BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2018

UOT

HİPERBOLİK TİP KVAZİ XƏTTİ TƏNLİKLƏR

M.Q.PƏNAHOV, R.O.HACIYEVA
Bakı Dövlət Universiteti
bdu@mail.ru, rhaciyeva74@gmail.com

İşdə bir sinif hiperbolik tip kvazixətti tənliklər üçün Qursa məsələsinin həlinin varlığı və yeganəliyi araşdırılıb.

Açar sözlər: tənlik, şərtlər, qeyri-xətti ardıcıllıq.

Tutaq ki, $D=[0,T]\times[0,l]$ düzbucaqlısında təyin olunmuş $a(t,x), b(t,x)\in C(D)$ və $U(t,x)\in C^2(D)$ olduqda iki tərtibli

$$U_{tx}=a(t,x)U_t+b(t,x)U_x=f(t,x,U) \qquad (1)$$

tənliyi üçün

$$U(t,0)=\varphi(t),\ U(0,x)=\psi(x) \qquad (2)$$

Qursa məsələsi verilmişdir, burada $\varphi(t)$, $\psi(x)$, $\psi'(x)$ uyğun intervallarda, $a_t(t,x)$ D –də $f(t,x,U)$ isə $D\times(-\infty,+\infty)$ oblastında kəsilməz funksiyalardır. (t,x) D oblastının ixtiyarı nöqtəsi və $LU=U_{tx}+a(t,x)U_t+b(t,x)U_x$ olsun.

Hesablamalar göstərilmişdir ki, elə $\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$ və $\gamma(t,x,u)$ funksiyalar var ki, D oblastında

$$LU-f(t,x,U)=\frac{\frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha(t,x)\frac{\partial}{\partial x}[\beta(t,x)U(t,x)]\right\}}{\alpha(t,x)\beta(t,x)}-\gamma(t,x,U) \qquad (3)$$

münasibətini ödəyir. (3) –ün ödənilməsi üçün zəruri və kafi şərtlər.

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln|\beta(t,x)|=a(t,x),\ \frac{\partial}{\partial t}\ln|\alpha(t,x)\beta(t,x)|=b(t,x)$$

$$\gamma(t,x,U)=[a_t(t,x)+a(t,x)b(t,x)]U+f(t,x,U) \qquad (4)$$

bərabərlikləridir. $U(t,x)$ funksiyası

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha(t,x)\frac{\partial}{\partial x}[\beta(t,x)U(t,x)]\right\}=F(t,x,U) \qquad (5)$$

tənliyini ödədikdə, burada $F(t,x,U)=\alpha(t,x)\beta(t,x)\gamma(t,x,U)$ işarə olunub, onda

$$LU=f(t,x,U).$$

Tərsinə, (1) tənliyini ödəyən $U(t,x)$ funksiyası (5) münasibətini də ödəyəcək. Odur ki, istənilən kəsilməz diferensiallanan $\hat{\psi}(t)$ və $\hat{\phi}(x)$ funksiyaları üçün

$$U(t,x)=\beta^{-1}(t,x)\left\{\hat{\psi}(t)+\int_0^x\alpha^{-1}(t,\eta)\left[\hat{\phi}(x)+\int_0^t F(\xi,\eta,U)d\xi\right]d\eta\right\} \tag{6}$$

münasibəti doğrudur. İndi (6) münasibətində $\hat{\psi}(t)$ və $\hat{\phi}(x)$ funksiyalarını elə seçək ki, onların ifadələrini (6) –da yerinə yazdıqda alınan inteqral tənlik (1), (2) məsələsi ilə eyni güclü olsun:

$$\beta^{-1}(t,0)\,\hat{\psi}(t)=\varphi(t) \tag{7}$$

$$\beta^{-1}(0,x)\left\{\hat{\psi}(0)+\int_0^x\alpha^{-1}(0,\eta)\hat{\phi}(\eta)d\eta\right\}=\psi(x) \tag{8}$$

(7) –yə görə $\hat{\psi}(t)=\varphi(t)\cdot\beta(t,0)$. $\varphi(0)=0$ olduğundan $\hat{\psi}(0)=0$. Odur ki, (8) münasibətindən $\hat{\phi}(x)$-i təyin etmək üçün $\int_0^x\alpha^{-1}(0,\eta)\hat{\phi}(\eta)d\eta=\beta(0,x)\psi(x)$,

buradan isə $\hat{\phi}(x)=\alpha(0,x)\cdot\dfrac{d}{dx}[\beta(0,x)\psi(x)]$ alarıq. (9) $\hat{\psi}(t)$ və $\hat{\phi}(x)$ üçün alınan ifadələri (6)-da yerinə yazsaq

$$U(t,x)=\beta^{-1}(t,x)\left\{\beta(t,o)\varphi(t)+\int_0^x\alpha^{-1}(t,x_1)\left[\int_0^t F(\xi,x_1,U)d\xi+\alpha(0,x)\frac{d}{dx_1}[\beta(0,x_1)\psi(x_1)]\right]dx_1\right\} \tag{10}$$

alınar.

$\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$ və $F(t,x,u)$ funksiyalarından $a(t,x), b(t,x)$ və $f(t,x,u)$ funksiyalarına keçsək (10)-un açıq şəkildə ifadəsini aşağıdakı şəkildə almış olarıq.

$$U(t,x)=\frac{\beta(t,0)}{\beta(t,x)}\varphi(t)+\int_0^x\frac{\alpha(0,y)\beta(0,y)}{\alpha(t,y)\beta(t,x)}\psi'(y)dy+\int_0^x\frac{\alpha(0,y)\beta'_y(0,y)}{\alpha(t,y)\beta(t,x)}\psi(y)dy+\int_0^x\int_0^t\frac{\alpha(\xi,y)\beta_y(\xi,y)}{\alpha(t,y)\beta(t,x)}\gamma(\xi,y,U)d\xi dy$$

Burada

$$\gamma(t,x,U)=[a_t(t,x)+a(t,x)b(t,x)]U+f(t,x,U) \tag{12}$$

(4) münasibətinə görə

$$\frac{\beta(t,x)}{\beta(t,0)}=\exp\left(\int_0^x a(t,y)dy\right) \tag{13}$$

$$\frac{\alpha(t,y)\beta(t,x)}{\alpha(0,x)\beta(0,x)}=\exp\left(\int_0^t b(\tau,x)d\tau\right) \tag{14}$$

(13), (14) münasibətlərindən istifadə etməklə (11)-in sağ tərəfində $\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$ funksiyasının $a(t,x)$, $b(t,x)$ funksiyaları vasitəsilə ifadələrinə keçsək (11) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər.

$$U(t,x)=\varphi(t)\exp\left(-\int_0^x a(t,y)dy\right)+\int_0^x[\psi'(y)+a(0,y)\psi(y)]\cdot\exp\left(-\int_y^x a(t,\eta)d\eta-\int_0^t b(\tau,y)dt\right)dy+$$

$$+\int_0^x\int_0^t\exp\left(-\int_y^x a(t,\eta)d\eta-\int_\xi^t b(\tau,y)d\tau\right)\cdot\gamma(\xi,y,U)d\xi dy \tag{15}$$

Beləliklə, (1)-(2) məsələnin həlli onunla eyni güclü olan (15) inteqral tənliyinin həll edilməsinə gətirilir. (15) tənliyini həll etmək üçün əvvəlcə aşağıdakı işarələmələri qəbul edək.

$$V(t,x)=\varphi(t)\exp\left(-\int_0^x a(t,y)dy\right)+\int_0^x[\psi'(y)+a(0,y)\psi(y)]\cdot\exp\left(-\int_y^x a(t,\eta)d\eta-\int_0^t b(\tau,\eta)d\tau\right)dy \tag{16}$$

$$P(t,x;\xi,y)=\exp\left(-\int_y^x a(t,\eta)d\eta-\int_0^t b(\tau,y)d\tau\right) \tag{17}$$

Bu işarələmələrlə (15) tənliyi

$$U(x,t)=V(x,t)+\int_0^x\int_0^t P(t,x;\xi,y)\gamma(\xi,y,U)d\xi dy \tag{18}$$

şəklinə düşür. (18) tənliyin yeganə həllinin varlığını isbat etmək üçün ardıcıl yaxınlaşma üsulunu tətbiq edək. Fərz edək ki, (1) tənliyində $f(t,x,U)$ funksiyası U arqumentinə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir, belə ki, $f(t,x,0)=0$. $\gamma(t,x,U)$ funksiyasının təyinindən görünür ki, bu funksiyada Lipşits şərtini ödəyir:

$$|\gamma(t,x,U_1)-\gamma(t,x,U_2)|\le m(t,x)|U_1-U_2| \tag{19}$$

Burada $m(t,x)$ $D_1[0,t_0]\times[0,x_0]$ -də təyin olunmuş mənfi olmayan funksiyadır. $\max_{(x,t)\in D}|V(x,t)|=M$, $\max_{(x,t),(\xi,y)\in D}P(t,x;\xi,y)m(t,x)=N$ işarə edib aşağıdakı münasibətlərlə $\{U_n(t,x)\}$ ardıcıllığını təyin edək.

$$\begin{cases} U_0(t,x) = V(t,x) \\ U_{n+1}(t,x) = V(t,x) + \int\limits_0^x \int\limits_0^t P(t,x;\xi,y)\gamma(\xi,y,U_n(\xi,y))d\xi dy \quad n = 0,1,2... \end{cases} \quad (20)$$

İndi isbat edək ki, (20) münasibətilə təyin olunan $\{U_n(t,x)\}$ ardıcıllığı yığılır və limiti (1)-(2) məsələsi ilə eynigüclü olan (15) tənliyinin həllidir. Bu məqsədlə

$$\sum_{k=0}^{\infty}[U_{k+1}(t,x) - U_k(t,x)] + U_0(t,x) \quad (21)$$

sırasına baxaq. Bu sıranın n-ci xüsusi cəmi $U_n(t,x)$ olduğundan $\{U_n(t,x)\}$ ardıcıllığının yığılması (21) sırasının yığılması ilə ekvivalentdir. (21) sırasının müntəzəm yığıldığını göstərmək üçün onun hədlərini qiymətləndirək. (20) münasibətinə görə

$$|U_1(t,x) - U_0(t,x)| \le \int\limits_0^x \int\limits_0^t P(t,x;\xi,y)m(\xi,y)|V(\xi,y)|d\xi dy \le M \cdot N \cdot x \cdot t$$

$$|U_2(t,x) - U_1(t,x)| \le \int\limits_0^x \int\limits_0^t P(t,x;\xi,y)|\gamma(\xi,y,U_1) - \gamma(\xi,y,U_0)|d\xi dy \le$$

$$\le \int\limits_0^x \int\limits_0^t P(t,x;\xi,y)m(\xi,y)|U_1(\xi,y) - U_0(\xi,y)|d\xi dy \le$$

$$\le N \cdot \int\limits_0^x \int\limits_0^t MN\xi y d\xi dy = MN^2\left(\frac{xt}{2}\right)^2$$

Tam riyazi induksiya üsulunu tətbiq etməklə istənilən n üçün

$$|U_{n+1}(t,x) - U_n(t,x)| \le M \cdot N^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \quad (22)$$

olduğunu alarıq. Beləliklə, (21) sırası D oblastında yığılan $\sum \frac{(NTl)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}$ sırası ilə mojarantlanır. Odur ki, (21) sırası müntəzəm yığılır və həmin sıranın hədləri D oblastında 2 dəfə diferensiallanan funksiyalar olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(t,x) = U(t,x)$ limiti 2 dəfə diferensiallanan funksiya olmaqla (1)-(2) məsələsinə ekvivalent olan (15) inteqral tənliyinin yeganə həlli olur.

ӘDӘBİYYAT

1. Tixonov A.N., Samarski A.A. Riyazi fizika tənlikləri. Bakı: Azər tədris, 1962.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б. Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М.Г.РАНАХОВ, Р.О.ГАДЖИЕВА

РЕЗЮМЕ

В работе исследовано существование и единственности решения задачи Гурса для одного класса квазилинейных уравненный гиперболического типа.

Ключевые слова: уравнение, условия, нелинейная последовательность

QUASILINEAR HYPERBOLIC TYPE EQUATIONS

M.G.PANAHOV, R.O.HAJIYEVA

SUMMARY

The paper investigates the existence and uniqueness of the solution of Gursa problems for a class of quasilinear hyperbolic type equations.

Key words: equation, condition, non-linear sequence

Redaksiyaya daxil oldu: 19.11.2018-ci il
Çapa imzalandı: 10.12.2018-ci il