**BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ**

***№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019***

## RİYAZİYYAT

**УДК 517.956**

# О СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЯ С ТИПОВЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

**Ю.А.МАМЕДОВ[1], В.Ю.МАСТАЛИЕВ[2]**

***[1]Бакинский Государственный Университет***

***[2]Азербайджанский Государственный Педагогический Университет***

***vagiftrk1@rambler.ru***

*В работах [6], [7] показано, что смешанные задачи как для корректных по И.Г.Петровскому уравнений могут оказаться некорректными, так и для некорректных уравнений могут быть корректными. В настоящей статье изучено существование и единственность решения смешанной задачи для класса уравнений с комплекснозначными коэффициентами, ведущими себя как параболические, несмотря на то, что с течением "времени" могут перейти с параболического типа на щредингеревый, или даже на антипараболический тип.*

**Ключевые слова:** фундаментальное решение, асимптотика, аналитическая функция, непрерывное дифференцирование, асимптотическая формула, параболическая уравнения, спектральная задача, задача Коши, оператор

Изучается вопрос разрешимости смешанной задачи

$$M\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)U = L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)U\ ,\ 0<t<T,\ 0<x<1 \qquad (1)$$

$$U(0,x)=\varphi(x) \qquad (2)$$

$$U(t,0)=U(t,1)=0 \qquad (3)$$

где $M\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)=P_1(t)\frac{\partial}{\partial t}+P_0(t),$

$L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)=a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2},\ P_1(t)=p_{11}(t)+ip_{12}(t),\ P_0(t)=p_{01}(t)+ip_{02}(t)$ комплексно-значные функции, $a(x)>0$ , $a(x)\in C[0,1],\ P_j(t)\in C[0,1]\ (j=0,1),\ P_1(t)\neq 0$ .

Известно [5] что уравнение (1) называется параболичным по И.Г.Петровскому в области $D=\{(t,x):0\le t\le T, 0\le x\le 1\}$ пространства $t,x$

если для любой точки $(t,x)\in D$ вещественная часть корня $\gamma$ характеристического уравнения

$$P_1(t)\gamma + a(x)\sigma^2 = 0$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\gamma(t,x,\sigma) < 0$$

при любом вещественном $\sigma \neq 0$ .

Предполагается выполнение условий:

$1^0$. $\operatorname{Re}\int_0^t \frac{d\tau}{P_1(\tau)}d\tau > 0, 0 < t < T$ ;

$2^0$. $a(x) > 0$, $0 < x < 1$

$3^0$. $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Заметим, что условие $1^0$ позволяет выйти за рамки параболичности (даже корректности) по И.Г.Петровскому уравнения (1). Очевидно, что при выполнении условия $2^0$, уравнение (1) параболично по И.Г.Петровскому только тогда когда

$$\operatorname{Re}P_1(t) > 0,\ 0 \le t \le T \quad , \tag{4}$$

при условии $1^0$ же *Re* $P_1(t)$ может быть нулем или отрицательным в некоторый части (0, T] .

По схеме метода контурного интеграла [2] смешанной задаче (1)-(3) сопоставляются следующее две задачи с комплексным параметром $\lambda$:

1. Спектральная задача, соответствующая (1)-(3) имеет вид:

$$y'' - \lambda^2 a(x) y = -\varphi(x), \tag{5}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{6}$$

2. Задачи Коши с действительным параметром $x$ и комплексном параметром $\lambda$

$$M\left(t, \frac{d}{dt}\right)z - \lambda^2 z = 0,\ 0 < t < T, \tag{7}$$

$$z\big|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 < x < 1 \tag{8}$$

Известно, что [2], [4], что для фундаментальной системы частных решений однородного уравнения, соответствующего (5), имеет место асимптотическое представление :

$$\frac{d^j y_k(x,\lambda)}{dx^j} = \left((-1)^{k-1}\cdot\lambda\right)^j \cdot \left[1 + \frac{E_{j,k}(x,\lambda)}{\lambda}\right] \cdot e^{(-1)^k \cdot \lambda \cdot \int_0^x \sqrt{a(\eta)}d\eta} \qquad (|\lambda| \to \infty)$$

$$(\ j = 0,1;\ k = 1,2; \lambda \in S_i; i = 1,2\ )$$

где функции $E_{j,k}(x,\lambda)$ непрерывны и ограничены при

$\lambda \in S_i = \{\lambda \setminus (-1)^i \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, $i = 1,2; x \in [0,1]$.

Функция Грина $G(x,\xi,\lambda)$ задачи (5),(6) аналитична всюду на комплексной $\lambda$ плоскости, за исключением счетного множества значений $\lambda = \lambda_k$ $(k = 0,\pm 1,\pm 2,...)$, которые являются ее полюсами и для которых справедливо асимптотическое представление[1], [3]:

$$\lambda_k = \frac{\pi k\sqrt{-1}}{\int_0^1 \sqrt{a(\eta)}d\eta} + O\left(\frac{1}{k}\right), \ (|k| \to \infty)$$

Также известно, что вне $\delta$ -окрестностей точек $\lambda_\nu$ для производных функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$ задачи (5),(6) имеет следующие оценки [8], [9]:

$$\left| \frac{\partial^k G(x,\xi,\lambda)}{\partial x^k} \right| \le c\, |\lambda|^{k-1}, \quad (k = 0,1,2), \qquad \lambda \in S_i \ i = 1,2 \tag{9}$$

Очевидно, что решение задачи (7)-(8) имеет следующий вид:

$$z(t,x,\lambda) = \varphi(x)\cdot \exp\left(-\int_0^t \frac{p_{01}(\tau)+ip_{02}(\tau)-\lambda^2}{p_{11}(\tau)+ip_{12}(\tau)}d\tau\right)$$

Докажем следующую лемму:

**Лемма:** Пусть выполнены условия $1^0$, $2^0$. Тогда при $t \in [t_0, T]$ (для $\forall\, t_0 \in (0,T)$) справедлива оценка:

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^t \frac{\lambda_k^2}{P_1(\tau)}d\tau\right) \le -c|k|^2 \tag{10}$$

где $c > 0$.

**Доказательство:**

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^t \frac{\lambda_k^2}{P_1(\tau)}d\tau\right) = \operatorname{Re}\int_0^t \frac{\dfrac{(k\pi i)^2}{\left(\int_0^1 a(\eta)d\eta\right)^2}}{P_1(\tau)}d\tau = \operatorname{Re}\left[\int_0^t \frac{-k^2\pi^2}{\left(\int_0^1\sqrt{a(\eta)}d\eta\right)^2\cdot |P_1(\tau)|^2}\cdot (p_{11}(\tau)-ip_{12}(\tau))d\tau\right] =$$

$$= \frac{-k^2\pi^2}{\left(\int_0^1\sqrt{a(\eta)}d\eta\right)^2}\cdot \int_0^t \frac{p_{11}(\tau)}{|P_1(\tau)|}d\tau = \frac{-k^2\pi^2}{\left(\int_0^1\sqrt{a(\eta)}d\eta\right)^2}\cdot \operatorname{Re}\left(\int_0^t \frac{1}{P_1(\tau)}d\tau\right)$$

Учитывая условия $2^0$ отсюда получаем, что

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^t \frac{\lambda_k^2}{P_1(\tau)}d\tau\right)=\frac{-k^2\pi^2}{\left(\int_0^1\sqrt{a(\eta)}d\eta\right)^2}\cdot\operatorname{Re}\left(\int_0^t \frac{1}{P_1(\tau)}d\tau\right)\le -c\cdot|k|^2,$$

при $0<t_0\le t\le T$ , где $c=\left(\frac{\pi}{\int_0^1\sqrt{a(\eta)}d\eta}\right)^2\cdot\operatorname{Re}\left(\int_0^t\frac{1}{P_1(\tau)}d\tau\right)$.

Лемма доказана.

Имеет место следующая

**Теорема:** Пусть выполнены условия $1^0$, $2^0$, $3^0$. Тогда задача (1)-(3) имеет единственное классическое решение $U(t,x)\in C^{1,2}((0,T]\times[0,1])\cap C([0,T]\times[0,1])$ и она представляется формулой (при $t>0$ )

$$U(t,x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\underset{\lambda_k}{res}\, e^{\int_0^t\frac{P_0(\tau)-\lambda^2}{P_1(\tau)}d\tau}\cdot\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)d\xi \tag{11}$$

**Доказательство:**

Пусть $U(t,x)$ является классическим решением смешанной задачи (1)-(3).

Обозначим через $\chi_\nu$ кратность собственного значения $\lambda_\nu$ спектральной задачи (5)-(6) и согласно обшей схеме [1], введем следующие линейные операторы

$$f_{\nu s}(x)=A_{\nu s}f(x)=\underset{\lambda_\nu}{res}\,\lambda^{1+2s}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\,, \tag{12}$$

$$s=0,\chi_\nu-1;\ \nu=1,2,\ldots .$$

По известной теореме о разложений [1], [3] для функций $f(x)$ ( $f(x)\in C^2[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$ ) имеем:

$$-\sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu 0}(x)=f(x),\ x\in(0,1). \tag{13}$$

Применяя, операторы (12) к уравнению (1) , получаем

$$\underset{\lambda_\nu}{res}\,\lambda^{1+2s}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)M\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)U(t,\xi)d\xi\equiv$$

$$\equiv\underset{\lambda_\nu}{res}\,\lambda^{1+2s}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)L\left(\xi,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)U(t,\xi)d\xi \tag{14}$$

В силу обозначения (12) имеем:

$$\underset{\lambda_\nu}{res}\,\lambda^{1+2s}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)M\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)U(t,\xi)d\xi \equiv$$

$$\equiv M\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)\underset{\lambda_\nu}{res}\,\lambda^{1+2s}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)U(t,\xi)d\xi \equiv M\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)U_{\nu s}(t,x). \qquad (15)$$

С другой стороны, в силу очевидного равенства

$$\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)L\left(\xi,\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\varphi(\xi)d\xi = \varphi(x)+\lambda^2\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)d\xi,$$

справедливо для любой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющего условию $3^0$ (каким является и классическое решение $U(t,x)$), с учетом обозначения (12), находим:

$$\underset{\lambda_\nu}{res}\,\lambda^{1+2s}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)L\left(\xi,\frac{\partial}{\partial \xi}\right)U(t,\xi)d\xi = \underset{\lambda_\nu}{res}\,\lambda^{1+2s}U(t,x)+$$

$$+\underset{\lambda_\nu}{res}\,\lambda^{1+2s}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)U(t,\xi)d\xi = U_{\nu,s+1} \qquad (16)$$

Учитывая (15) и (16) в (14), получаем:

$$M\left(t,\frac{d}{dt}\right)U_{\nu s}(t,x)\equiv U_{\nu s+1} \quad (s=0,1,...,\chi_\nu-1). \qquad (17)$$

Аналогично, применяя, операторы (12) к начальным условиям (2), получаем:

$$U_{\nu s}(0,x)=\varphi_{\nu s}(x) \quad (s=0,1,...,\chi_\nu-1). \qquad (18)$$

В связи с тем, что $\chi_\nu$ является кратностью собственного значения $\lambda_\nu$, справедливо равенство

$$\underset{\lambda_\nu}{res}\,\lambda^{1+2s}\left(\lambda^2-\lambda_\nu^2\right)^{\chi_\nu}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)U(t,\xi)d\xi \equiv 0,$$

что означает следующее

$$\sum_{k=0}^{\chi_\nu} C_{\chi_\nu}^k\left(-\lambda_\nu^2\right)^{\chi_\nu-k}\underset{\lambda_\nu}{res}\,\lambda^{1+2k}\left(\lambda^2-\lambda_\nu^2\right)^{\chi_\nu}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)U(t,\xi)d\xi \equiv 0.$$

Следовательно, справедливо тождество:

$$U_{\nu\chi_\nu}(t,x)=-\sum_{k=0}^{\chi_\nu-1}\left(-\lambda_\nu^2\right)^{\chi_\nu-k}C_{\chi_\nu}^k\cdot U_{\nu k}(t,x). \qquad (19)$$

С учетом (19), тождества (17), (18) могут быть написаны в виде:

$$M\left(t,\frac{d}{dt}\right)V_\nu \equiv A_\nu V_\nu, \qquad (20)$$

$$V_\nu(0,x)=\phi_\nu(x), \qquad (21)$$

где

$$V_\nu = V_\nu(t,x) = \begin{pmatrix} U_{\nu 0}(t,x) \\ U_{\nu 1}(t,x) \\ . \\ . \\ . \\ U_{\nu \chi_\nu - 1}(t,x) \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\phi_\nu(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{\nu 0}(x) \\ \varphi_{\nu 1}(x) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_{\nu \chi_\nu - 1}(x) \end{pmatrix}, \quad A_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . \; . \; . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . \; . \; . & 0 \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ 0 & 0 & 0 & . \; . \; . & 1 \\ -\left(-\lambda_\nu^2\right)^{\chi_\nu} & -\left(-\lambda_\nu^2\right)^{\chi_\nu - 1} C_{\chi_\nu}^1 & -\left(-\lambda_\nu^2\right)^{\chi_\nu - 2} C_{\chi_\nu}^2 & . \; . \; . & \lambda_\nu^2 C_{\chi_\nu}^{\chi_\nu - 1} \end{pmatrix}.$$

Из тождеств (20), (21) заключаем, что вектор функция $V_\nu(t,x)$ является решением задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Известно, что такая задача имеет единственное решение. Следовательно, задача (17), (18) также имеет единственное решение. Покажем, что им является функция представляемая следующим образом:

$$U_{\nu s}(t,x) = -\underset{\lambda_\nu}{res}\, \lambda^{1+2s} \cdot e^{\int_0^t \frac{-P_0(\tau)+\lambda_\nu^2}{P_1(\tau)}} \cdot \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)d\xi. \tag{23}$$

Действительно,

$$M\left(t, \frac{d}{dt}\right) U_{\nu s}(t,x) = -\underset{\lambda_\nu}{res}\, \lambda^{1+2s} \cdot e^{\int_0^t \frac{-P_0(\tau)+\lambda_\nu^2}{P_1(\tau)}} \cdot \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)d\xi = U_{\nu s+1}(t,x,\varepsilon).$$

$$U_{\nu s}(0,x) = -\underset{\lambda_\nu}{res}\, \lambda^{1+2s} \cdot \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)d\xi = \varphi_{\nu s}(\xi).$$

С учетом соотношений (13), (23) решение задачи (1)-(3) можно представить в виде

$$U(t,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} U_{\nu 0}(t,x) =$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{\infty} \underset{\lambda_\nu}{res}\, \lambda \cdot e^{\int_0^t \frac{-P_0(\tau)+\lambda_\nu^2}{P_1(\tau)}} \cdot \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)d\xi. \tag{24}$$

Таким образом, мы доказали, что если выполняется условие $3^0$ и задача (1)-(3) имеет классическое решение, то оно представляется в виде (24).

Нетрудно показать, что при выполнении условия $3^0$ функция которая определяется с формулами (11) является формальным решением смешанной задачи (1)-(3). Поэтому, для доказательства теоремы1 достаточно обосновать законность переноса операций $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $t \to +0$, $x \to +0$, $x \to 1-0$ под знак несобственного интеграла (11). А для этого достаточно доказать равномерную сходимость (в соответствующих множествах) несобственных интегралов, полученных после переноса этих операций.

Пусть $\tau > 0$ произвольное постоянное. Тогда из оценки (9) и леммы для подынтегральных функций получаемых формальным дифференцированием интеграла (11) один раз по $t$ и $k$ $(k = 0,1,2)$-раза по $x$, при $0 \le x \le 1$, $t \ge \tau$, $\lambda \in S_i$ $i = 1,2$ и $|\lambda|$- достаточно большом, имеем оценки:

$$\left| \lambda e^{-\int_0^t \frac{P_0(\tau)-\lambda^2}{P_0(\tau)}} \cdot \frac{d^k y(x,\lambda)}{dx^k} \right| \le c|\lambda|^{k-1} e^{-c|\lambda|^2} \le \frac{c_1}{|\lambda|^2}, \quad (k = 0,1,2)$$

$$\left| \lambda \cdot \frac{P_0(t)-\lambda^2}{P_1(t)} e^{-\int_0^t \frac{P_0(\tau)-\lambda^2}{P_0(\tau)}} \cdot y(x,\lambda) \right| \le \tilde{c} \cdot |\lambda|^2 e^{-c|\lambda|^2} \le \frac{c_2}{|\lambda|^2}, \tag{25}$$

Следовательно, названные интегралы равномерно сходятся в любом прямоугольнике $[\tau, T] \times [0,1]$, где $0 < \tau < T$. Это означает, что при $t > 0$, $0 \le x \le 1$ операции $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial^k}{\partial x^k}$ $(k = 0,1,2)$ могут быть переносы под знак интеграла (11) и более того для функции $U(t,x)$ определяемую формулой (11) имеем:

$$U(t,x) \in C^{1,2}((0,T] \times [0,1]).$$

Из справедливости первого из оценок (25) при $k = 0$, $0 \le x \le 1$ следует, что операции $x \to +0$, $x \to 1-0$ также могут быть перенесены под знак интеграла (11). Теорема доказана.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Расулов М.Л. Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений. Баку: Элм, 1989, 328 с.
2. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла» М.: Наука, 1964, 462 с.
3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.
4. Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Академия Наук Украинской ССР, 1954, 286 с.
5. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964, 444 с.
6. Мамедов Ю.А. Исследование корректной разрешимости линейных одномерных смешанных задач для общих систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Баку, 1988 (Препринт/Ин-т физики АН Азерб. ССР. -20. -67 с.).

7. Мамедов Ю.А. О корректной разрешимости общих смешанных задач. //Дифференц. Уравнения, 1990, т. 26, № 3, с. 534-537.
8. Мамедов Ю.А., Масталиев В.Ю. О разрешимости смешанных задач для одного нового класса уравнений, могущих перейти с параболического типа на антипараболический, Вестник БГУ, 2002, №4, с.93-103.
9. Mastaliyev V.Yu. 2003: On Solvability of Mixed Problem for Some Equations not Involved by Standard Classifications, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, Vol. XVIII (XXVII), Baku, 2003, pp. 91-96.

## TİPƏ CIRLAŞAN BİR SİNİF TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QOYULMUŞ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNİN VARLIĞI HAQQINDA

**Y.Ə.MƏMMƏDOV, V.Y.MƏSTƏLİYEV**

### XÜLASƏ

Y.Ə.Məmmədovun [6], [7] işlərində İ.Q.Petrovki mənada korrekt tənliklər üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin qeyri-korrekt ola bilməsi, eləcə də qeyri-korrekt tənliklər üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin korrekt ola bilməsi göstərilmişdir.

Təqdim olunan məqalədə bir sinif kompleks əmsallı tənliklər üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi öyrənilir. Müəyyən vaxtdan sonra parabolik tipdən Şredinger tipinə və hətta antiparabolik tipə keçmələrinə baxmayaraq tənliklər özlərini parabolik tənlik kimi aparırlar.

**Açar sözlər:** Fundamental həll, asimptotika, analitik funksiya, kəsilməz diferensiallanan funksiya, asimptotik düstur, paraboliklik, spektral məsələ, Koşi məsələsi, operator

## ON THE EXISTENCE OF THE SOLUTION OF A MIXED POBLEM FOR ONE CLASS OF EQUATION WITH TYPICAL DEGENERATION

**Yu.A.MAMMADOV, V.Yu.MASTALIYEV**

### SUMMARY

In works [6], [7] it is shown that the mixed problems for the equations correct on I. G. Petrovsky can appear incorrect, and for the incorrect equations can be correct. In this paper, we study the existence and uniqueness of the solution of a mixed problem for a class of equations with complex-valued coefficients behaving as parabolic, despite the fact that over time they can move from the parabolic type to the Schrödinger type, or even to the antiparabolic type.

**Keywords:** Fundamental Solution, asymptotics, analytical function, continuous differentiation, asymptotic formula, parabolic equations, spectral problem, Cauchy problem, operator

*Поступила в редакцию: 07.12.2018 г.*
*Подписано к печати: 08.04.2019 г.*