\theta_2)\lambda} + (1+i) e^{(a_1+\theta_4)\lambda} \quad (8)$$

$$g(\lambda) = (1-i) \left[\frac{1}{4p\theta_2\lambda} b(\alpha) \right] e^{(a_1+\theta_2)\lambda} + (1+i) \left[\frac{1}{4p\theta_4\lambda} b(\alpha) \right] e^{(a_1+\theta_4)\lambda} \quad (9)$$

μ_n -lər isə $f(\mu) = 0$ tənliyinin kökləridirlər ki,

$$\mu_n = \frac{1+4n}{4} \frac{\pi}{\theta}$$

kimi tapılır.

$p=1$, $m=4$ halı üçün μ_n sadə polyusları üzrə çıxışları hesablayaraq (5) ifadəsini alırıq.

ƏDƏBİYYAT

1. Садовничий В.А., Любишкин В.А., Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа. Докл. АН, СССР, 1981, т. 256, №4, с. 794-798
2. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла// М.: Наука, 1964, 462 с.
3. Расулов М.Л. Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений // Баку: Элм, 1989, 328 с.
4. Мамедов Ю.А., Ахмедов С.З. -Исследование характеристического определителя, связанного с решением спектральной задачи// Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2005, №2, с.5-12
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969
6. Əhmədov S.Z., Ələsgərova S.T. λ – kompleks parametrindən asılı dördüncü tərtib tənliyin fundamental həllərinin asimptotikasının qurulması, Bakı Universiteti Xəbərləri, Fizika–riyaziyyat elmləri seriyası, 2012, №1, s.70-77.
7. Əhmədov S.Z. Dördüncü tərtib kompleks parametrdən asılı tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin karakteristik determinantının sıfırlarının asimptotikası haqqında, Bakı Universiteti Xəbərləri, Fizika–riyaziyyat elmləri seriyası, 2018, №2, s.97-100.

НАХОЖДЕНИЕ АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Ю.А.МАМЕДОВ, С.З.АХМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Асимптотика нулей характеристического определителя одной задачи для уравнения с разрывного коэффициента четвертого порядка, зависящего от параметра. Построено более точное асимптотическое представление для нулей характеристического определителя.

Ключевые слова: фундаментальные решения, асимптотика, аналитические функции, собственных значения, дифференциального оператора.

FINDING THE ASYMPTOTICS OF THE EIGENVALUES OF ONE FOURTH ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR

Y.A.MAMMADOV, S.Z.AHMADOV

SUMMARY

The asymptotic of the zeros of the characteristic determinant of a problem for a fourth-order equation depending on a sub-standing value parameter is found in the paper. A more precise asymptotic representation is constructed for the zeros of the characteristic determinant.

Key words: fundamental solution, asymptotic, analytical function, continuous differentiable function, differential operators.

*Redaksiyaya daxil oldu: 16.10.2018-ci il
Çapa imzalandı: 10.12.2018-ci il*