BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2019*

УДК 517.984

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Р.И.АЛЕСКЕРОВ
Гянджинский Государственный Университет
alesgerov.rza@mail.ru

Рассмотрен дискретный оператор Дирака, коэффициенты которого стремятся к различным пределам на $\pm\infty$. Найден явный вид резольвенты этого оператора. Получены формулы разложения по собственным функциям дискретного оператора Дирака.

Ключевые слова: дискретный оператор Дирака, резольвента, собственные функции, формулы разложения.

Пусть $l^2((-\infty,\infty);C)$ – банахово пространство вектор- последовательностей $y=\{y_{1,n},y_{2,n}\}_{-\infty}^{\infty}$ с нормой

$$\|y\|=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(|y_{1,n}|^2+|y_{2,n}|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

таких, что $\|y\|<\infty$. В пространстве $l^2((-\infty,\infty);C)$ рассмотрим оператор L, порожденный системой разностных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,n}y_{2,n+1}+a_{2,n}y_{2,n}=\lambda y_{1,n}, \\ a_{1,n-1}y_{1,n-1}+a_{2,n}y_{1,n}=\lambda y_{2,n}, \ n=0,\pm1,\pm2,..., \end{cases} \tag{1}$$

вещественные коэффициенты $a_{1,n},a_{2,n}$ которой удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,n}>0,\ a_{2,n}<0,\ n=0,\pm1,\pm2,..., \\ \sum\limits_{n\geq1}|n|\left\{|a_{1,n}-A|+|a_{2,n}+A|\right\}+\sum\limits_{n\leq-1}|n|\left\{|a_{1,n}-1|+|a_{2,n}+1|\right\}<\infty \end{array}\right\}, \tag{2}$$

где $A>0$. В силу (2), оператор ограничен и самосопряжен. Заметим, что система разностных уравнений (1) является дискретным аналогом одномерной системы Дирака. В связи с этим оператор L будем называть дискретным оператором Дирака.

Известно, что при изучении различных задачах спектральной теории линейных операторов особый интерес представляют формулы разложения по собственным функциям. В настоящей работе явный вид резольвенты оператора L. Получены формулы разложения по собственным функциям этого оператора. Подобные вопросы для одномерной системы Дирака, уравнения Шредингера и его разностного аналога исследовались в работах $[1]-[4]$. Некоторые вопросы спектральной теории дискретного оператора Дирака изучались в в работах $[5]-[7]$.

Для определенности примем, что $A \le 1$. Обозначим через Γ_j – комплексную λ-плоскость с разрезом по отрезку $\left[-A^{2-j}, A^{2-j}\right]$, $j=1,2$. В плоскости Γ_j рассмотрим функцию

$$z_j = z_j(\lambda) = -\frac{\lambda^2 - 2A^{2(2-j)}}{2A^{2(2-j)}} + \frac{\lambda}{2A^{2-j}}\sqrt{\lambda^2 - 4A^{2(2-j)}},$$

выбирая регулярную ветвь радикала такую, что $\sqrt{\lambda^2 - 4A^{2(2-j)}} > 0$ при $\lambda > 2A^{2-j}$, $j=1,2$. Известно, что система уравнения (1) имеет решения $\left\{f_{j,n}^{\pm}(\lambda)\right\}$, $j=1,2$, представимые в виде

$$\left.\begin{aligned} f_{j,n}^{+}(\lambda) &= \alpha_j^{+}(n)\left(\frac{Az_1 - A}{\lambda}\right)^{2-j} z_1^n\left(1+\sum_{m\ge 1} K_j^{+}(n,m) z_1^m\right), \\ f_{j,n}^{-}(\lambda) &= \alpha_j^{-}(n)\left(\frac{z_2^{-1}-1}{\lambda}\right)^{2-j} z_2^{-n}\left(1+\sum_{m\le -1} K_j^{-}(n,m) z_2^{-m}\right),\ n = 0,\pm1,\pm2,\ldots, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

причем величины $\alpha_1^{\pm}(n), \alpha_2^{\pm}(n), K_1^{\pm}(n,m), K_2^{\pm}(n,m)$ удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_j^{\pm}(n) = 1 + o(1) \ \text{при}\ n \to \pm\infty,\ j=1,2, \\ &K_j^{\pm}(n,m) = O\left(\sigma^{\pm}\left(n + \left[\frac{m}{2}\right] + \frac{1\mp1}{2}\right)\right), n+m \to \pm\infty \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

где $\sigma^{\pm}(n) = \sum_{\pm m \ge \pm n}\left\{\left|a_{1,m} - A^{\frac{1\pm1}{2}}\right| + \left|a_{2,m} + A^{\frac{1\pm1}{2}}\right|\right\}$, $[x]$- целая часть x. Согласно (3), (4) при каждом n функции $\left\{f_{j,n}^{+}(\lambda)\right\}$ и $\left\{f_{j,n}^{-}(\lambda)\right\}$, $j=1,2$, регулярны в плоскостях Γ_1 и Γ_2, непрерывны вплоть до их границ $\partial\Gamma_1$ и $\partial\Gamma_2$, соответственно.

Пусть $u_{j,n}$ и $v_{j,n}$ - два решения системы уравнений (1). Их вронскианом назовем величину $\{u_{j,n}, v_{j,n}\} = a_{1,n-1}\left(u_{1,n-1}v_{2,n} - u_{2,n}v_{1,n-1}\right)$. Положим $w(\lambda) = \left\{f_{j,n}^{+}(\lambda), f_{j,n}^{-}(\lambda)\right\}$.

Теорема 1. *Функции*

$$R_{nm}(\lambda)=\begin{pmatrix} R_{nm}^{11} & R_{nm}^{12} \\ R_{nm}^{21} & R_{nm}^{22} \end{pmatrix},\ R_{nm}^{ij}=-w^{-1}(\lambda)\begin{cases} f_{i,n}^{+}(\lambda)f_{j,m}^{-}(\lambda), m\le n, \\ f_{j,m}^{+}(\lambda)f_{i,n}^{-}(\lambda), m>n, \end{cases} \quad (5)$$

являются элементами матрицы резольвенты оператора L *и удовлетворяют уравнениям*

$$\begin{aligned} &a_{1,n}R_{n+1,m}^{22}+a_{2,n}R_{nm}^{22}-\lambda R_{nm}^{12}=0, \\ &a_{1,n}R_{n+1,m}^{21}+a_{2,n}R_{nm}^{21}-\lambda R_{nm}^{11}=\delta_{nm}, \\ &a_{1,n-1}R_{n-1,m}^{11}+a_{2,n}R_{nm}^{11}-\lambda R_{nm}^{21}=0, \\ &a_{1,n-1}R_{n-1,m}^{12}+a_{2,n}R_{nm}^{12}-\lambda R_{nm}^{22}=\delta_{nm}, \end{aligned} \quad (6)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера.

Далее, при $\lambda\in\partial\Gamma_j, \lambda^2\ne 4A^{2(2-j)}, j=1{,}2$, пары решений $\{f_{j,n}^{+}(\lambda)\}$, $\overline{\{f_{j,n}^{+}(\lambda)\}}$ и $\{f_{j,n}^{-}(\lambda)\}$, $\overline{\{f_{j,n}^{-}(\lambda)\}}$ образуют фундаментальную систему решений системы разностных уравнений (1), так как их вронскианы равны $\frac{A^2}{\lambda}\left(z_1-z_1^{-1}\right)$ и $\frac{1}{\lambda}\left(z_2^{-1}-z_2\right)$, соответственно. Поэтому справедливы разложения

$$f_{j,n}^{-}(\lambda)=a_1(\lambda)\overline{f_{j,n}^{+}(\lambda)}+b_1(\lambda)f_{j,n}^{+}(\lambda), \lambda\in\partial\Gamma_1, \lambda^2\ne 4A^2, \quad (7)$$

$$f_{j,n}^{+}(\lambda)=a_2(\lambda)\overline{f_{j,n}^{-}(\lambda)}+b_2(\lambda)f_{j,n}^{-}(\lambda), \lambda\in\partial\Gamma_2, \lambda^2\ne 4, \quad (8)$$

где функции $a_j(\lambda), b_j(\lambda), j=1{,}2$, определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} a_1(\lambda)&=\frac{\lambda\{f_{j,n}^{+}(\lambda), f_{j,n}^{-}(\lambda)\}}{A^2\left(z_1-z_1^{-1}\right)}, b_1(\lambda)=\frac{\lambda\{\overline{f_{j,n}^{+}(\lambda)}, f_{j,n}^{-}(\lambda)\}}{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)} \\ a_2(\lambda)&=\frac{\lambda\{f_{j,n}^{+}(\lambda), f_{j,n}^{-}(\lambda)\}}{\left(z_2-z_2^{-1}\right)}, b_2(\lambda)=\frac{\lambda\{f_{j,n}^{+}(\lambda), \overline{f_{j,n}^{-}(\lambda)}\}}{\left(z_2^{-1}-z_2\right)} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Согласно последним формулам функции $a_j(\lambda), b_j(\lambda), j=1{,}2$, непрерывны на разрезе $\partial\Gamma_j$, за исключением, быть может, концевых точек. Более того, функции $a_j(\lambda), j=1{,}2$, допускают регулярные продолжения в плоскость Γ_2. Имеют место соотношения

$$\left.\begin{gathered} a_j(\lambda-i0)=\overline{a_j(\lambda+i0)}, b_j(\lambda-i0)=\overline{b_j(\lambda+i0)} \\ b_2(\lambda)=\overline{a_2(\lambda)}, \lambda\in\partial\Gamma_2\setminus\partial\Gamma_1, \\ A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)a_1(\lambda)=\left(z_2^{-1}-z_2\right)a_2(\lambda), \lambda\in\Gamma_2\cup\partial\Gamma_2 \\ \left|a_j(\lambda)\right|^2-\left|b_j(\lambda)\right|^2=\left(\frac{A^2\left(z_1^{-1}-z_1\right)}{z_2^{-1}-z_2}\right)^{(-1)^j}, j=1{,}2, \lambda\in\partial\Gamma_1 \end{gathered}\right\} \quad (10)$$

Справедливы соотношения

$$a_j(\lambda)=A^{2n+1}\alpha_1^+(n)\alpha_1^-(n)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)= \\ =A^{2n}\alpha_2^+(n)\alpha_2^-(n)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\lambda\to\infty . \quad (11)$$

Как показано в работе $[4]$, функция $a_j(\lambda)$ может иметь лишь конечное число простых вещественных нулей $\lambda_k=\pm\mu_k, \mu_k>0,\ k=1,...,N$, лежащих вне $\partial\Gamma_2$. При этом нули функции $a_j(\lambda)$ являются собственными значениями оператора L. Пусть

$$C_k=\frac{f_{j,n}^-(\pm\mu_k)}{f_{j,n}^+(\pm\mu_k)}, k=1,...,N, \\ \left(m_k^+\right)^{-2}=\sum_{n\in Z}\left\{\left|f_{1,n}^+(\pm\mu_k)\right|^2+\left|f_{2,n}^+(\pm\mu_k)\right|^2\right\}. \quad (12) \\ \left(m_k^-\right)^{-2}=\sum_{n\in Z}\left\{\left|f_{1,n}^-(\pm\mu_k)\right|^2+\left|f_{2,n}(\pm\mu_k)\right|^2\right\}$$

Нули $\lambda_k=\pm\mu_k$, функции $a_j(\lambda)$ простые, и справедливы равенства

$$\dot a_j(\lambda)\frac{A^{2(2-j)}\left(z_j-z_j^{-1}\right)}{\lambda}\Bigg|_{\lambda=\lambda_k}=C_k\left(m_k^+\right)^{-2}=C_k^{-1}\left(m_k^-\right)^{-2}, k=1,...,N, \quad (13)$$

где точкой сверху обозначается производная по λ.

Теорема 2. *Имеют место равенства Парсеваля, равносильные формулам разложения*

$$\delta_{nm}=\sum_{\lambda=\pm\mu_k}\left(m_k^+\right)^2 f_{j,n}^+(\lambda)f_{j,m}^+(\lambda)+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_1}w^{-1}(\lambda)f_{j,n}^+(\lambda)\left[a_1(\lambda)\overline{f_{j,m}^+(\lambda)}+b_1(\lambda)f_{j,m}^+(\lambda)\right]d\lambda+ \quad (14) \\ +\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_2/\partial\Gamma_1}w^{-1}(\lambda)f_{j,m}^-(\lambda)\left[a_2(\lambda)\overline{f_{j,n}^-(\lambda)}+b_2(\lambda)f_{j,n}^-(\lambda)\right]d\lambda,$$

$$\delta_{nm}=\sum_{\lambda=\pm\mu_k}\left(m_k^-\right)^2 f_{j,n}^-(\lambda)f_{j,m}^-(\lambda)+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma_2}w^{-1}(\lambda)f_{j,n}^-(\lambda)\left[a_2(\lambda)\overline{f_{j,m}^-(\lambda)}+b_2(\lambda)f_{j,m}^-(\lambda)\right]d\lambda. \quad (15)$$

Доказательства теорем

Докажем теорему 1. Пусть $h=\{h_{1,n},h_{2,n}\}\in \ell^2((-\infty,\infty);C)$ - произвольная финитная последовательность. Для того чтобы построить резольвенту оператора L, нам нужно решить уравнение

$$Ly=\lambda y+h.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\begin{cases} a_{1,n}y_{2,n+1}+a_{2,n}y_{2,n}=\lambda y_{1,n}+h_{1,n}, \\ a_{1,n-1}y_{1,n-1}+a_{2,n}y_{1,n}=\lambda y_{2,n}+h_{2,n}. \end{cases} \tag{16}$$

Ищем решение системы уравнений в виде

$$y_{j,n}=C_n f^{+}_{j,n}(\lambda)+D_n f^{-}_{j,n}(\lambda) j=1,2,, \tag{17}$$

где C_n и D_n - величины, подлежащие к определению. Подставляя представление (17) в систему уравнений (16) после несложных преобразований, получим

$$\begin{cases} a_{1,n-1}(C_{n-1}-C_n)f^{+}_{1,n-1}(\lambda)+a_{1,n-1}(D_{n-1}-D_n)f^{-}_{1,n-1}(\lambda)=h_{2,n}, \\ a_{1,n-1}(C_{n-1}-C_n)f^{+}_{2,n}(\lambda)+a_{1,n-1}(D_{n-1}-D_n)f^{-}_{2,n}(\lambda)=-h_{1,n-1}. \end{cases}$$

Решая последнюю систему уравнений относительно $C_{n-1}-C_n$ и $D_{n-1}-D_n$ находим, что

$$C_{n-1}-C_n=w^{-1}(\lambda)\left[f^{-}_{1,n-1}(\lambda)h_{1,n-1}+f^{-}_{2,n}(\lambda)h_{2,n}\right], \tag{18}$$

$$D_{n-1}-D_n=w^{-1}(\lambda)\left[f^{+}_{1,n-1}(\lambda)h_{1,n-1}+f^{+}_{2,n}(\lambda)h_{2,n}\right]. \tag{19}$$

Заметим, что для выполнения условия $y\in \ell^2((-\infty,\infty);C)$ нужно взять $C_{-\infty}=0, D_{\infty}=0$. Сложив тогда равенства (18) при $n=n,n-1,n-2,...$, а равенства (19) при $n=n+1,,n+2,n+3,...$, имеем

$$C_n=-w^{-1}(\lambda)\sum_{k=-\infty}^{n-1}\left[f^{-}_{1,k}(\lambda)h_{1,k}+f^{-}_{2,k+1}(\lambda)h_{2,k+1}\right],$$

$$D_n=-w^{-1}(\lambda)\sum_{k=n}^{\infty}\left[f^{+}_{1,k}(\lambda)h_{1,k}+f^{+}_{2,k+1}(\lambda)h_{2,k+1}\right].$$

Подставляя последние равенства в представление (17), получим

$$y_{j,n}=-w^{-1}(\lambda)\left[\sum_{k=-\infty}^{n-1}f^{+}_{j,n}(\lambda)f^{-}_{1,k}(\lambda)h_{1,k}+\sum_{k=n}^{\infty}f^{-}_{j,n}(\lambda)f^{+}_{1,k}(\lambda)h_{1,k}\right]-$$

$$-w^{-1}(\lambda)\left[\sum_{k=-\infty}^{n-1}f^{+}_{j,n}(\lambda)f^{-}_{2,k}(\lambda)h_{2,k}+\sum_{k=n}^{\infty}f^{-}_{j,n}(\lambda)f^{+}_{2,k}(\lambda)h_{2,k}\right].$$

С другой стороны, в силу определения резольвенты имеем

$$y_{j,n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[R^{j1}_{nk}h_{1,k}+R^{j2}_{nk}h_{2,k}\right]. \tag{20}$$

Сравнение последних равенств приводит нас к формулам (5). С помощью (5) непосредственно проверяется, что справедливы уравнения (6), а из (6) следует, что вектор $y = \{y_{1,n}, y_{2,n}\}_{-\infty}^{\infty}$, определенный формулой (20), является решением системы уравнений (16). Теорема 1 доказана.

Предпошлем к доказательству теоремы 2 следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $h = \{h_{1,n}, h_{2,n}\} \in \ell^2((-\infty,\infty);C)$ - *произвольная финитная последовательность. Тогда при* $\lambda \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{nm}^{ii} h_{j,m} = -\frac{h_{i,n}}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), i = 1,2 . \tag{21}$$

Доказательство. В силу (6) имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{nm}^{11} h_{1,m} = -\frac{h_{1,n}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{a_{1,n} R_{n+1,m}^{21} + a_{2,n} R_{nm}^{21}\right\} h_{1,m},$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{nm}^{22} h_{2,m} = -\frac{h_{2,n}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{a_{1,n-1} R_{n-1,m}^{12} + a_{2,n} R_{nm}^{12}\right\} h_{2,m} .$$

Так как резольвента обладает свойством $R(\lambda) = (L - \lambda E)^{-1} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \lambda \to \infty$, то из последних соотношений вытекает (21).

Лемма доказана.

Интегрируя теперь равенства (21) вдоль $\partial\Gamma_2$ и используя теорему о вычетах, а также соотношения (5), (7)-(9), (11)-(13), получаем формулы (14), (15). Тем самым доказательство теоремы 2 завершается.

ЛИТЕРАТУРА

1.Гасымов М.Г, Левитан Б.М. Определение системы Дирака по фазе рассеяния //Докл. АН СССР, 1966, т.167, №6, с.1219-1222.

2. Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси //Докл. АН СССР, 1972, т.207, №1, с.44-47.

3. Гусейнов Г.Ш. Обратная задача теории рассеяния для разностного уравнения второго порядка на всей оси //Докл. АН СССР, 1976, т.231, №5, с.1045-1048.

4. Ханмамедов Аг.Х. Метод интегрирования задачи Коши для ленгмюровской цепочки с расходящимся начальным условием //Журн. Вычис.мат.и мат.физ., 2005, т.45, №9, с.1639-1650.

5. Kopylova E. and Teschl G. 2016: Dispersion Estimates for One-Dimensional Discrete Dirac Equations// Math. Anal. Appl. pp. 191-208.

6. Алескеров Р.И., Ханмамедов Аг.Х. Obratnaə zadaça rasseənia dlə diskretnoqo analoqa odnomernoy sistemı Diraka// Vestnik Bakinskoqo Universiteta, ser. fiz.-mat. nauk, 2017, №1, s.65-75.

7. Guseynov I.M., Khanmamedov A.Kh., Aleskerov R.I. 2017: The Inverse Scattering Problem for a Discrete Dirac System on the Whole Axis // Journal of Inverse and Ill-posed problems, Vol.25, No 6, pp. 824-834.

DİSKRET DİRAK OPERATORUNUN MƏXSUSİ FUNKSİYALARI ÜZRƏ AYRILIŞ

R.İ.ƏLƏSGƏROV

XÜLASƏ

Əmsalları müsbət və mənfi sonsuzluqda müxtəlif limitlərə yaxınlaşan diskret Dirak operatoruna baxılmışdır. Bu operatorun rezolventasının aşkar şəkli tapılmışdır. Diskret Dirak operatorunun məxsusi funksiyaları üzrə ayrılış düsturları alınmışdır.

Açar sözlər: diskret Dirak operatoru, rezolvent, məxsusi funksiya, ayrılış düsturları.

EXPANSIONS IN EIGENFUNCTIONS OF THE DISCRETE DIRAC OPERATOR

R.I.ALASGAROVV

SUMMARY

The discrete Dirac operator whose coefficients tend to different limits on $\pm\infty$ is considered. An explicit form of the resolvent of this operator is found. Formulas for the eigenfunction expansion of the discrete Dirac operator are obtained.

Keywords: discrete Dirac operator, resolvent, eigenfunctions, expansion formulas.

Поступила в редакцию: 07.12.2018 г.
Подписано к печати: 08.04.2019 г.