BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

УДК 532.5

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА МЕТОДОМ РЕЛАКСАЦИИ

Н.А.АЛИЕВ[1], О.З.НАМАЗОВ[2], Р.М.ТАГИЕВ[3]

[1]Институт Прикладной Математики,
Бакинский Государственный Университет
[2]Сумгаитский Государственный Университет
orxan-namazov-1989@mail.ru
[3]Бакинский Университет Бизнеса
tagiyev.reshad@gmail.ru

Рассматривается граничная задача для системы гиперболических уравнений, описывающих движение газа и жидкой смеси (ГЖС) в кольцевом пространстве и подъемнике методом релаксации в газлифтном процессе. Показано, что для граничных задач существует только одно решение и начальные условия не могут быть произвольными, другими словами, они зависят от выбора граничных условий. Впервые в процессе газлифта решение краевой задачи приведено по порядку с использованием метода релаксации.

Ключевые слова: газлифт, гиперболические уравнения, дифференциальные уравнения, метод релаксации, интегральные уравнения.

Как известно [1-3], метод фонтана является начальным методам эксплуатации нефтяных скважин. В этом случае масса попадает на поверхность земли за счет внутренней энергии пласта [2].

По истечении определенного периода времени запас энергии уменьшается, а добыча нефти прекращается. После завершения метода фонтана, чтобы восстановить этот метод, в скважину извне закачивается сжиженный газ. Газ заполняет нефть, в результате чего нефть становится легкой и выходит на поверхность. Устройства, которые используют природный газ таким способом, называются газлифтными. Одним из важнейших этапов добычи нефти является газлифт. Разработаны различные математические модели, описывающие движение в газлифтном процессе [4-6] и с их помощью были поставлены различные задачи, такие, как достижение максимальной добычи нефти закачиванием минимум газа [2], определение коэффициента гидравлического сопротивления и т.д.

В работе рассматривается случай с введением малого параметра в уравнения движения, так как малый параметр является обратным к глубине скважины. Исследуется существование решения по уравнениям движения [10-12] и показано, что невозможно было определить коэффициенты положительных степеней параметров ε при решении этого вопроса через граничные условия.

Поэтому решение дается в виде последовательностей с помощью отрицательных степеней параметра ε.

Постановка задачи: Известно [1], что система дифференциальных уравнений гиперболического типа с частными производными, характеризующая движение газожидкостной смеси в подъемной трубе в газлифтном процессе, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_i(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{c_i^2}{F_i}\cdot\dfrac{\partial Q_i(x,t)}{\partial x}, & i=1,2 \\ \dfrac{\partial Q_i(x,t)}{\partial t} = -F_i\dfrac{\partial P_i(x,t)}{\partial x} - 2a_iQ_i(x,t), & t>0,\ \ x\in(0,2l) \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $P_i(x,t)$- давление закачиваемого в скважину газа (газожидкостной смеси в подъемной трубе), $Q_i(x,t)$- объем газа, $c_i -$ скорость звука, $l-$ глубина скважины, а параметр $a_i -$ находится с помощью выражения $2a_i = \dfrac{g}{\omega_c} + \dfrac{\lambda\omega}{2D}$. В этом выражении $\lambda-$коэффициент гидравлического сопротивления, $g-$ ускорение свободного падения, $D-$ эффективный диаметр кольцевого пространства и подъемника (i=1,2). Соответственно индексы 1 и 2 являются параметрами, которые описывают движение в кольцевом пространстве и подъемной трубе.

Если мы решим систему уравнений (1) с помощью метода прямых и захотим определить объем и давление газо-жидкостной смеси в каждой точке, то число уравнений в системе дифференциальных уравнений будет чрезмерно большим, что приведет к серьезным ошибкам в компьютерных вычислениях. По этой причине давайте посмотрим на проблему, включив параметр ε в метод релаксации. Другими словами, в системе (1) мы рассматриваем значение глубины скважины как малый параметр $\varepsilon = \dfrac{1}{2l}$ и пользуемся заменой $z = \dfrac{x}{2l} = \varepsilon x$ [10]. В результате из (1) мы получаем следующую систему уравнений:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial P_i(z,t,\varepsilon)}{\partial t} = -\dfrac{c_i^2}{F_i}\cdot\dfrac{\partial Q_i(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\varepsilon, \\
\dfrac{\partial Q_i(z,t,\varepsilon)}{\partial t} = -F_i\dfrac{\partial P_i(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\varepsilon - 2a_i Q_i(z,t,\varepsilon).
\end{cases} \tag{2}
$$

Рассмотрим решение системы уравнений (2) в рамках следующих граничных условий [13,14]:

$$
\begin{cases}
P(0,t,\varepsilon) = P^0(t,\varepsilon), \\
Q(0,t,\varepsilon) = Q^0(t,\varepsilon),
\end{cases}
$$

Разложим функции $P^0(t,\varepsilon)$ и $Q^0(t,\varepsilon)$ в ряд по степеням ε [15]:

$$
\begin{cases}
P^0(t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{-\infty} P_k(t)\varepsilon^k, \\
Q^0(t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{-\infty} Q_k(t)\varepsilon^k,
\end{cases} \tag{3}
$$

Также, как и в системе (3) напишем разложиные ращения системы уравнений (2) по ε:

$$
\begin{cases}
P(z,t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{-\infty} P_k(z,t)\varepsilon^k, \\
Q(z,t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{-\infty} Q_k(z,t)\varepsilon^k.
\end{cases} \tag{4}
$$

Если учесть систему (4) в системе уравнений (2), то получим:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{k=0}^{-\infty}\dfrac{\partial P_k(z,t)}{\partial t}\varepsilon^k + \dfrac{c^2}{F}\sum\limits_{k=0}^{-\infty}\dfrac{\partial Q_k(z,t)}{\partial z}\varepsilon^{k+1} = 0, \\
\sum\limits_{k=0}^{-\infty}\dfrac{\partial Q_k(z,t)}{\partial t}\varepsilon^k + F\sum\limits_{k=0}^{-\infty}\dfrac{\partial P_k(z,t)}{\partial z}\varepsilon^{k+1} + 2a\sum\limits_{k=0}^{-\infty} Q_k(z,t)\varepsilon^k = 0.
\end{cases} \tag{5}
$$

Представляем ряды входящийся в системе (5) раскрутим виде, имеем:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial P_0(z,t)}{\partial t}\varepsilon^0 + \dfrac{\partial P_{-1}(z,t)}{\partial t}\varepsilon^{-1} + \dfrac{\partial P_{-2}(z,t)}{\partial t}\varepsilon^{-2} + \dfrac{\partial P_{-3}(z,t)}{\partial t}\varepsilon^{-3} + \ldots + \\
+\dfrac{c^2}{F}\left(\dfrac{\partial Q_0(z,t)}{\partial z}\varepsilon + \dfrac{\partial Q_{-1}(z,t)}{\partial z}\varepsilon^0 + \dfrac{\partial Q_{-2}(z,t)}{\partial z}\varepsilon^{-1} + \dfrac{\partial Q_{-3}(z,t)}{\partial z}\varepsilon^{-2} + \ldots\right) = 0, \\
\dfrac{\partial Q_0(z,t)}{\partial t}\varepsilon^0 + \dfrac{\partial Q_{-1}(z,t)}{\partial t}\varepsilon^{-1} + \dfrac{\partial Q_{-2}(z,t)}{\partial t}\varepsilon^{-2} + \dfrac{\partial Q_{-3}(z,t)}{\partial t}\varepsilon^{-3} + \ldots + \\
+F\left(\dfrac{\partial P_0(z,t)}{\partial z}\varepsilon + \dfrac{\partial P_{-1}(z,t)}{\partial z}\varepsilon^0 + \dfrac{\partial P_{-2}(z,t)}{\partial z}\varepsilon^{-1} + \dfrac{\partial P_{-3}(z,t)}{\partial z}\varepsilon^{-2} + \ldots\right) + \\
2a\left(Q_0(z,t)\varepsilon^0 + Q_{-1}(z,t)\varepsilon^{-1} + Q_{-2}(z,t)\varepsilon^{-2} + Q_{-3}(z,t)\varepsilon^{-3} + \ldots\right) = 0,
\end{cases} \tag{6}
$$

Если напишем, слагаемы соответствующее параметру ε^1, то получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_0(z,t)}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial P_0(z,t)}{\partial z} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_0(z,t) = \tilde{Q}_0(t), \\ P_0(z,t) = \tilde{P}_0(t), \end{cases} \tag{7}$$

Если напишем, слагаемы, соответствующее параметру ε^0, то получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_0(z,t)}{\partial t} + \dfrac{c^2}{F}\dfrac{\partial Q_{-1}(z,t)}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial Q_0(z,t)}{\partial t} + F\dfrac{\partial P_{-1}(z,t)}{\partial z} + 2aQ_0(z,t) = 0. \end{cases}$$

Если найти производные $\dfrac{\partial Q_{-1}(z,t)}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial P_{-1}(z,t)}{\partial z}$, а затем интегрировать их по z, то получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{-1}(z,t)}{\partial z} = -\dfrac{F}{c^2}\tilde{P}_0'(t), \\ \dfrac{\partial P_{-1}(z,t)}{\partial z} = -\dfrac{1}{F}\tilde{Q}_0'(t) - \dfrac{2a}{F}\tilde{Q}_0(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_{-1}(z,t) = \tilde{Q}_{-1}(t) - \dfrac{F}{c^2}\tilde{P}_0'(t)z, \\ P_{-1}(z,t) = \tilde{P}_{-1}(t) - \left(\dfrac{1}{F}\tilde{Q}_0'(t) + \dfrac{2a}{F}\tilde{Q}_0(t)\right)z. \end{cases} \tag{8}$$

Напишем член, соответствующий параметру ε^{-1}:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{-2}(z,t)}{\partial z} = -\dfrac{F}{c^2}\dfrac{\partial P_{-1}(z,t)}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial P_{-2}(z,t)}{\partial z} = -\dfrac{1}{F}\dfrac{\partial Q_{-1}(z,t)}{\partial t} - \dfrac{2a}{F}Q_{-1}(z,t). \end{cases} \tag{9}$$

Если определить $\dfrac{\partial Q_{-1}(z,t)}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial P_{-1}(z,t)}{\partial t}$ из (8) и учесть их в (9), получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{-2}(z,t)}{\partial z} = -\dfrac{F}{c^2}\tilde{P}_{-1}'(t) + \dfrac{1}{c^2}\tilde{Q}_0''(t)\,z + \dfrac{2a}{c^2}\tilde{Q}_0'(t)\,z, \\ \dfrac{\partial P_{-2}(z,t)}{\partial z} = -\dfrac{1}{F}\tilde{Q}_{-1}'(t) + \dfrac{1}{c^2}\tilde{P}_0''(t)\,z - \dfrac{2a}{F}\left(\tilde{Q}_{-1}(t) - \dfrac{F}{c^2}\tilde{P}_0'(t)\,z\right) \end{cases} \tag{10}$$

Проинтегрируем полученное выражение (10) по z:

$$\begin{cases} Q_{-2}(z,t) = -\dfrac{F}{c^2}\tilde{P}_{-1}'(t)z + \dfrac{1}{c^2}\tilde{Q}_0''(t)\dfrac{z^2}{2} + \dfrac{2a}{c^2}\tilde{Q}_0'(t)\dfrac{z^2}{2} + \tilde{Q}_{-2}(t), \\ P_{-2}(z,t) = -\dfrac{1}{F}\tilde{Q}_{-1}'(t)z + \dfrac{1}{c^2}\tilde{P}_0''(t)\dfrac{z^2}{2} + \tilde{P}_{-2}(t) - \dfrac{2a}{F}\tilde{Q}_{-1}(t)z + \dfrac{2a}{c^2}\tilde{P}_0'(t)\dfrac{z^2}{2}. \end{cases} \tag{11}$$

Теперь по вышеприведенному правилу прогруппируем члены, соответствующие ε^{-2} и проравняем их коэффициенты нулю, тогда получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{-2}(z,t)}{\partial t} + \dfrac{c^2}{F}\dfrac{\partial Q_{-3}(z,t)}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial Q_{-2}(z,t)}{\partial t} + F\dfrac{\partial P_{-3}(z,t)}{\partial z} + 2aQ_{-2}(z,t) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Получим производное от (11) по t:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{-2}(z,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{F}\tilde{Q}''_{-1}(t)z + \dfrac{1}{c^2}\tilde{P}'''_0(t)\dfrac{z^2}{2} + \tilde{P}'_{-2}(t) - \dfrac{2a}{F}\tilde{Q}'_{-1}(t)z + \dfrac{2a}{c^2}\tilde{P}''_0(t)\dfrac{z^2}{2}, \\ \dfrac{\partial Q_{-2}(z,t)}{\partial t} = -\dfrac{F}{c^2}\tilde{P}''_{-1}(t)z + \dfrac{1}{c^2}\tilde{Q}'''_0(t)\dfrac{z^2}{2} + \dfrac{2a}{c^2}\tilde{Q}''_0(t)\dfrac{z^2}{2} + \tilde{Q}'_{-2}(t), \end{cases} \tag{13}$$

Если учесть выражение (13) в (12), то имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{-3}(z,t)}{\partial z} = \dfrac{1}{c^2}\tilde{Q}''_{-1}(t)z - \dfrac{F}{c^4}\tilde{P}'''_0(t)\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{F}{c^2}\tilde{P}'_{-2}(t) + \dfrac{2a}{c^2}\tilde{Q}'_{-1}(t)z - \dfrac{2aF}{c^4}\tilde{P}''_0(t)\dfrac{z^2}{2}, \\ \dfrac{\partial P_{-3}(z,t)}{\partial z} = \dfrac{1}{c^2}\tilde{P}''_{-1}(t)z - \dfrac{1}{Fc^2}\tilde{Q}'''_0(t)\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{2a}{Fc^2}\tilde{Q}''_0(t)\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{1}{F}\tilde{Q}'_{-2}(t) + \dfrac{2a}{c^2}\tilde{P}'_{-1}(t)z - \\ -\dfrac{2a}{c^2F}\tilde{Q}''_0(t)\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{4a^2}{Fc^2}\tilde{Q}'_0(t)\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{2a}{F}\tilde{Q}_{-2}(t). \end{cases} \tag{14}$$

И если проинтегрировать выражение (14) по z, получим:

$$\begin{cases} Q_{-3}(z,t) = \dfrac{1}{c^2}\tilde{Q}''_{-1}(t)\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{F}{c^4}\tilde{P}'''_o(t)\dfrac{z^3}{6} - \dfrac{F}{c^2}\tilde{P}'_{-2}(t)z + \dfrac{2a}{c^2}\tilde{Q}'_{-1}(t)\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{2aF}{c^4}\tilde{P}''_0(t)\dfrac{z^3}{6} + \tilde{Q}_{-3}(t), \\ P_{-3}(z,t) = \dfrac{1}{c^2}\tilde{P}''_{-1}(t)\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{1}{Fc^2}\tilde{Q}'''_0(t)\dfrac{z^3}{6} - \dfrac{2a}{Fc^2}\tilde{Q}''_0(t)\dfrac{z^3}{6} - \dfrac{1}{F}\tilde{Q}'_{-2}(t)z + \dfrac{2a}{c^2}\tilde{P}'_{-1}(t)\dfrac{z^2}{2} - \\ -\dfrac{2a}{c^2F}\tilde{Q}''_0(t)\dfrac{z^3}{6} - \dfrac{4a^2}{Fc^2}\tilde{Q}'_0(t)\dfrac{z^3}{6} - \dfrac{2a}{F}\tilde{Q}_{-2}(t)z + \tilde{P}_{-3}(t), \end{cases}$$

Аналогично этому правилу мы можем определить все $P_{-k}(z,t)$ и $Q_{-k}(z,t)$. А теперь проконструируем алгоритм создания рекуррентной формулы, определяющей параметры $P_{-k}(z,t)$ и $Q_{-k}(z,t)$ для любого члена ряда. Напишем выражения, полученные из коэффициентов ε^{-k+1} с помощью матриц в системе (5) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} Q_{-k} \\ P_{-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{F}{c^2} \\ -\dfrac{1}{F} & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} Q_{-k+1} \\ P_{-k+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{2a}{F} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{-k+1} \\ P_{-k+1} \end{pmatrix}$$

Если провести замены $\begin{pmatrix} Q_{-k} \\ P_{-k} \end{pmatrix} = W_{-k}$, $\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{F}{c^2} \\ -\dfrac{1}{F} & 0 \end{pmatrix} = A$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{2a}{F} & 0 \end{pmatrix} = B$, и проинтегрировать полученные выражения по z, получим:

$$W_{-k}(z,t)=\widetilde{W}_{-k}(t)+A\int_0^z\frac{\partial W_{-k+1}(\xi,t)}{\partial t}d\xi+B\int_0^z W_{-k+1}(\xi,t)d\xi. \qquad (15)$$

Найдя $W_{-k+1}(z,t)$ с помощью замены k на (k-1) и учитывая его в этом уравнении, после некоторых упрощений получим:

$$W_{-k}(z,t)=\chi_1+A^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^z W_{-k+2}(\eta,t)d\eta\int_\eta^z d\xi+(AB+BA)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^z W_{-k+2}(\eta,t)d\eta\int_\eta^z d\xi+$$
$$+B^2\int_0^z W_{-k+2}(\eta,t)d\eta\int_\eta^z d\xi. \qquad (16)$$

Если учитывать, что

$$\chi_1=\widetilde{W}_{-k}(t)+A\widetilde{W}'_{-k+1}(t)\,z+B\widetilde{W}_{-k+1}(t)\,z,$$

и интегрируя внутренние интегралы в (16), получим следующую формулу, соответствующую первой итерации для выражения (15)

$$W_{-k}(z,t)=\chi_1+A^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^z(z-\eta)W_{-k+2}(\eta,t)d\eta+$$
$$+(AB+BA)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^z(z-\eta)W_{-k+2}(\eta,t)d\eta+B^2\int_0^z(z-\eta)W_{-k+2}(\eta,t)d\eta. \qquad (17)$$

А теперь, чтобы определить $W_{-k+2}(z,t)$, соответствующую второй итерации, заменим k на $-k+2$ в выражении (15)

$$W_{-k+2}(\eta,t)=\widetilde{W}_{-k+2}(t)+A\int_0^\eta\frac{\partial W_{-k+3}(\xi,t)}{\partial t}d\xi+B\int_0^\eta W_{-k+3}(\xi,t)d\xi\,.$$

Учитывая это выражение в (17) и проведя некоторые упрощения, получим:

$$W_{-k}(z,t)=\chi_1+A^2\widetilde{W}''_{-k+2}(t)(-1)\frac{(z-\eta)^2}{2!}\bigg|_{\eta=0}^{z}+A^3\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int_0^z W_{-k+3}(\xi,t)d\,\xi\int_\xi^z(z-\eta)d\eta+$$
$$A^2B\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^z W_{-k+3}(\xi,t)d\,\xi\int_\xi^z(z-\eta)d\eta+(AB+BA)\widetilde{W}'_{-k+2}(t)(-1)\frac{(z-\eta)^2}{2!}\bigg|_{\eta=0}^{z}+$$
$$+(AB+BA)A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^z W_{-k+3}(\xi,t)d\,\xi\int_\xi^z(z-\eta)d\eta+ \qquad (18)$$
$$+(AB+BA)B\frac{\partial}{\partial t}\int_0^z W_{-k+3}(\xi,t)d\,\xi\int_\xi^z(z-\eta)d\eta+B^2\widetilde{W}_{-k+2}(t)(-1)\frac{(z-\eta)^2}{2!}\bigg|_{\eta=0}^{z}+$$
$$+B^2A\frac{\partial}{\partial t}\int_0^z W_{-k+3}(\xi,t)d\,\xi\int_\xi^z(z-\eta)d\eta++B^3\int_0^z W_{-k+3}(\xi,t)d\,\xi\int_\xi^z(z-\eta)d\eta.$$

Вычисляя внутренний интеграл, получим:

$$W_{-k}(z,t)=\chi_1+A^2\frac{z^2}{2}\widetilde{W}''_{-k+2}(t)+(AB+BA)\frac{z^2}{2}\widetilde{W}'_{-k+2}(t)+B^2\frac{z^2}{2}\widetilde{W}_{-k+2}(t)+$$
$$+A^3\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial^3 W_{-k+3}(\xi,t)}{\partial t^3}d\xi+A^2B\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial^2 W_{-k+3}(\xi,t)}{\partial t^2}d\xi+ \qquad (19)$$
$$+(AB+BA)A\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial^2 W_{-k+3}(\xi,t)}{\partial t^2}d\xi+(AB+BA)B\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial W_{-k+3}(\xi,t)}{\partial t}d\xi+$$
$$B^2A\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial W_{-k+3}(\xi,t)}{\partial t}d\xi+B^3\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}W_{-k+3}(\xi,t)d\xi/$$

После некоторой группировки (19) можно написать в следующем виде:

$$W_{-k}(z,t)=\chi_1+\left[A^2\widetilde{W}''_{-k+2}(t)+(AB+BA)\widetilde{W}'_{-k+2}(t)+B^2\widetilde{W}_{-k+2}(t)\right]\frac{z^2}{2}+$$
$$+A^2\sum_{n=0}^{1}A^nB^{1-n}\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial^{2+n}W_{-k+3}(\xi,t)}{\partial t^{2+n}}d\xi+$$
$$+(AB+BA)\sum_{n=0}^{1}A^nB^{1-n}\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial^{1+n}W_{-k+3}(\xi,t)}{\partial t^{1+n}}d\xi+$$
$$+B^2\sum_{n=0}^{1}A^nB^{1-n}\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial^{n}W_{-k+3}(\xi,t)}{\partial t^{n}}d\xi=\chi_1+\frac{z^2}{2}\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\right)^2\widetilde{W}_{-k+2}(t)+$$
$$+\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\right)^2\sum_{n=0}^{1}\left(A\frac{\partial}{\partial t}\right)^nB^{1-n}W_{-k+3}(\xi,t)d\xi,$$

Так как $AB\neq BA,$ то

$$\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\right)^2=\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\right)\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\right)=A^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+(AB+BA)\frac{\partial}{\partial t}+B^2.$$

Продолжая вычисления, в (15) можно заменить $-k$ на $-k+3$ и, учитывая это в (19), получим:

$$W_{-k}(z,t)=\chi_1+\chi_2+A^3\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left[\widetilde{W}_{-k+3}(t)+A\int_0^\xi\frac{\partial W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t}d\eta+B\int_0^\xi W_{-k+4}(\eta,t)d\eta\right]d\xi+$$
$$+A^2B\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\widetilde{W}_{-k+3}(t)+A\int_0^\xi\frac{\partial W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t}d\eta+B\int_0^\xi W_{-k+4}(\eta,t)d\eta\right]d\xi+$$
$$+(AB+BA)A\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\widetilde{W}_{-k+3}(t)+A\int_0^\xi\frac{\partial W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t}d\eta+B\int_0^\xi W_{-k+4}(\eta,t)d\eta\right]d\xi+ \qquad (20)$$
$$+(AB+BA)B\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial}{\partial t}\left[\widetilde{W}_{-k+3}(t)+A\int_0^\xi\frac{\partial W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t}d\eta+B\int_0^\xi W_{-k+4}(\eta,t)d\eta\right]d\xi+$$
$$+B^2A\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\frac{\partial}{\partial t}\left[\widetilde{W}_{-k+3}(t)+A\int_0^\xi\frac{\partial W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t}d\eta+B\int_0^\xi W_{-k+4}(\eta,t)d\eta\right]d\xi+$$
$$+B^3\int_0^z\frac{(z-\xi)^2}{2!}\left[\widetilde{W}_{-k+3}(t)+A\int_0^\xi\frac{\partial W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t}d\eta+B\int_0^\xi W_{-k+4}(\eta,t)d\eta\right]d\xi.$$

Здесь $\chi_2 = \frac{z^2}{2!}\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\right)^2 \widetilde{W}_{-k+2}(t)$.

После изменения в (20) последовательности интеграла и после некоторых упрощений, получим:

$$
\begin{aligned}
&W_{-k}(z,t) = \chi_1 + \chi_2 + A^3\widetilde{W}'''_{-k+3}(t)\frac{z^3}{3!} + A^4\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}\frac{\partial^4 W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t^4}d\eta + \\
&+ A^3B\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}\frac{\partial^3 W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t^3}d\eta + A^2B\widetilde{W}'''_{-k+3}(t)\frac{z^3}{3!} + \\
&+ A^2BA\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}\frac{\partial^3 W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t^3}d\eta + A^2B^2\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}\frac{\partial^2 W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t^2}d\eta + \\
&+ (AB+BA)A\widetilde{W}''_{-k+3}(t)\frac{z^3}{3!} + (AB+BA)A^2\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}\frac{\partial^3 W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t^3}d\eta + \\
&+ (AB+BA)AB\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}\frac{\partial^2 W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t^2}d\eta + (AB+BA)B\widetilde{W}'_{-k+3}(t)\frac{z^3}{3!} + \\
&+ (AB+BA)BA\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}\frac{\partial^2 W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t^2}d\eta + (AB+BA)B^2\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}\frac{\partial W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t}d\eta + \\
&+ B^2A\widetilde{W}'_{-k+3}(t)\frac{z^3}{3!} + B^2A^2\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}\frac{\partial^2 W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t^2}d\eta + B^2AB\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}\frac{\partial W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t}d\eta + \\
&+ B^3\widetilde{W}'_{-k+3}(t)\frac{z^3}{3!} + B^3A\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}\frac{\partial W_{-k+4}(\eta,t)}{\partial t}d\eta + B^4\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}W_{-k+4}(\eta,t)d\eta.
\end{aligned} \tag{21}
$$

После некоторых группировок (21) можно написать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
W_{-k}(z,t) = \chi_1 + \chi_2 + \left[\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\right)^3 \widetilde{W}_{-k+3}(t)\right]\frac{z^3}{3!} + \\
+\left[\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!}\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\right)^3 \sum_{n=0}^{1}\left(A\frac{\partial}{\partial t}\right)^n B^{1-n}\widetilde{W}_{-k+4}(\eta,t)\right]d\eta.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Отметим, что этим методом можно определить любой шаг итерации. Основываясь на полученные выражения (16), (20), и (22), можно написать общую рекуррентную формулу в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&W_{-k}(z,t) = \int_0^z \frac{(z-\xi)^k}{k!}\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\right)^k \sum_{n=0}^{1}\left(A\frac{\partial}{\partial t}\right)^n B^{1-n}W_0(\xi,t)d\xi + \\
&+\sum_{m=1}^{k}\frac{z^m}{m!}\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\right)^m \widetilde{W}_{-k+m}(t) + \widetilde{W}_{-k}(t) = \sum_{m=0}^{k}\frac{z^m}{m!}\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\right)^m \widetilde{W}_{-k+m}(t) + \\
&+\int_0^z \frac{(z-\xi)^k}{k!}\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\right)^k \sum_{n=0}^{1}\left(A\frac{\partial}{\partial t}\right)^n B^{1-n}W_0(\xi,t)d\xi.
\end{aligned}
$$

Пример: Предположим, что наши граничные условия следующие:

$$\begin{cases} \tilde{P}(0,t,\varepsilon) = \dfrac{1}{1+t^2} + \varepsilon e^{-t}, \\ \tilde{Q}(0,t,\varepsilon) = \dfrac{1}{1+t} - \varepsilon e^{-2t}, \end{cases}$$

Исходная точка этой последовательности может быт, обобщена следующим образом с использованием системы (3):

$$\tilde{P}_0^0(t) = \frac{1}{1+z^2}, \qquad \tilde{Q}_0^0(t) = \frac{1}{1+t},$$

$$\tilde{P}_{-1}^0(t) = e^{-t}, \qquad \tilde{Q}_{-1}^0(t) = -e^{-2t}.$$

Если полученные результаты будут учтены в системе уравнений (4), решение будет следующим:

$$\begin{cases} \tilde{P}(z,t,\varepsilon) = \dfrac{1}{1+t^2} + \dfrac{1}{\varepsilon}\left[\dfrac{1}{1+t} + \dfrac{F_1}{c_1^2} e^{-t} z\right], \\ \tilde{Q}(z,t,\varepsilon) = \dfrac{1}{1+t} e^{-2t} + \dfrac{1}{\varepsilon}\left[\dfrac{1}{1+t^2} + \dfrac{2e^{-2t}(a_1 - 1)}{F_1} z\right]. \end{cases} \tag{23}$$

Теперь оцениваем полученное здесь решение (23) с решением [6]. Обозначаем решение из [6] через $P(z,t,\varepsilon)$, $Q(z,t,\varepsilon)$. Эта разница более четко видна в следующем таблице и хорошо отражает решение (1).

ε	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$\dfrac{\left\|P(x,t) - \tilde{P}(z,t,\varepsilon)\right\|}{\left\|P(x,t)\right\|}$	1,0074	0,5767	0,5683	0,0057	0,00059
$\dfrac{\left\|Q(x,t) - \tilde{Q}(z,t,\varepsilon)\right\|}{\left\|Q(x,t)\right\|}$	1,0018	1,0017	0,1427	0,0145	0,0014

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Задачи моделирования оптимальной стабилизации газлифтного процесса. Прикладная механика, т. 46, No.6, 2010, с.113-122.
2. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины. Доклады НАН Азербайджана, No.2, 2008, с.107- 115.
3. Шуров В.И. Технология и механика добычи нефти. М.: Недра, 1983.
4. Чарный И.А., Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Гостехиздат, 1951, 389 с.
5. Мирзаджанзаде А.Х. и др., Технология и механика добычи нефти. М.: Наука, 1986, 382с.

6. Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Муталлимов М.М., Тагиев Р.М. Алгоритм построения модели россера для газлифтного процесса при добыче нефти, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, v.3, No.2, 2014, c.173-184
7. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Алгоритм вычисления коэффициента гидравлического сопротивления в газлифтном процессе, Доклады НАН Азерб., No.1, 2014, c.19-22.
8. Гулиев А. П., Тагиев Р.М, Касымова К.Г.. Вычислительный алгоритм для решения краевой задачи гиперболической системы возникающих в задачах газлифтного процесса. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, v.3, No.1, 2014, c.105-111.
9. Aliev, F.A., Ismayilov, N.A. 2013: Inverse Problem to Determine the Hydraulic Resistance Coefficient in the Gas Lift Process. Appl. Comput. Math., v.12, No3, pp. 306-313.
10. Mutallimov M.M., Askerov I.M., Ismailov N.A., Rajabov M.F. 2010: An Asymptotical Method to Construction of a Digital Optimal Regime for the Gaslift Process, Appl. Comput. Math., v.9, No1, pp. 77-84.
11. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A. 2015: Asymptotic Method for Finding the Coefficient of Hydraulic Resistance in Lifting of Fluid on Tubing, Journal of Inverse and Ill Posed Problems, v. 23, Issue 5, pp. 511-518.
12. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Гасымов Ю.С.,Намазов А.А. Об одной задаче идентификации по определению параметров динамических систем. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, v.3, No.2, 2014, c.139-151
13. Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Гулиев А. П., Ильясов М.Х. Метод рядов в решении одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, возникающих при добыче нефти, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, v.2, No.2, 2013, c.113-136
14. Алиев Н.А., Гулиев А.П., Тагиев Р.М. Существование и единственность решения одной краевой задачи, описываемой системой уравнений гиперболического типа , Доклады НАН Азерб., No.2, 2014, c.10-13.
15. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, (1975).

QAZ-LİFT PROSESİNDƏ HİPERBOLİK TİP TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN RELAKSASİYA ÜSULUNA GÖRƏ HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI

N.A.ƏLİYEV, O.Z.NAMAZOV, R.M.TAĞIYEV

XÜLASƏ

Halqavari fəzada və qaldırıcı boruda neft istehsalının qaz-lift prosesinə uyğun qaz və maye qaz qarışığının hərəkətini təsvir edən birinci tərtib ikiölçülü xüsusi törəməli hiperbolik tip diferensial tənliklər sistemi üçün relaksasiya üsulundan isdifadə edərək sərhəd şərtli məsələyə baxılmışdır. Bu məsələdə göstərilmişdir ki, uyğun sərhəd şərtləri daxilində məsələnin yeganə həlli var və başlanğıc şərtləri ixtiyari ola bilməz, başqa sözlə onlar sərhəd şərtlərinin seçilməsindən asılıdırlar. İlk dəfə olaraq qaz-lift prosesində sərhəd məsələsinin həlli relaksasiya üsulundan istifadə edilərək sıralar şəklində verilmişdir.

Açar sözlər: qaz-lift, hiperbolik tənliklər, diferensial tənliklər, relaksasiya üsulu, inteqral tənliklər.

ANALYSIS OF THE SOLUTION OF THE SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS BY THE RELAXATION METHOD IN GAS LIFT PROCESS

N.A.ALIYEV, O.Z.NAMAZOV, R.M.TAGHIYEV

SUMMARY

We consider a boundary value problem for a system of hyperbolic equations describing the motion of gas and liquid mixture (GLM) in the ring space and lift by the method of relaxation in the gas-lift process. It is shown that for boundary value problems there is only one solution and the initial conditions cannot be arbitrary, in other words, they depend on the choice of boundary conditions. Relaxation method is proposed for the solution of the problem.

Key-words: gas-lift, hyperbolic equation, differential equation, relaxation method, integral equation.

Поступила в редакцию: 04.03.2019 г.
Подписано к печати: 08.04.2019 г.