BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

УДК 517.956.2.

О ПОВЕДЕНИИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РЕШЕНИЙ НЕРАВНОМЕРНО ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ф.И.МАМЕДОВ[1], Н.Р.АМАНОВА[2]

[1]Институт Математики и Механики, НАН Азербайджана,

[2]Bakı Dövlət Universiteti

farman-m@mail.ru, amanova.n 93@gmail.com

Рассматривается задача Дирихле для класса эллиптических уравнений второго порядка недивергенной структуры, допускающих неравномерное вырождение в граничной точке области. Доказывается критерий типа Винера регулярности граничной точки.

Ключевые слова: неравномерно вырождающихся, (S,R)-емкость.

Пусть E_n - n -мерное эвклидово пространство точек $x=(x_1,...,x_n)$, $n\ge 3$, D -ограниченная область, расположенная в E_n , ∂D граница области D, причем $\partial D\in C^2$ и $0\in\partial D$.

Рассмотрим в D первую краевую задачу

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{ij}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_i+c(x)u(x)=0 \tag{1}$$

$$u|_{\partial D}=\varphi(x),\ \varphi(x)\in c(\partial D), \tag{2}$$

в предположении, что $\|a_{ij}(x)\|$ – действительная, симметрическая матрица с измеримыми в D элементами, причем для всех $x\in D$ и $\xi\in E_n$

$$\gamma\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\xi_i^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j\le\gamma^{-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\xi_i^2. \tag{3}$$

Здесь $\gamma\in(0,1]$- константа, $u_i=\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$, $u_{ij}=\frac{\partial u(x)}{\partial x_i\partial x_j}$, $\lambda_i(x)=g_i(\rho(x))$, $\rho(x)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(|x_i|)$, $g_i(t)=\left(\omega_i^{-1}(t)/t\right)^2$, $i,j=1,...,n$. Относительно функций $\omega_i(t)$ для $i=1,...,n$ будем предполагать выполнение следующих условий: $\omega_i(t)$- непрерывные и строго монотонно возрастающие на $[0, diamD]$ функции, $\omega_i(0)=0,\ \omega_i^{-1}(t)$ - функции обратные к $\omega_i(t)$ и кроме того существуют константы $\alpha>1,\ \beta>1,\ \eta>0,\ q>n,\ A>0$ такие, что

$$\alpha\cdot\omega_i(t)\le\omega_i(\eta t)\le\beta\cdot\omega_i(t), \qquad (4)$$

$$\left(\frac{\omega_i^{-1}(t)}{t}\right)^{q-1}\cdot\int\limits_0^{\omega_i^{-1}(t)}\left(\frac{\omega_i(\tau)}{\tau}\right)^q d\tau\le At,\ \ t\in(0,diamD),\ i=1,...,n. \qquad (5)$$

Предположим, что

$$|b_i(x)|\le b_0,\ -c_0\le c(x)\le 0,\ i=1,...,n, \qquad (6)$$

где $b_0>0,\ c_0>0$ - константы.

Условимся в некоторых обозначениях и определениях. Обозначим через $W_{2,\lambda}^2(D)$ -банахово пространство функций $u(x)$ заданных на D, с конечной нормой

$$\|u\|_{W_{2,\lambda}^2(D)}=\left(\int\limits_D\left(u^2(x)+\sum_{i=1}^n\lambda_i(x)u_i^2+\sum_{i,j=1}^n\lambda_i(x)\lambda_j(x)u_{ij}^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

и пусть $\overset{0}{W}{}_{2,\lambda}^2(D)$ - пополнение множества всех функций $u(x)\in c^\infty(\overline{D})$, $u|_{\partial D}=0$ по норме пространства $W_{2,\lambda}^2(D)$. Функция $u(x)\in\overset{0}{W}{}_{2,\lambda}^2(D)$ называется сильным (почти всюду) решением уравнения (1) в D, если она удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в D. Функция $u(x)$, являющуюся решением неравенства $Lu\ge 0$ будем называть L - субэллиптической . Функция $u(x)$ назовем L - суперэллиптической в D, если -$u(x)$ L - субэллиптично в D. Запись $c(...)$ означает, что положительная константа C зависит лишь от содержимого скобок.

Пусть $x^0\in E_n,\ R\in(0,1],\ K>0,\ \Pi_{R:K}(x^0)$- параллелепипед $\{x:|x_i-x_i^0|<K\cdot\omega_i^{-1}(R),\ i=1,...,n\},\ E_R^{x^0}(K)$ эллипсоид

$$\left\{x:\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-x_i^0)^2}{(\omega_i^{-1}(R))^2}<K^2\right\}.$$

Через $E_R^{x^0}(K_1;K_2)$ обозначим слой $E_R^{x^0}(K_2)\setminus E_R^{x^0}(K_1),\ K_2>K_1$. Обзор работ по вышеупомянутой те матике можно найти в работах [1-9].

Пусть $u_\varphi(x)$- обобщенное по Винеру-Ландису решение задачи (1)-(2). Будем предполагать, что обобщенное решение $u_\varphi(x)$ существует. Что касается условий существования обобщенного решения $u_\varphi(x)$, то укажем в этой связи статью [10].

Точка $0 \in \partial D$ называется регулярной относительно первой краевой задачи (1)-(2), если для всякой функции $\varphi(x) \in c(\partial D)$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in D}} u_\varphi(x) = \varphi(0). \qquad (7)$$

Если существует по крайней мере одна непрерывная функция $\varphi(x)$ на ∂D, для которой (7) не выполнено, то точка 0 называется иррегулярной.

Для $x, y \in E_R^o(1;17)$, $x \neq y$ введем следующую функцию

$$G_R^{(S)}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{h} \frac{(x_i - y_i)^2}{\left(\omega_i^{-1}(R)\right)^2} \right)^{-S/2},$$

где S - положительное число. Пусть H - борелевское множество в $E_R^o(1;17)$. Назовем меру μ на H, (S, R) - допустимой, если

$$\int_H G_R^S(x, y) d\mu(y) \leq 1 \quad \text{при } x \in H.$$

Число $cap_R^{(S)}(H) = \sup \mu(H)$, где точная верхняя грань берется по всем допустимым мерам, называется (S, R) - емкостью множества H.

Обозначим

$B^1 = E_R^0(17)$, $B^2 = E_R^0(1)$, $B^3 = B^1 \mid B^2$, $B^4 = E_R^0(9)$, $x^0 \in \partial B^4$, $B^5 = E_R^{x^0}(8)$, $B^6 = E_R^{x^0}(1)$, $B^7 = E_R^{x^0}(1 - \rho_0)$, $\rho_0 \in \left(1, \frac{1}{4}\right]$, $B^8 = E_R^0\left(8\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2}\right)$, $\overline{B}^1 \subset D$.

Лемма. Пусть в B^3 расположено область P, имеющая предельные точки на границах обоих эллипсоидов B^1 *и* B^2. Пусть далее в P определена положительная L-субэллиптическая функция $u(x)$, непрерывная в $\bar{P}$ и обращающаяся в нуль на $\partial P \cap B^3$. Тогда, если $H_R = B^8 \setminus P$ и $R \leq 1$, то

$$\sup_P u(x) \geq \left(1 + \eta_0(\gamma, n) \cdot R^{-S} \cdot cap_R^{(S)}(H_R)\right) \cdot \sup_{P \cap \partial B^4} u(x), \qquad (8)$$

где $\eta_0 = const > 0$.

Доказательство. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $cap_R^{(S)}(H_R) > 0$. Кроме того, не теряя в общности, можно считать, что $\sup\limits_{P \cap \partial B^4} u(x) = 1$.

Пусть $x^* \in P \cap \partial B^4$ точка, в которой $u(x^*) = 1$. Выберем на ∂B^4 минимальное число точек $x^1, ..., x^m$ так, чтобы

1) $\overline{B}^8 \subset \bigcup_{i=1}^{m} B^6\left(x^i\right)$, где $B^6\left(x^i\right) = E_R^{x^i}(1)$;

2) Одна из точек x^i совпадает с точкой x^*;

3) для любого $i, 1 \le i \le m$, найдется $j, 1 \le j \le m$ такое, что $x^j \in \partial E_{R/A^n}^{x^i}$, где $A \ge \alpha > 1$-константа.

Ясно, что число m зависить лишь от n. Из свойств покрытия следует, что для любого $i_0, 1 \le i_0 \le m$, существует цепочка $x^{i_1}, ..., x^{i_k}$ такая, что $x^{i_k} = x^* u$ $x^{i_{e+1}} \in E_{R/A^n}^{x^{i_e}}(1)$, $e = 0,1,...,k-1$.

Из субаддитивности эллиптической емкости заключаем о существовании $i_0, 1 \le i_0 \le m$, такого, что

$$cap_R^{(S)}\left(H_R \cap B^6\left(x^{i_0}\right)\right) \ge \frac{cap_R^{(S)}(H_R)}{m}. \qquad \textbf{(9)}$$

Пусть $\delta = \dfrac{\eta_1 \cdot cap_R^{(s)}(H_R) \cdot R^{-S}}{2m\left(1 + \dfrac{\eta_1 \cdot C_1(\gamma, n)}{m}\right)}$ (см.[6]), где константы η_1 и C_1 такова, что $cap_R^{(S)}(H_R) \ge C_1 \cdot R^S$. Допустим, что $\sup\limits_{P \cap B^6\left(x^{i_0}\right)} u(x) \ge 1 - \delta$. Тогда согласно [6] и неравенству (9)

$$\sup u(x) \ge \sup_{P \cap B^5\left(x^{i_0}\right)} u(x) \ge \left(1 + \eta_1 \cdot R^{-s} \cdot cap_R^{(S)}\left(H_R \cap B^6\left(x^{i_0}\right)\right)\right) \times$$

$$\times \sup_{P \cap B^6\left(x^{i_0}\right)} u(x) \ge \left(1 + \eta_1 \cdot R^{-S} \frac{cap_R^{(S)}(H_R)}{m}\right) \cdot (1 - \delta) \ge$$

$$\ge \left(1 + \frac{\eta_1 \cdot R^{-S} cap_R^{(S)}(H_R)}{m}\right) \cdot \left[1 - \frac{\eta_1 \cdot R^{-S} cap_R^{(S)}(H_R)}{2m\left(1 + \dfrac{\eta_1 \cdot R^{-S} cap_R^{(S)}(H_R)}{m}\right)}\right] =$$

$$= 1 + \frac{\eta_1}{m} \cdot cap_R^{(S)}(H_R) \cdot R^{-S} = \left(1 + \eta_0 R^{-S} \cdot cap_R^{(S)}(H_R)\right) \sup_{P \cap \partial B^x} u(x),$$

и в этом случае требуемая оценка (8) доказана.

Пусть теперь $u(x) < 1 - \delta$ при $x \in P \cap B^6\left(x^{i_0}\right)$. Рассмотрим функцию $v_1(x) = u(x) - 1 + \delta$. Нетрудно видеть, что функция $v_1(x)$ является L-субэллиптической в P, так как $\delta < 1$. Пусть $P_1 = \{x : x \in P, v_1(x) > 0\}$. По предположению эллипсоид $B^6\left(x^{i_0}\right)$ расположен в дополнении к P_1. Для $x' \in \partial B^4$ обозначим через $B_R^i\left(x^i\right)$ эллипсоид $B^i(x'),\ i = 5,6$. Легко проверить, что $B_R^5(x') \subset B_{AR}^6(x')$.

Пусть теперь $x^{i_1},\dots,x^{i_k}$ - вышеупомянутая цепочка. По построению $B_{R/A}^6\left(x^{i_1}\right) \setminus P_1$ содержить эллипсоид $E_{R/A}^{x'}(\rho)$ эллиптическая $\left(S, \dfrac{R}{A}\right)$- емкость, которого согласно [6] не меньше, чем $C_2(\gamma, n, \rho) \cdot \left(\dfrac{R}{A}\right)^S$. При этом ρ зависить лишь от n. Пусть $\sigma = \dfrac{\eta_1 \cdot C_2}{2(1 + C_2 \cdot \eta_1)}$. Допустим, что

$$\sup_{P_1 \cap B_{R/A}^6\left(x^{i_1}\right)} v_1(x) \geq \delta(1-\delta), \text{ т.е. } \sup_{P_1 \cap B_{R/A}^6\left(x^{i_1}\right)} u(x) \geq 1 - \delta \cdot \sigma .$$

Применяя [6], получаем

$$\sup_{P \cap B_R^6\left(x^{i_1}\right)} v_1(x) \geq (1 + \eta_1 c_2) \sup_{P_1 \cap B_{R/A}^6\left(x^{i_1}\right)} v_1(x) \geq (1 + \eta_1 c_2) \cdot \delta(1-\sigma).$$

Таким образом

$$\sup_P u(x) \geq \sup_{P_1 \cap B_R^6\left(x^{i_1}\right)} u(x) \geq 1 - \delta + (1 + \eta_1 c_2) \cdot \delta(1-\sigma) = \left(1 + \frac{\delta \eta_1 c_2}{2}\right) \sup_{P_1 \cap \partial B^4} u(x),$$

и в этом случае утверждение леммы доказано.

Допустим, что $u(x) < 1 - \delta\sigma$ при $x \in P \cap B_{R/A}^6\left(x^{i_1}\right)$. Рассмотрим L-субэллиптическую в P функции $v_2(x) = u(x) - 1 + \delta \cdot \sigma$. Пусть $P_2 = \{x : x \in P,\ v_2(x) > 0\}$. По предположению эллипсоид $B_{R/A}^6\left(x^{i_1}\right)$ расположен в дополнении к P_2. Если теперь

$$\sup_{P_2 \cap B_{R/A^2}^6\left(x^{i_2}\right)} v_2(x) \geq \delta\sigma(1-\sigma) \text{ , т.е. } \sup_{P_2 \cap B_{R/A^2}^6\left(x^{i_2}\right)} u(x) \geq 1 - \delta\sigma^2,$$

то применяя [6], получаем

$$\sup_P u(x) \geq \sup_{P_2 \cap B_{R/A}^6\left(x^{i_1}{}_2\right)} u(x) \geq 1 - \delta\sigma + (1 + \eta_1 c_2) \cdot \delta\sigma(1-\sigma) = 1 + \frac{\delta\sigma\eta_1 c_2}{2},$$

и в этом случае утверждение леммы доказана.

Если же $u(x) < 1 - \delta\sigma^2$ при $x \in P_2 \cap B_{R/A^2}^6\left(x^{i_2}\right)$, то продолжим процесс аналогичным образом. Не позже, чем на $K - m$ шагу, мы докажем лемму, так как $u\left(x^{i_k}\right) = u\left(x^*\right) = 1$.

Следствие. Пусть $A_1 = \dfrac{\alpha}{\beta},\ \alpha > \beta$. Тогда утверждение леммы останется в силе, если выполнены все ее условия, но область P расположена в

$E^0_{A_1R}(9)$, имеет предельные точки на $\partial E^0_{A_1R}(9)$ пересекает B^1 и $u\big|_{\partial P\cap E^0_{A_1R}(9)}=0$.

Для доказательства заметить, что $B^1\in E^0_{A_1R}(9)$.

Пусть для натуральных $j,\ H(j)=E^0_{A_1^{-j}}\left(8\frac{1}{2};9\frac{1}{2}\right)\setminus D,\ P_j=cap^{(S)}_{A_1^{-j}}(H(j))$.

Теорема. Пусть в ограниченной области $D\in E_n$ определены коэффициенты оператора L, удовлетворяющие условиям (3)-(6). Тогда для регулярности точки $0\in\partial D$ относительно первой краевой задачи (1)-(2) достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^{\infty}A_1^{Sj}\cdot P_j=\infty. \tag{10}$$

Доказатльство. Достаточно показать следующее: каковы бы ни выли числа $\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0$ подобласть D' области D, целиком расположенная в D и L-субэллиптическая в D' функция $u(x)<1$, существует $\delta>0$ такое, что из $u\big|_{\partial D'\cap E^0_{\varepsilon_1}(9)}\le 0$ следует $u\big|_{D'\cap E^0_{\delta}(9)}<\varepsilon_2$.

Пусть j_0- наименьшее натуральное число, для которого $A_1^{-j_0}<\varepsilon_1$, а $j>j_0$ натуральное число такое, что в $D'\cap E^0_{A_{11}^{-j}}(9)$ существует точка x, в которой $u(x')\ge\varepsilon_2$.

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что число j меньше константы, зависящей от s,ε_1 и ε_2.

Для каждого $i,\ i=j_0,...,j$ обозначим $M_i=\sup\limits_{D'\cap E^0_{A_1^{-i}}(9)}u(x)$. Рассмотрим для каждого $i,\ i=j_0+1,...,j$ эллипсоиды $E^0_{A_{11}^{-i}}(9)$ и $E^0_{A_{11}^{-(i-1)}}(9)$. Рассмотрим множество таких точек $x\in D'\cap E^0_{A_{11}^{-(i-1)}}(9)$, в которых $u(x)>0$, и в этом множестве выберем компоненту, содержащую ту точку $\partial E^0_{A_{11}^{-i}}(9)$, где функция $u(x)$ достигает значения M_i. Обозначим эту компоненту через D_i. Имеем

$$cap^{(S)}_{A_1^{-i}}\left(E^0_{A_1^{-j}}\left(8\frac{1}{2};9\frac{1}{2}\right)\setminus D_i\right)\ge cap^{(S)}_{A_1^{-i}}\left(E^0_{A_1^{-j}}\left(8\frac{1}{2};9\frac{1}{2}\right)\setminus D\right)=cap^{(S)}_{A_1^{-i}}(H(i))=P_i.$$

Применяя к эллипсоидам $E^0_{A_{11}^{-i}}(9)$ и $E^0_{A_{11}^{-(i-1)}}(9)$, к области D_i и к функции $u(x)$ в этой области лемму, получим

$$M_{i-1}\ge\left(1+\eta_0\cdot A_1^{iS}\cdot P_i\right)\cdot M_i$$

и следовательно

$$1 \ge M_{j_0} \ge \left(1+\eta_0 \cdot A_1^{S\cdot(j_0+1)} \cdot P_{j_0+1}\right) \cdot M_{j_0+1} \ge \ldots \ge$$

$$\ge \prod_{i=j_0}^{j-1}\left(1+\eta_0 \cdot A_1^{S\cdot(i+1)} \cdot P_{i+1}\right) \cdot M_j \ge \prod_{i=j_0}^{j}\left(1+\eta_0 \cdot A_1^{iS} \cdot P_i\right) \cdot \varepsilon_2,$$

откуда

$$\prod_{i=j_0+1}^{j}\left(1+\eta_0 \cdot A_1^{iS} \cdot P_i\right) \le \frac{1}{\varepsilon_2}$$

и значит

$$\sum_{i=j_0+1}^{j}\ln\left(1+\eta_0 \cdot A_1^{iS} \cdot P_i\right) \le \ln\frac{1}{\varepsilon_2}.$$

Так как

$$\ln\left(1+\eta_0 \cdot A_1^{iS} \cdot P_i\right) \ge C_3(S) A_1^{iS} \cdot P_i,$$

то

$$\sum_{i=j_0+1}^{j} A_1^{iS} \cdot P_i \le \frac{1}{C_3} \cdot \ln\frac{1}{\varepsilon_2}.$$

В силу условия (10), последнее неравенство не может выполняться при $j \ge j^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, n, b_0, c_0)$. Теперь достаточно выбрать $\delta = A_1^{-j^*}$ и теорема доказана.

Замечание. Условие (10) можно записать в интегральной форме, а именно: для регулярности точки $0 \in \partial D$ относительно первой краевой задачи (1)-(2) достаточно, чтобы

$$\int_1^\infty \frac{\omega(\tau)}{\tau^{S+1}} d\tau = \infty, \tag{11}$$

где

$$\omega(\tau) = cap_\tau^{(S)}\left(E_\tau^0\left(8\frac{1}{2};9\frac{1}{2}\right) \setminus D\right),\ \tau = A_1^{-t},$$

$$H_t = E^0_{A_1^{-t}}\left(8\frac{1}{2};9\frac{1}{2}\right) \setminus D,\ P(t) cap^{(S)}_{A_1^{-t}}(H_t),\ 1 < t < \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1.Wiener N. 1924: The Dirichlet Problem. J.Math. and Phys., v.3, pp.127-146.

2. Келдыш М.В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. Успехи мат.наук, 1941, т.8, с.171-292.

3.Литтман В., Стампаккья Г., Вайнвергер Г. Регулярные точки для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. Сборник перев. «Математика», 1966, т.9, №2, с.72-97.

4.Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971, 288 с.

5.Новрузов А.А. О регулярности граничных точек для эллиптического уравнения с не-

прерывными коэффициентами. Вестник МГУ, сер.мат-мех., 1971, №6, с.18-25
6.Мамедов И.Т. О поведении вблизи границы решений вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. Мат.заметки, 1981, т.30, N 3, с.343-352.
7.Алыгулиев Р.М. Граничные свойства решений неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка недивергентной структуры. Докл. НАН Азербайджана, 2001, т.1. VII, № 4-6, с.52-60.
8.Мамедов Ф.И., Аманов Р.А. О некоторых свойствах решений квазилинейных вырождающихся уравнений. Украинск.Матем.Журнал. т. 60, №7, 2008, с.918-936.
9.Гусейнов Р.В., Аманов Р.А. Регулярности граничной точки для неравномерного вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в недивергентной форме. Вестник ВГУ, сер.физ-мат.н., 2010, №2, с.17-25.
10.Amanova N.R. 2017: On Strong Solvability of Dirichlet Problem for a Class of non Uniformly Degenerated Elliptic Equations of Second Order. Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. v.5, No 2, pp.3-25.

SƏRHƏD NÖQTƏSİNDƏ QEYRİ-MÜNTƏZƏM CIRLAŞAN İKİNCİ TƏRTİB ELLİPTİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN XARAKTERİ HAQQINDA

F.İ.MƏMMƏDOV, N.R.AMANOVA

XÜLASƏ

Məqalədə oblastın sərhəd nöqtələrində qeyri-müntəzəm cırlaşan qeyri-divergent strukturlu ikinci tərtib elliptik tənliklər sinfi üçün Dirixle məsələsinə baxılır. Sərhəd nöqtələrinin hamarlığı haqqında Viner tip kriteriya isbat edilir.

Açar sözlər: qeyri-müntəzəm cırlaşma, (S,R)- tutum.

THE BEHAVIOUR OF THE SOLUTIONS OF NON-UNIFORMLY DEGENERATE SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATIONS AT BOUNDARY POINTS

F.I.MAMMADOV, N.R.AMANOVA

SUMMARY

The Dirichlet problem is considered for a class of non-uniformly degenerate second order elliptic equations in non-divergent form at boundary points. The Viner criterion is proved for the smoothness of the boundary points.

Key words: non-uniformly degenerated, (S,R)-capity.

Поступила в редакцию: 11.03.2019 г.
Подписано к печати: 08.04.2019 г.