BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

УДК 517.95

ОБ ОДНОМ ПОЗИТИВНОМ ОПЕРАТОРЕ

Н.М.СУЛЕЙМАНОВ

Бакинский Государственный Университет

bsu.edu.gov.az

В работе получены достаточные условия, которые обеспечивают позитивность некоторых классов операторов порождённые с операторно-дифференциальными выражениями в частных производных. Эти условия выражены свойствами операторных коэффициентов данного дифференциального выражения.

Ключевые слова. гильбертово пространство, операторно-дифференциальное выражение, регулярные точки, позитивный оператор.

Пусть, H сепарабельное гильбертово пространства, A-положительно определённый самосопряжённый оператор в H. Обозначим через $L_2(\mathbb{R}^2; H)$ гильбертово пространство всех вектор функций $f(t,x)$ определённые почти всюду в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, с нормой [1]:

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \|f(t,x)\|^2 \, dtdx \right)^{1/2} < \infty$$

Пусть $n = 2m, m = 1,2, \ldots$. Через $D(\mathbb{R}^2; H_n)$ обозначим множество бесконечно дифференциальных функций $u(t,x)$ со значениями в $H_n = D(A^n)$, имеющие компактные носители. В линейном множестве $D(\mathbb{R}^2, H_n)$ определим норму:

$$\|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}^2;H)} = \left(\left\|\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} + \left\|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} + \|A^n u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Пространство $D(\mathbb{R}^2; H_n)$ с нормой $\|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}^2;H)}$ является предгильбертовым пространством, пополнение которого обозначим через $W_2^n(\mathbb{R}^2; H)$.

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^2; H)$ определим следующими операторами

$$P_0 u = P_0\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial x^n} + A^n u, \qquad (1)$$

причем $D(P_0) = W_2^n(\mathbb{R}^2; H) \subset L_2(\mathbb{R}^2; H)$,

$$P_1 u = P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0\le k+j\le 4}}^{n} A_{k,j} \frac{\partial^{k+j} u(t,x)}{\partial t^k \partial x^j}, \ \ D(P_1) = W_2^n(\mathbb{R}^2; H) \qquad (2)$$

и

$$Pu = P_0 u + P_1 u, \ \ D(P) = W_2^n(\mathbb{R}^2; H) \qquad (3)$$

В работе [2] доказано, что если операторы $B_{k,j} = A_{k,j} A^{(k+j)-n}$ $k, j = \overline{0, n}$ ограничены в H, то оператор P_1 определён корректно.
имеют место следующие предложения.

Лемма 1. Пусть $u \in D(L_0) = W_2^n(\mathbb{R}^2; H)$. Тогда при любом $\lambda \le 0$ имеет место неравенство

$$\|(P_0 - \lambda E)u\|^2_{L_2(R_+;H)} \ge \|P_0 u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} + |\lambda|^2 \|u\|^2_{W_2^n(\mathbb{R}^2;H)} .$$

Доказательство. Пусть $u \in D(L_0), \lambda \le 0$. Тогда

$$\|(P_0 - \lambda E)u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} = \|P_0 u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} + |\lambda|^2 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} + +2|\lambda| Re(P_0 u, u)_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \qquad (4)$$

С другой стороны, из теоремы Планшареля следует, что

$$Re(P_0 u, u)_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} = Re\big((\xi^n E + \eta^n E + A^n)\hat{u}, \hat{u}\big)_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} = = Re(\xi^{2m} E + \eta^{2m} E + A^{2m} \hat{u}, \hat{u})_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} = \|\xi^m \hat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} + \|\eta^m \hat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} + +(A^m \hat{u}, A^m \hat{u})_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \ge \mu_0^{2m} (\hat{u}, \hat{u})_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} = \mu_0^{2m} \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R};H)} .$$

Здесь μ_0 есть нижняя грань спектра оператора A.
Тогда из равенства (4) следует, что

$$\|(P_0 - \lambda E)u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \ge \|P_0 u\|^2_{L_2(R_+;H)} + |\lambda|^2 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} + \mu_0^n \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}$$

Следовательно

$$\|(P_0-\lambda E)u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \geq \|P_0 u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} + |\lambda|^2\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}$$

Следствие 1. При любом $u \in D(L_0)$ и $\lambda \leq 0$ верно неравенство

$$\|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq \|(P_0-\lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \tag{5}$$

и

$$|\lambda|\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq \|(P_0-\lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \tag{6}$$

Используя результаты работы [2] и неравенство (5) получаем

Лемма 2. При любом $u \in D(L_0)$ имеют место неравенства

$$\left\|A^{n-(k+j)}\frac{\partial^{k+j}u(t,x)}{\partial t^k \partial x^j}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq c_{k,j}\|(P_0-\lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}, \tag{7}$$

где

$$c_{0,0}=1,\ c_{k,0}=c_{j,0}=c_{k,n}=c_{j,n}=1;\ c_{k,0}=\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n}}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{n-k}{n}}, k=\overline{1,n-1};$$

$$c_{0,j}=\left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{j}{n}}\left(\frac{n-j}{n}\right)^{\frac{n-j}{n}}, j=\overline{1,n-1};\ c_{k,j}=\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n}}\left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{j}{n}}, k+j=n,\ \ k\neq 0,n; j\neq 0,n;$$

$$c_{kj}=\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n}}\left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{j}{n}}, 1\leq k+j\leq n-1\,.$$

Определение 1. Оператор P называется позитивным, если полуось $(-\infty;0] \subset \rho(P)$, где $\rho(P)$ есть множество регулярных точек оператора P, причем

$$\|(P-\lambda E)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq \frac{const}{1+|\lambda|}, \qquad \lambda \leq 0$$

В данной работе мы найдём некоторые условия на коэффициенты оператора P, которые обеспечивают позитивность оператора P. Отметим, что в работах [2-7] получены условия, когда $0 \in \rho(P)$, при $n=4, n=2$, и $n=2m, m=1,2,\dots$.

Сперва докажем, что оператор P_0 определённый равенством (1) позитивен.

Теорема 1. Оператор P_0 позитивен.

Доказательство. Рассмотрим уравнению

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n}+\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial x^n}+A^n u(t,x)-\lambda u(t,x) = f(t,x) \tag{8}$$

где $f(t,x) \in L_2(\mathbb{R}^2;H), u(t,x) \in D(L_0)$. Покажем, что при всех $f(t,x) \in L_2(\mathbb{R}^2;H)$ и $\lambda \leq 0$ уравнение (8) имеет единственное решение $u(t,x) \in D(L_0)$. Обозначим через $\hat{f}(\xi,\eta)$ преобразование Фурье вектор-функции $f(t,x)$, т.е.

$$\hat{f}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t,x)e^{-i(\xi t+\eta t)}\,dtdx$$

Так как $\lambda \leq 0$ и A-положительно-определённый самосопряжённый оператор, то существует ограниченный оператор $(\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1}$.

Тогда можем определить вектор-функции

$$\hat{u}(\xi,\eta) = (\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1}\hat{f}(\xi,\eta)$$

Очевидно, что вектор-функция

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{u}(\xi,\eta)e^{i(\xi t+\eta x)}\,d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} (\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1}\,e^{i(\xi t+\eta x)}d\xi d\eta$$

удовлетворяет уравнение (8) почти всюду в $\mathbb{R}^2$. Покажем, что $u \in D(P_0)$.

По теореме Планшареля получаем, что

$$\|A^n u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} = \|A^n \hat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} =$$

$$= \left\|A^n(\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1}\hat{f}(\xi,\eta)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq$$

$$\sup_{(\xi,\eta)\in R^2} \| A^n(\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1}\|^2 \|\hat{f}(\xi,\eta)\|^2{}_{L_2(R^2;H)} =$$

$$\sup_{(\xi,\eta)\in R^2} \| A^n(\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1}\|^2 \|\hat{f}(t,x)\|^2{}_{L_2(R^2;H)}$$

Так как при любом $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$

$$\|A^n(\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1}\|$$
$$= \sup_{\mu\in\sigma(A)} |\mu^n(\xi^n + \eta^n + \mu^n - \lambda)^{-1}| =$$
$$= \sup\nolimits_{\mu\in\sigma(A)}|\mu^n \cdot (\xi^n + \eta^n + \mu^n + |\lambda|)^{-1}| < 1,$$

то $A^n u(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^2;H)$. Аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} \in L_2(\mathbb{R}^2;H),\ \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \in L_2(\mathbb{R}^2;H).$$

Следовательно $u \in D(P_0) = W_2^n(\mathbb{R}^2;H)$. Таким образом при любом $f(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^2;H)$ существует единственное решение $u(t,x) \in D(P_0)$, т.е. уравнение

$$(P_0 - \lambda E)u = f \tag{9}$$
при всех $\lambda \leq 0$, и $f(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$ имеет решение $u \in D(P_0)$. Тогда

$$u = (P_0 - \lambda E)^{-1} f\ .$$

Используя неравенство (6) из следствия 1 имеем:

$$|\lambda| \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq \|(P_0 - \lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}$$

т.е.

$$|\lambda| \|(P_0 - \lambda E)^{-1} f\ \|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}$$

т.е.

$$\|(P_0 - \lambda E)^{-1}\ \| \leq \frac{const}{1+|\lambda|} \tag{10}$$

Теорема доказана.

Теперь исследуем позитивность оператора *P*.

Имеет место

Теорема 2. Пусть A положительно определённый самосопряжённый оператор, операторы $B_{k,j} = A_{k,j}A^{(k+j)-n}, j = \overline{0,n},\ k = \overline{0,n}$ ограничены в *H* причем их нормы удовлетворяют условие

$$q = \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}} c_{kj} \|B_{kj}\| < 1\,, \left(B_{k,j} = A_{k,j}A^{(k+j)-n}\right)$$

где числа $c_{k,j}$ $\left(k,j = \overline{0,n}\right)$ определены из леммы 2. Тогда оператор *P* является позитивным.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) - \lambda u(t,x) = f(x,t) \tag{11}$$

где $\lambda \leq 0, f(t,x) \in L_2(\mathbb{R}^2; H), u(t,x) \in D(P)$.

Напишем уравнению (10) в операторном виде

$$(P_0 - \lambda E)u + P_1 u = f, \tag{12}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^2; H),\ u \in W_2^n(\mathbb{R}^2; H),\ \lambda \leq 0$.

Так как при $\lambda \leq 0$ оператор $P_0 - \lambda E$ обратим, то обознач, через $(P_0 - \lambda E)u = v$, где $v \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$. Имеем:

$$u = (P_0 - \lambda E)^{-1} v$$

Учитывая это выражение в равенстве (11) имеем:

$$v + P_1(P_0 - \lambda E)^{-1} v = f,$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^2; H),\ v \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$. Теперь оценим норму

$$\|P_1(P_0 - \lambda E)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H) \to L_2(\mathbb{R}^2;H)}$$

Так как при любом $v \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$

$$\|P_1(P_0-\lambda E)^{-1}v\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0\leq k+j\leq 4}}^{n} \left\|A_{k,j}\frac{\partial^{k+j}u(t,x)}{\partial t^k \partial x^j}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0\leq k+j\leq \mathrm{n}}}^{n} \left\|A_{k,j}A^{(k+j)-n}\right\| \left\|A^{n-(k+j)}\frac{\partial^{k+j}u(t,x)}{\partial t^k \partial x^j}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}$$

Используя лемму 1 получаем, что

$$\|P_1(P_0-\lambda E)^{-1}v\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}$$

$$\leq \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0\leq i+j\leq \mathrm{n}}}^{n} \left\|A_{k,j}A^{(k+j)-n}\right\| \cdot c_{kj}\|(P_0-\lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} =$$

$$= q\cdot\|(P_0-\lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} = q\|v\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}$$

Отсюда получаем, что $\|P_1(P_0-\lambda E)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)\to L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq q < 1$.

Тогда получаем, что

$$v = (E + P_1(P_0-\lambda E)^{-1})^{-1}f$$

Следовательно $\|v\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq \frac{1}{1-q}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}$

С другой стороны $v = (E + (P_0-\lambda E)^{-1})^{-1}u$, так как

$$u = (P-\lambda E)^{-1}f = (P_0-\lambda E)^{-1}(E + P_1(P_0-\lambda E)^{-1})^{-1}f,$$

то при $\lambda \leq 0$

$$\|(P_0-\lambda E)^{-1}f\| \leq \|(P_0-\lambda E)^{-1}\|\cdot\frac{1}{1-q}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2;H)}$$

$$\leq \frac{const}{1+|\lambda|}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2;H)}$$

Следовательно при $\lambda \leq 0$

$$\|(P_0-\lambda E)^{-1}\| \leq \frac{const}{1+|\lambda|}$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность проф. С.С.Мирзоеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Madженес Э. Неоднородные границы задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371с.
2. Мирзоев С.С., Сулейманов Н.М. О разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений в частных производных. Вестник Бакинского Университета, 2013, N:2, сер.мат.наук, с.5-12

3. Mirzoyev S.S., Jafarov I.J. 2004: On Solvability of One Boundary Value Problem for Second Order Operator Differential Equation//Transaction of NAS of Azerb. Ser. of Phys. Tech. and Math Sciences, v.24, No 1, pp.177-186.
4. Мирзоев С.С., Джафаров И.Ж. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных// Математические заметки, 2012, т.я., N:3, с.470-472
5. Jafarov I.J. 2004: On Solvability of One Class of Partial Operator-Differential Equation//Proceeding of IMH of NAS of Azerbaijan, Nil, pp. 136-146
6. Ягубова Х.В. Об условиях разрешимости операторно-дифференциальных уравнений в частных производных//Вестник Бакинского Университета, сер.физ.наук., 1998, N:3, с.94-101
7. Мирзоев С.С., Исмагилова М.Ф. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнения в частных производных четвёртого порядка в гильбертово пространстве// Вестник Бакинского Университета, сер.физ.мат.наук, 2006, N:4, с.5-11

BİR POZİTİV OPERATOR HAQQINDA

N.M.SÜLEYMANOV

XÜLASƏ

İşdə bir sinif xüsusi törəməli operator-diferensial ifadənin törətdiyi operatorun pozitiv olması haqqında kafi şərtlər tapılmışdır. Bu şərtlər verilən operator-diferensial ifadənin əmsallarının xassələri ilə ifadə olunur.

Açar sözlər. Hilbert fəzası, operator-diferensial ifadə, requlyar nöqtələr, pozitiv operator.

ON ONE POSITIVE OPERATOR

N.M.SULEYMANOV

SUMMARY

In this paper we obtain sufficient conditions that ensure the positivity of some classes of operators generated by systems of operator-differential expressions in partial derivatives. These conditions are expressed by the properties of the operator coefficients of this differential expression.

Key words. Hilbert space, operator-differential expression, regulated points, positive operator.

Поступила в редакцию: 19.03.2019 г.
Подписано к печати: 08.04.2019 г.