BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2019*

УДК 517.977

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА-ДАРБУ ПРИ НАЛИЧИИ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

К.Б.МАНСИМОВ[*, **], В.А.СУЛЕЙМАНОВА[***]

[*]Бакинский Государственный Университет

[**]Институт Систем Управления НАН Азербайджана

[***]Сумгаитский Государственный Университет

kamilbmansimov@gmail.com

Рассматривается одна граничная задача управления системами Гурса-Дарбу при наличии негладких функциональных ограничений типа неравенств на состояние системы. Получено необходимое условие оптимальности в терминах производной по направлениям.

Ключевые слова: система Гурса-Дарбу, производная по направлениям, необходимое условие оптимальности, граничное управление.

Среди задач оптимального управления системами с распределенными параметрами наиболее разработанной является задачи оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Разработка теории необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления системами Гурса-Дарбу начался с работ [1, 2] и др. А.И. Егорова. В дальнейшем появились работы С.С. Ахиева и К.Т. Ахмедова [3], К.К. Гасанова [4], M.B. Suryanarayana [5], В.И. Плотникова и В.И. Сумина [6], В.И. Сумина [7], Т.К. Меликова [8], В.А. Якубовича и А.С. Матвеева [9], О.В. Васильева [10], В.А. Срочко [11], К.Б. Мансимова [12], И.В. Лисаченко и И.В. Сумина [13] и др.

Обзор соответствующих результатов имеется в работах [14-18] и др.

Предлагаемая статья посвящена выводу необходимого условия оптимальности в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу при наличии негладких функциональных ограничений типа неравенств на состояние системы.

Постановка задачи оптимального управления

Предположим, что требуется найти минимум функционала

$$S_0(u)=\varphi_0(z(t_1,x_1))+\Phi_0(a(t_1)) \tag{1}$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in[t_0,t_1]=T, \tag{2}$$

$$S_i(u)=\varphi_i(z(t_1,x_1))+\Phi_i(a(t_1))\le 0,\quad i=\overline{1,p}, \tag{3}$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f(t,x,z,z_x),\quad (t,x)\in D=T\times X=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \tag{4}$$

$$\begin{aligned} z(t,x_0)&=a(t),\quad t\in T,\\ z(t_0,x)&=b(x),\quad x\in X. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\varphi_z(z)$, $\Phi_i(a)$, $i=\overline{0,p}$ – заданные скалярные функции удовлетворяющие условию Липщица и имеющие производные по любому направлению, $B(t,x)$ – заданная непрерывная в D – $(n\times n)$-мерная матричная функция, $f(t,x,z,z_x)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная в $D\times R^n\times R^n$ вместе с частными производными по z, z_t, $b(x)$ – заданная абсолютно непрерывная в X n-мерная вектор-функция, а $a(t)$ – абсолютно непрерывная вектор-функция, определяемая как абсолютно непрерывное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot a&=F(t,a,u),\quad t\in T,\\ a(t_0)&=a_0, \end{aligned} \tag{6}$$

при помощи выбора r-мерной управляющей функции $u=u(t)$.

Здесь $F(t,a,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная в $T\times R^n\times R^\kappa$ вместе с $F_a(t,a,u)$.

Предполагается, что управляющая функция $u(t)$ измерима, ограничена и удовлетворяет ограничению

$$u(t)\in U\subset R^n,\quad t\in T, \tag{7}$$

где U – заданное непустое и ограниченное множество.

Каждую управляющую функцию с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $(a(t),z(t,x))$ краевой задачи (4)-(6).

Допустимое управление доставляющая минимум функционалу (1) при ограничениях (1)-(6) назовем оптимальным управлением.

Необходимое условие оптимальности

Пусть $(u(t),a(t),z(t,x))$ есть фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar{u}(t)=u(t)+\Delta u(t),\ \bar{a}(t)=a(t)+\Delta a(t),\ \bar{z}(t,x)=z(t,x)+\Delta z(t,x))$ обозначим произвольный допустимый процесс.

Тогда приращение $(\Delta a(t),\Delta z(t,x))$ состояния $(a(t),z(t,x))$ будет удовлетворять краевой задаче

$$\Delta z_{tx}=B(t,x)\Delta z_t+f(t,x,\bar{z},\bar{z}_x)-f(t,x,z,z_x),\quad (t,x)\in D, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\Delta z(t,x_0)=\Delta a(t),\quad t\in T,\\ \Delta z(t_0,x)=0,\quad x\in X,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\Delta\dot{a}=F(t,\bar{a},\bar{u})-F(t,a,u),\quad t\in T, \tag{10}$$

$$\Delta a(t_0)=0. \tag{11}$$

В силу гладкости вектор-функции $f(t,x,z,z_x)$ $(F(t,a,u))$ по (z,z_x), (a) используя формулу Тейлора получаем, что $(\Delta a(t),\Delta z(t,x))$ является решением линеаризованной краевой задачи

$$\Delta\dot{a}(t)=F_a(t,a(t),u(t))\Delta a(t)+\Delta_{\bar{u}(t)}F(t,a(t),u(t))+\eta_1(t;\Delta u), \tag{12}$$

$$\Delta a(t_0)=0, \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\Delta z_{tx}=B(t,x)\Delta z_t+f_z(t,x,z,z_x)\Delta z+f_{z_x}(t,x,z,z_x)\Delta z_x(t,x)+\\ +o_2(\|\Delta z\|+\|\Delta z_x\|),\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\Delta z(t,x_0)=\Delta a(t),\quad t\in T,\\ \Delta z(t_0,x)=0,\quad x\in X.\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь, и в дальнейшем по определению

$$\Delta_{\bar{u}(t)}F(t,a(t),u(t))\equiv F(t,a(t),\bar{u}(t))-F(t,a(t),u(t)),$$

$$\eta_1(t;\Delta u)=\Delta_{\bar{u}(t)}F_a(t,a(t),u(t))\Delta a(t)+o_1(\|\Delta a(t)\|).$$

Интерпретируя уравнения (12), (14) как линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений, на основе формул о представлении решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных гиперболических дифференциальных уравнений (см. напр. [19, 20]) имеем

$$\Delta a(t)=\int_{t_0}^{t}R_1(t,\tau)\Delta_{\bar{u}(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))d\tau+\eta_2(t;\Delta u), \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}R_2(\tau,x_0;\tau,s)\left[\Delta\dot{a}(\tau)-f_{z_x}(\tau,x_0,z(\tau,x_0),z_x(\tau,x_0))\Delta a(\tau)\right]d\tau+\\ +\eta_3(t,x;\ \Delta u).\end{gathered} \tag{17}$$

Здесь по определению

$$\eta_2(t;\Delta u(t))=\int_{t_0}^{t}R_1(t,\tau)\eta_1(\tau;\Delta u(\tau))d\tau,$$

$$\eta(t,x;\Delta u)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R_2(t,x;\tau,s)o_2(\|\Delta z(\tau,s)\|+\|\Delta z_s(\tau,s)\|)ds\,d\tau.$$

С учетом (16) из представления (17) получим

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}R_2(t,x;\,\tau,x_0)\big[F_a(\tau,a(\tau),u(\tau))\Delta a(\tau)+\Delta_{\overline{u}(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))+$$

$$+\eta_1(\tau;\Delta u)-f_{z_x}(t,x_0,z(\tau,x_0),z_s(\tau,x_0))\Delta a(\tau)\big]+\eta_3(t,x;\Delta u)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}R(t,x;\,\tau,x_0)\big[F_a(\tau,a(\tau),u(\tau))-f_{z_x}(t,x_0,z(\tau,x_0),z_s(\tau,x_0))\big]\Delta a(\tau)d\tau+ \quad (18)$$

$$+\int_{t_0}^{t}R_2(t,x;\,\tau,x_0)\Delta_{\overline{u}(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t}R_2(t,x;\,\tau,x_0)\eta_1(\tau;\Delta u)d\tau+$$

$$+\eta_3(t,x;\Delta u).$$

Из представления (16) ясно, что

$$\Delta a(\tau)=\int_{t_0}^{\tau}R_1(\tau,s)\Delta_{\overline{u}(s)}F(s,a(s),u(s))ds+\eta_2(\tau;\Delta u). \quad (19)$$

Следовательно, получаем, что

$$\Delta z(t,x)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{\tau}R_2(t,x;\,\tau,x_0)\big[F_a(\tau,a(\tau),u(\tau))-f_{z_x}(t,x_0,z(\tau,x_0),z_s(\tau,x_0))\big]\times\right.$$

$$\left.\times R_1(\tau,s)\Delta_{\overline{u}(s)}F(s,a(s),u(s))ds\right]d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}R_2(t,x;\,\tau,x_0)\big[F_a(\tau,a(\tau),u(\tau))-f_{z_x}(t,x_0,z(\tau,x_0),z_s(\tau,x_0))\big]\eta_2(\tau;\Delta u(\tau))d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}R_2(t,x;\,\tau,x_0)\Delta_{\overline{u}(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))d\tau+\eta_3(t,x;\Delta u). \quad (20)$$

Положим

$$\eta_4(t,x;\Delta u)=\eta_3(t,x;\Delta u)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}R_2(t,x;\,\tau,x_0)\big[F_a(\tau,a(\tau),u(\tau))-f_{z_x}(t,x_0,z(\tau,x_0),z_s(\tau,x_0))\big]\eta_2(\tau;\Delta u(\tau))d\tau,$$

$$Q(t,x,\tau)=$$

$$=\int_{\tau}^{t} R_2(t,x;\, s,x_0)\left[F_a(s,a(s),u(s))-f_{z_x}(s,x_0,z(s,x_0),z_s(s,x_0))\right]R_1(\tau,s)ds+$$

$$+R_2(t,x;\,\tau,x).$$

Тогда используя теорему Дирихле [21] представление (20) записывается в виде

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t} Q(t,x,\tau)\Delta_{\bar{u}(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))d\tau+\eta_4(t,x;\Delta u). \qquad (21)$$

Из представлений (3), (21) следует, что

$$\Delta a(t_1)=\int_{t_0}^{t_1} R_1(t_1,t)\Delta_{\bar{u}(t)}F(t,a(t),u(t))dt+\eta_2(t_1;\Delta u), \qquad (22)$$

$$\Delta z(t_1,x_1)=\int_{t_0}^{t_1} Q(t_1,x;\,t)\Delta_{\bar{u}(t)}F(t,a(t),u(t))dt+\eta_4(t_1,x_1;\Delta u). \qquad (23)$$

Пусть $\theta\in[t_0,t_1)$ произвольная точка Лебега (правильная точка) (см. напр. [ ]) управления $u(t)$, $v\in U$ произвольный вектор, а $\varepsilon>0$ – достаточно малое, произвольное число такое, что $\theta+\varepsilon<t_1$. Специальное приращение допустимого управления $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t)=\begin{cases} v-u(t), & t\in[\theta,\theta+\varepsilon),\\ 0, & t\in T\setminus[\theta,\theta+\varepsilon). \end{cases} \qquad (24)$$

Через $(\Delta a(t;\,\varepsilon),\Delta z(t,x;\,\varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $(a(t),z(t,x))$ отвечающее приращению (24) управления $u(t)$.

Из оценок приведенные, например в [15, 16, 17] следует, что

$$\|\Delta a(t;\,\varepsilon)\|\le L\varepsilon,\quad t\in T,$$

$$\|\Delta z(t,x;\,\varepsilon)\|\le L\varepsilon,\quad (t,x)\in D,$$

$$\|\Delta_x z(t,x;\,\varepsilon)\|\le L\varepsilon,\quad (t,x)\in D.$$

С учетом этих оценок из (22), (23) получаем, что

$$\Delta a(t_1;\varepsilon)=\varepsilon\,\ell(v,\theta)+o(\varepsilon), \qquad (25)$$

$$\Delta z(t_1,x_1;\varepsilon)=\varepsilon\,L(v,\theta)+o(\varepsilon), \qquad (26)$$

где по определению

$$\ell(v,\theta)=R_1(t_1,\theta)\Delta_v F(\theta,a(\theta),u(\theta)),$$

$$L(v,\theta)=R_1(t_1,\,x_1;\theta)\Delta_v F(\theta,a(\theta),u(\theta)).$$

Положим

$$I(u)=\{i:\ \Phi_i(a(t_1))+\varphi_i(z(t_1,x_1))=0,\ i=\overline{1,p}\},$$

$$J(u) = \{0\} \cup I(u).$$

Не нарушая общности предположим, что

$$I(u) = \{1, 2, ..., m\}, \quad (m \le p).$$

Имеет место

Теорема. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1)-(6) необходимо, чтобы неравенство

$$\max_{i \in J(u)} \left[\frac{\partial \varphi_i(z(t_1, x_1))}{\partial L(\theta, v)} + \frac{\partial \Phi_i(a(t_1))}{\partial \ell(\theta, v)} \right] \ge 0 \tag{27}$$

выполнялось для всех $v \in U \ \ \theta \in [t_0, t_1)$.

Доказательство. Допустим обратное. Пусть управление $u(t)$ оптимальное, но существуют $\bar{\theta} \in [t_0, t_1)$ и $\bar{v} \in U$ такие, что

$$\max_{i \in J(u)} \left[\frac{\partial \varphi_i(z(t_1, x_1))}{\partial L(\bar{\theta}, \bar{v})} + \frac{\partial \Phi_i(a(t_1))}{\partial \ell(\bar{\theta}, \bar{v})} \right] < 0. \tag{28}$$

Специальное приращение управления $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \begin{cases} \bar{v} - u(t), & t \in [\bar{\theta}, \bar{\theta} + \varepsilon), \\ 0, & t \in T \setminus [\bar{\theta}, \bar{\theta} + \varepsilon). \end{cases} \tag{29}$$

Тогда из (25), (26) получаем, что

$$\Delta a(t_1; \varepsilon) = \varepsilon\, \ell(\bar{\theta}, \bar{v}) + o(\varepsilon), \tag{30}$$

$$\Delta z(t_1, x_1; \varepsilon) = \varepsilon\, L(\bar{\theta}, \bar{v}) + o(\varepsilon). \tag{31}$$

Пусть $i \in I(u)$. Тогда учитывая формулы (30), (31) в силу ( ) получаем, что

$$S_i(u(t) + \Delta u_\varepsilon(t)) - S_i(u(t)) = \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_i(z(t_1, x_1))}{\partial L(\bar{\theta}, \bar{v})} + \frac{\partial \Phi_i(a(t_1))}{\partial \ell(\bar{\theta}, \bar{v})} \right] + o(\varepsilon) < 0. \tag{32}$$

Пусть теперь $i \in \{\overline{1, p}\} \setminus I(u)$. Тогда в силу непрерывности функций $\varphi_i(z)$, $\Phi_i(a)$, получаем, что

$$S_i(\Delta u_\varepsilon(t)) = S_i(u(t)) + \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_i(z(t_1, x_1))}{\partial L(\bar{\theta}, \bar{v})} + \frac{\partial \Phi_i(a(t_1))}{\partial \ell(\bar{\theta}, \bar{v})} \right] + o(\varepsilon) < 0. \tag{33}$$

Неравенства (32), (33) показывается, что управление $(u(t) + \Delta u_\varepsilon(t))$ является допустимым управлением.

При этом в силу предположения ( ) имеем

$$S_0(u(t) + \Delta u_\varepsilon(t)) < S_0(u(t)).$$

А это противоречить оптимальности допустимого управления $u(t)$. Теорема доказана.

Замечание. Полученный результат носит довольно общий характер. Из него, при различных предположениях можно получить ряд конкретных условий оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика, 1964, № 5, с. 613-623.
2. Егоров А.И. Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами // Математический сборник. 1966, т. 69, № 3, с. 371-421.
3. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Необходимые условия оптималь-ности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН Азерб. ССР. 1972, № 5, с. 12-16.
4. Гасанов К.К. О существовании оптимальных управлений для процессов, описываемых системой гиперболических уравнений // Журн. Вычисл. Матем. и матем. физики. 1972, № 1, с. 61-72.
5. Suryanarayana M.B., Necessary conditions for optimization problems with hyperbolic partial equations // SIAM Journ. Control. 1973, vol. 21, № 3, pp. 130-137.
6. Плотников В.И., Сумин. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса-Дарбу // Журнал Вычисл. мат. и мат. физики. 1972, № 1, с. 61-72.
7. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Н/Н. Изд-во ННГУ, 1992, 110 с.
8. Меликов Т.К. Необходимые условия оптимальности в некоторых задачах оптимального управления // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени д-ра физ.-мат. наук. Баку, 2005, 42 с.
9. Якубович В.А., Матвеев А.С. Оптимальное управление некоторыми системами с распределенными параметрами // Сиб. матем. журн. 1978, № 5, с. 1109-1140.
10. Васильев О.В. Качественные и конструктивные методы оптимизации систем с распределенными параметрами // Автореф. дисс. на соиск. ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Ленинград. 1984, 42 с.
11. Срочко В.А. Условия оптимальности типа принципа максимума в системах Гурса-Дарбу // Сиб. матем. журн. 1984, № 2, с. 56-65.
12. Мансимов К.Б. К оптимальности особых, в классическом смысле, управлений в системах Гурса-Дарбу // Докл. АН СССР. 1986, т. 286, № 4, с. 808-812.
13. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса-Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // Вестн. Удмуртск. Ун-та. Сер. Матем. Мех. Компьютерные науки. 2011, № 2, с. 52-57.
14. Меликов Т.К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2003, 96 с.
15. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Часть I. Новосибирск: Наука, 1990, 190 с.
16. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск: ИГУ, 1989, 160 с.
17. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку, ЭЛМ. 2010, 363 с.
18. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка для систем с распределенными параметрами // Препринт ИМ АН БССР. № 31(156). Минск, 1982, 32 с.
19. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: БГУ, 1973, 256 с.

20. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Об интегральном представлении решений некоторых дифференциальных уравнений // Изв. АН Азерб. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1973, № 2, с. 116-120.
21. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 750 с.

BƏRABƏRSİZLİK TİPLİ FUNKSİONAL MƏHDUDİYYƏT OLAN HALDA QURSA-DARBU SİSTEMLƏRİ İLƏ SƏRHƏD İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRT

K.B.MƏNSİMOV, V.A.SÜLEYMANOVA

XÜLASƏ

İşdə Qursa-Darbu sistemləri ilə sərhəd optimal idarəetmə məsələsində, prosesin vəziyyətinə bərabərsizlik tipli funksional məhdudiyyət olan halda optimallıq üçün istiqamət üzrə törəmə terminində zəruri şərt alınmışdır.

Açar sözlər: Qursa-Darbu sistemi,optimallıq üçün zəruri şərt, istiqamət üzrə törəmə, sərhəd idarəsi.

NECESSARY CONDITION OF OPTIMALITY IN ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF CONTROL SYSTEMS OF GOURSAT-DARBOUX EQUATIONS IN THE PRESENCE OF A NONSMOOTH FUNCTIONAL INEQUALITY CONSTRAINTS

K.B.MANSIMOV, V.A.SULEYMANOVA

SUMMARY

We consider one boundary value problem of control of Goursat-Darboux systems in the presence of non-smooth functional constraints such as inequalities on the state of the system. The necessary optimality condition in terms of the derivative in the directions is obtained.

Keywords: Goursat-Darboux system, necessary optimality condition, directions derivative, boundary control.

Поступила в редакцию: 15.11.2018 г.
Подписано к печати: 08.04.2019 г.