УДК 001.89.57

ОБ ОДНОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ДВУХПРОДУКТОВЫХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

С.И.ГАМИДОВ
Бакинский Государственный Университет
sabir818@yahoo.com

Рассматривается двухпродуктовая модель экономической динамики. Исследуется зависимость объема потребления от численности рабочей силы. Как частные случаи, в качестве производственных функций рассматриваются функция Кобба-Дугласа и функция с постоянной эластичностью замены (CES).

Ключевые слова: потребление, функция Кобба-Дугласа, удельное потребление.

В работе [1] рассматривается вопрос зависимости объема потребления от численности рабочей силы в простейшей однопродуктовой модели экономической динамики.

В настоящей работе этот вопрос исследуется в рамках двухпродуктовой модели экономической динамики. В начале приведем некоторые вспомогательные сведения и определения из [1].

Модель задается соотношениями

$$F(\overline{K},\overline{L}) = I + C, \quad C = \omega L, \; K = v\overline{K} + I$$

Здесь $\overline{K}$ и $\overline{L}$ - объем фондов и численность рабочей силы в момент времени $\overline{t}$, K и L – объем фондов и рабочей силы в следующий момент времени t (время дискретное), I – инвестиции, C – потребление, ω - удельное потребление (ставка заработной платы), F – производственная функция, v - коэффициент сохранности фондов. Также предполагается, что задана неизменная норма накопления s, не зависящая от численности рабочей силы L.

Очень часто вместо функции y=F(K,L) рассматривают функцию одного переменного $f(\eta) = F(\eta,1)$, [2.3.4] где

$$\eta = \frac{K}{L}, \eta > 0$$

Предполагается, что функция F положительно однородна первой степени,

F(0,L) = F(K,0)=0

Считается, что функция f трижды непрерывно дифференцируема, причем

$$f'(\eta)>0\ ,\ f''(\eta)\le 0 \text{ при } \eta>0.$$

Через М обозначим величину $\nu\overline{K}+F(\overline{K},\overline{L})$ - национальное богатство в момент t, и пусть η есть корень уравнения

$$\eta=\frac{M}{L}-\frac{f(\eta)-\eta f'(\eta)}{\nu+f'(\eta)}$$

Пусть $L=\rho\overline{L}$ где ρ - темп роста рабочей силы. Тогда потребление задается соотношением

$$C(L)=(1-s)F\left(\overline{K},\frac{1}{\rho}L\right),$$

а удельное потребление ω задается через норму накопления s равенством

$$\omega=\frac{C(L)}{L}=(1-s)F\left(\overline{\eta},\frac{1}{\rho}\right),$$

где $\overline{\eta}=\frac{\overline{K}}{\overline{L}}$ - фондовооруженность в начальный момент времени t.

В [2,5] предложен следующий способ выбора ω:

$$\omega=\frac{f(\eta)-\eta f'(\eta)}{\nu+f'(\eta)} \qquad (1)$$

Рассмотрим две однопродуктовые модели. Первая задается производственной функцией F_1 и коэффициентом сохранности ν_1, вторая-функцией F_2 и коэффициентом сохранности ν_2. Задана общая численность рабочей силы L, которая распределяется между этими моделями так, чтобы максимизировать суммарное потребление.

Итак рассматривается задача

$$C_1(l)+C_2(L-l)\to\max \qquad (2)$$

при условии $0\le l\le L$. Здесь $C_i(l)\,(i=1,2)$ - фонд потребления в i-ой модели в предположении, что удельное потребление ω_i выбирается по формулам (1). Казалось бы что если в одной из моделей производственная функция «существенно лучше», чем в другой, то вся рабочая сила должна быть направлена в эту модель. Так, однако, бывает не всегда. Ниже как раз изучается вопрос, когда решение задачи (2) лежит внутри промежутка $[0,1]$ и когда на его границе.

Лемма 1. Пусть функции C_1 и C_2 возрастают и вогнуты на промежутке $[0,1]$, причем $C_1(0)=C_2(0)=0$. Тогда соотношение

$$C_1(L) \geq C_1(l) + C_2(L-l) \quad \left(l \in [0,L]\right) \tag{3}$$
выполняется в том и только в том случае, когда
$$C_1'(L) \geq C_2'(0).$$

Доказательство. Положим $m = L - l$ и пусть $C(m) = C_1(L) - C_1(L-m)$ $\left(0 \leq m \leq L\right)$. Тогда неравенство (3) равносильно соотношению
$$C(m) \geq C_2(m),\ m \in [0,L].$$

Так как $C''(m) = -C_1'(m) > 0$, то функция C выпукла. Кроме того, $C(0) = C_2(0)$. Из этого равенства, выпуклости C и вогнутости C_2 следует, что неравенство $C(m) \geq C_2(m)$ $\left(0 \leq m \leq L\right)$ равносильно соотношению $C'(0) \geq C_2'(0)$. Для завершения доказательства осталось заметить, что $C'(0) = C_1'(L)$.

Теорема 1. Пусть F_1 и F_2 - функции Кобба – Дугласа. Тогда решение задачи (2) лежит в интервале $(0, L)$.

Доказательство. Воспользовавшись формулой (7) [1], нетрудно проверит, что в случае, когда F - производственная функция Кобба-Дугласа, производная потребления в нуле бесконечна. Привлекая лемму 1, убедимся в справедливости теоремы.

Теорема 2. Рассмотрим модели (F_1, v_1) и (F_2, v_2), где F_1 и F_2 - функции с постоянной эластичностью замены:
$$F_i(K,L) = \left(A_i K^{-\rho_i} + B_i L^{-\rho_i}\right)^{-\frac{1}{\rho_i}} \quad (i = 1,2),$$
причем $\rho_i > 1$. Тогда суммарное потребление $C_1(l) + C_2(L-l)$ достигает максимума на отрезке $[0,L]$ в точке L тогда и только тогда, когда $L \leq \overline{L}_1$ и $C_1'(L) \geq \dfrac{1}{v_2}\beta_2^{-\frac{1}{\rho_2}}$. Здесь $\overline{L}_1$ - единственная точка максимума функции C_1 на положительной полуоси.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1, введем в рассмотрение функцию $C(m) = C_1(L) - C_1(L-m)$ $(0 \leq m \leq L)$. Максимум функции $C_1(l) + C_2(L-l)$ достигается в точке L тогда и только тогда, когда $C(m) \geq C_2(m)$.

Если $L > \overline{L}_1$, то функция C принимает на $[0,L]$ как положительные, так и отрицательные значения, в то время как функция C_2 всегда положительна, поэтому максимум в точке L не достигается.

Пусть $L \leq \overline{L}_1$. Рассмотрим сначала случай, когда $L \leq \overline{L}_2$, где $\overline{L}_2$ - точка максимума функции F_2 на положительной полуоси. Тогда, привлекая теорему 2 [1] и лемму 1, получим, что L является точкой максимума в том и только в том случае, когда $C_1'(L) \geq C_2'(0)$. Несложные вычисления, опирающиеся на формулу (7), показывают, что $C_2'(0) = \frac{1}{\nu_2}\beta_2^{-\frac{1}{\rho_2}}$. Если же $L > \overline{L}_2$, то можно сначала использовать лемму 1 для промежутка $[0, \overline{L}_2]$, а затем воспользоваться тем, что на отрезке $\left(\overline{L}_2, L\right)$ функция C_2 убывает, а функция C возрастает. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hamidov S.I. 2015: Dependence of Consumption Volume on the Labor-Force in One-Productive Models of Economic Dynamics. Journal of Mathematics and System Science. pp. 113-117.
2. Рубинов А.М. Математические модели расширенного воспроизводства. Л.: Наука, 1983.
3. Fisher F. M. 2005: Aggregate Production Functions – A Pervasive, but Inpervasive, Falru Tale. Easton Economic Journal, Vol. 31(3). pp. 489-491
4. Клейнер Г.Б., Производственные функции. М.: Статистика, 1957
5. Макаров В.Л, Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.

İKİMƏHSULLU İQTİSADİ DİNAMİKA MODELLƏRİNDƏKİ BİR ASILILIQ HAQQINDA

S.İ.HƏMİDOV

XÜLASƏ

İkiməhsullu istisadi dinamika modellərinə baxılır. İstehlak həcminin işçi qüvvəsinin sayından asılılığı tədqiq olunur. Xüsusi hal kimi istehsal funksiyaları olaraq Kobb-Duqlas istehsal funksiyası və stabil əvəzetmə elastiklikli istehsal funksiyaları (CES) öyrənilir.

Açar sözlər: istehlak, Kobb-Duqlas funksiyası, əmək haqqı tarifi

ON A DEPENDENCE IN TWO PRODUCTIVE MODELS OF THE ECONOMIC DYNAMICS

S.I.HAMIDOV

SUMMARY

The paper studies two-productive model of economic dynamics. The dependence of the volume of consumption on the labor force is investigated. As special cases, Cobb-Douglas function and constant elasticity of substitution (CES) function are considered as production functions.

Key words: consumption, Cobb-Douglas function, salary.

Поступила в редакцию: 08.01.2019 г.
Подписано к печати: 08.04.2019 г.