BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРА

К.Б.МАНСИМОВ[*,], М.У.ЧЫРАХОВА[*]**

[*]Институт Систем Управления НАН Азербайджана

[**]Бакинский Государственный Университет

kamilbmansimov@gmail.com

kmansimov@mail.ru

Рассмотрена задача оптимального управления, описываемая системой нелинейных разностных уравнений Вольтерра. Доказаны аналоги принципа максимума Понтрягина и линеаризованного условия максимума. Выведен аналог уравнения Эйлера. Изучен случай вырождения принципа максимума, линеаризованного условия максимума. Установлены необходимые условия оптимальности второго порядка.

Ключевые слова: разностное уравнение Вольтерра, необходимое условие оптимальности, дискретный принцип максимума, аналог уравнения Эйлера, особые управления.

1. Введение. Среди задач оптимального управления особое место занимают задачи управления, описываемые интегральными уравнениями Вольтерра, которые играют важную роль при моделировании многих реальных процессов из механики сплошной среды, биомеханики, теории популяции и др. (см. напр. [1-9]).

В работах [1-9] и др. изучены задачи оптимального управления, описываемыми интегральными уравнениями Вольтерра. Установлены необходимые и в некоторых случаях достаточные условия оптимальности, доказаны теоремы существования оптимальных решений.

В отличие от непрерывного случая, задачи управления, описываемые разностными уравнениями Вольтерра, очень мало изучены. В этом направлении отметим работы [10, 11], в которых рассматриваются задачи оптимального управления процессами, описываемые разностным аналогом интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра.Изучены вопросы связанные с управляемостью, а в случае квадратичного критерия качества установлены необходимые условия оптимальности первого порядка. Предлагаемая работа посвящена постановке и исследованию одной задачи оптимального управления, системой нелинейных разностных уравнений типа Вольтерра, представляющий собой разностный аналог задачи оптимального управления, описываемый системой нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра с нелинейным функционалом качества.

Заметим, что исследованию задач оптимального управления описываемые разностным аналогом дифференциальных уравнений, начиная с работы [12] Л.И.Розоноэра, посвящены много работ. Установлены различные необходимые условия оптимальности первого порядка (см. напр. [13-22]), изучены случаи их вырождения (особый случай). Исследованию случаев выраждения необходимых условий оптимальности первого порядка в дискретных системах начата с работ Р.Габасова и Ф.М. Кирилловой [21]. Ими для исследования особых управлений и вывода необходимых условий оптимальности второго порядка (случай открытой области управления) был предложен, так называемый, метод матричных импульсов. В дальнейшем результаты работы [21] были развиты и обобщены в работах [22 -25] и др. Но метод матричных импульсов не применим для вывода необходимых условий оптимальности особых управлений в рассматриваемой задаче. Поэтому, применяем дискретный аналог метода, предложенный нами в работах [26-29] и др.

Сначала доказано необходимое условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума Понтрягина. Затем рассмотрен случай вырождения дискретного условия максимума (особый случай). Далее доказан линеаризованный принцип максимума и выведен аналог уравнения Эйлера. Установлены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений, доказаны необходимые условия оптимальности второго порядка.

2. Постановка задачи. Допустим, что управляемый дискретный процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений.

$$x(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t} f\big(t,\tau,x(\tau),u(\tau)\big), \quad t\in T=\{t_0,t_0+1,\dots,t_1\}. \tag{2.1}$$

Здесь t_0, t_1 – заданные числа, причем разность t_1-t_0 – есть натуральное число, $f(t,\tau,x,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x до второго порядка включительно, $u(t)$ – r-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U\subset R^r$, т.е.

$$u(t)\in U\subset R^r, \quad t\in T. \tag{2.2}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$, $t \in T$ соответствует единственное дискретное решение $x(t)$, $t \in T$ уравнения (2.1).

Существование, ограниченность, устойчивость и единственность решений разностных уравнений Вольтерра вида (2.1) при некоторых предположениях изучены в работах [30-38] и др.

На решениях уравнения (2.1), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим терминальный функционал

$$S(u) = \varphi(x(t_1)). \tag{2.3}$$

Здесь $\varphi(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Задача заключается в минимизации терминального функционала (2.3) при ограничениях (2.1), (2.2) (задача (2.1)-(2.3)).

Нашей целью является вывод необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче.

3. Специальное приращение функционала качества. Пусть $u(t)$ фиксированное допустимое управление, а $x(t)$ соответствующее ему решение уравнения (2.1).

Предположим, что множество

$$f(t,\tau,x(\tau),U) = \{\alpha \in R^n : \alpha = f(t,\tau,x(\tau),v),\ v \in U\} \tag{3.1}$$

выпукло при всех t,τ.

Выпуклость множества (3.1) означает, что если $u(\tau) \in U$, $v(\tau) \in V$, $\tau,t \in T$ допустимые управления, то существует такое допустимое управление $u(\tau:\varepsilon) \in U$, $\tau \in T$ $(0 \le \varepsilon \le 1)$ что

$$f(t,\tau,x(\tau;\varepsilon),u(\tau;\varepsilon)) = \varepsilon f(t,\tau,x(\tau;\varepsilon),v(\tau)) + (1-\varepsilon) f(t,\tau,x(\tau;\varepsilon),u(\tau)).$$

В силу этого существует допустимый процесс $(u(t;\varepsilon),x(t;\varepsilon))$ такой, что

$$\begin{gathered} x(t;\varepsilon) = \sum_{\tau=t_0}^{t} f(t,\tau,x(\tau;\varepsilon),u(\tau;\varepsilon)) \equiv \\ \equiv \sum_{\tau=t_0}^{t} [\varepsilon f(t,\tau,x(\tau;\varepsilon),v(\tau)) + (1-\varepsilon) f(t,\tau,x(\tau;\varepsilon),u(\tau))], \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\varepsilon \in [0,1]$ произвольное число, а $v(t) \in U$, $t \in T$ произвольное допустимое управление.

Из (3.2) ясно, что $x(t;0) = x(t)$.

Из условий гладкости наложенные на правую часть системы (2.1) следует существование производных $\partial x(t;\varepsilon)/\partial\varepsilon, \partial^2 x(t;\varepsilon)/\partial\varepsilon^2$.

Пусть по определению

$$z(t)=\left.\frac{\partial x(t\,;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}; \qquad y(t)=\left.\frac{\partial^2 x(t\,;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}; \tag{3.3}$$

$$\Delta_{v(\tau)} f(t,\tau,x(\tau),u(\tau)) \equiv f(t,\tau,x(\tau),v(\tau)) - f(t,\tau,x(\tau),u(\tau)).$$

Используя (3.2) доказывается, что $z(t)$ и $y(t)$ являются решениями следующих задач соответственно:

$$z(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[f_x(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau)+\Delta_{v(\tau)} f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\right], \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered} y(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[f_x(t,\tau,x(\tau),u(\tau))y(\tau)+2\,\Delta_{v(\tau)} f_x(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau)+\right.\\ \left.+\,z'(\tau)\,f_{xx}(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau)\right]. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Далее применяя формулу Тейлора специальное приращение функционала качества (2.3), соответствующее допустимым управлениям $u(t)$ и $u(t\,;\,\varepsilon)$, записывается в виде

$$\begin{gathered} \Delta S_\varepsilon(u(t)) = S(u(t\,;\,\varepsilon)) - S(u(t)) = \varphi(x(t_1\,;\,\varepsilon)) - \varphi(x(t_1)) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}(\varphi(x(t_1\,;\,\varepsilon)))\right|_{\varepsilon=0} + \\ + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2}{d\varepsilon^2}(\varphi(x(t_1\,;\,\varepsilon)))\right|_{\varepsilon=0} + 0(\varepsilon^2) = \varepsilon\frac{\partial\varphi'(x(t_1))}{\partial x}z(t_1) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial\varphi'(x(t_1))}{\partial x}y(t_1) + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon^2 z'(t_1)\frac{\partial^2\varphi(x(t_1))}{\partial x^2}z(t_1) + 0(\varepsilon^2). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Введем аналог функции Гамильтона-Понтрягина

$$H(t,x(t),u(t),\psi(t)) = \sum_{\tau=t}^{t_1}\psi'(\tau)\,f(\tau,t,x(t),u(t)) - \varphi_x'(x(t_1))\,f(t_1,t,x(t),u(t)),$$

где $\psi(t)$ n-мерная вектор-функция, являющаяся решением уравнения

$$\psi(t) = H_x(t,x(t),u(t),\psi(t)). \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) является линейным неоднородным разностным уравнением типа Вольтерра относительно $\psi(t)$.

Из соотношений (3.4), (3.5) ясно, что

$$\begin{gathered} \sum_{t=t_0}^{t_1}\psi'(t)z(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\psi'(t)\,f_x(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau)\right] + \\ + \sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\psi'(t)\Delta_{v(\tau)} f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\right], \end{gathered} \tag{3.8}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\psi'(t)y(t)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\psi'(t)f_x(t,\tau,x(\tau),u(\tau))y(\tau)+2\psi'(t)\Delta_{v(\tau)}f_x(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+z'(\tau)\psi'(t)f_{xx}(t,\tau,x(\tau),v(\tau))z(\tau)\right]\right]. \qquad (3.9)$$

Применяя тождество (7) из [34, стр. 43] доказывается справедливость соотношений

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\psi'(t)f_x(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau)\right]+\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\psi'(t)\Delta_{v(\tau)}f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\right]=$$
$$=\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1}\psi'(\tau)f_x(\tau,t,x(\tau),u(\tau))\right]z(t)+\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1}\psi'(\tau)\,\Delta_{v(t)}f(\tau,t,x(t),u(t))\right], \qquad (3.10)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\psi'(t)f_x(t,\tau,x(\tau),u(\tau))y(\tau)+2\psi'(t)\Delta_{v(\tau)}f_x(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+z'(\tau)\psi'(t)f_{xx}(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau)\right]\right]=\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1}\psi'(\tau)f_x(\tau,t,x(t),u(t))y(t)+\right. \qquad (3.11)$$
$$\left.+2\psi'(\tau)\Delta_{v(t)}f_x(\tau,t,x(t),u(t))z(t)+z'(t)\psi'(\tau)f_{xx}(\tau,t,x(t),u(t))z(t)\right].$$

Далее из (3.4), (3.5) ясно, что

$$z(t_1)=\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[f_x(t_1,t,x(t),u(t))z(t)+\Delta_{v(t)}f(t_1,t,x(t),u(t))\right], \qquad (3.12)$$

$$y(t_1)=\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[f_x(t_1,t,x(t),u(t))y(t)+2\Delta_{v(t)}f_x(t_1,t,x(t),u(t))z(t)+\right.$$
$$\left.+z'(t)f_{xx}(t_1,t,x(t),u(t))z(t)\right]. \qquad (3.13)$$

Принимая во внимание выражение функции Гамильтона-Понтрягина, сопряженную систему (3.7) и тождества (3.10)-(3.13) специальное приращение (3.6) функционала качества представляется в виде

$$\Delta S_\varepsilon(u(t))=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}\Delta_{v(t)}H(t,x(t),u(t),\psi(t))+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left[z'(t_1)\phi_{xx}(x(t_1))z(t_1)-\sum_{t=t_0}^{t_1}z'(t)H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t))z(t)-\right. \qquad (3.14)$$
$$\left.-2\sum_{t=t_0}^{t_1}\Delta_{v(t)}H_x'(t,x(t),u(t),\psi(t))z(t)\right]+0(\varepsilon^2).$$

4. Необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина и исследование особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений. Разложение (3.14) позволяет получить необходимое условие оптимальности в форме дискретного условия максимума.

Теорема 4.1. Если множество (3.1) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x(t), u(t), \psi(t)) \le 0\,, \tag{4.1}$$

выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Неравенство (4.1) представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка и является аналогом дискретного принципа максимума [13, 15, 26 ,39] в задаче (2.1)-(2.3).

Изучим случай вырождения условия максимума (4.1).

Определение 4.1. Следуя, например [21, 22, 26,] и др. допустимое управление $u(t)$ назовем особым в смысле принципа максимума Понтрягина управлением, если для всех $v(t) \in U$, $t \in T$,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = 0\,. \tag{4.2}$$

Случай выполнения условия (4.2) назовем особым случаем.

При выполнении соотношения (4.2), условие максимума теряет свое содержательное значение. Поэтому, надо иметь новое необходимое условие оптимальности.

В особом случае, из разложения (3.14), в силу произвольности $\varepsilon \in [0,1]$ следует

Теорема 4.2. Если множество (3.1) выпукло, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{gathered} z'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))z(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1} z'(t) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) z(t) - \\ - 2\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H'_x(t, x(t), u(t), \psi(t)) z(t) \ge 0 \end{gathered} \tag{4.3}$$

выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Неравенство (4.3) является довольно общим, но вместе с тем неявным необходимым условием оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений. Но, в ряде случаев удается получить необходимые условия оптимальности, непосредственно выраженные через параметры задачи (2.1)-(2.3).

Через $R(\tau,t)$ обозначим $(n\times n)$ матричную функцию, являющуюся решением разностного уравнения Вольтерра.

$$R(\tau,t)=\sum_{s=t}^{\tau}R(\tau,s)\,f_x(s,t,x(t),u(t))-f_x(\tau,t,x(t),u(t)),\quad t_0\le t\le\tau. \quad (4.4)$$

Решение $R(\tau,t)$ уравнения (4.4) называется резольвентой уравнения (3.4) (см. напр. [34]).

Можно показать [34], что матричная функция $R(\tau,t)$ является также решением уравнения

$$R(\tau,t)=\sum_{s=t}^{\tau}f_x(\tau,s,x(s),u(s))R(s,t)-f_x(\tau,t,x(t),u(t)). \quad (4.5)$$

Уравнения (4.4), (4.5) называются уравнениями резольвенты. Решение $x(t)$ уравнения (3.4) допускает представление [34, 35]

$$z(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\Delta_{v(\tau)}f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))-\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\sum_{s=t_0}^{\tau}R(t,\tau)\Delta_{v(s)}f(\tau,s,x(s),u(s))\right].$$

С учетом тождества (2) из [34, стр. 43] полученное представление преобразуется к виду

$$z(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\Delta_{v(\tau)}f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))-\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\sum_{s=\tau}^{t}R(t,s)\Delta_{v(\tau)}f(s,\tau,x(\tau),u(\tau))\right]. \quad (4.6)$$

Пусть

$$f(t,\tau,x,u)=A(t,\tau)g(\tau,x,u). \quad (4.7)$$

Здесь $A(t,\tau)$ – заданная $(n\times n)$ матричная функция.

Тогда представление (4.6) примет вид

$$z(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}A(t,\tau)\Delta_{v(\tau)}g(\tau,x(\tau),u(\tau))-\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\sum_{s=\tau}^{t}R(t,s)A(s,\tau)\Delta_{v(\tau)}g(\tau,x(\tau),u(\tau))\right]=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[A(t,\tau)-\sum_{s=\tau}^{t}R(t,s)A(s,\tau)\right]\Delta_{v(\tau)}g(\tau,x(\tau),u(\tau))=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t}Q_1(t,\tau)\Delta_{v(\tau)}g(\tau,x(\tau),u(\tau)).$$

Здесь по определению

$$Q_1(t,\tau)=A(t,\tau)-\sum_{s=\tau}^{t}R(t,s)A(s,\tau).$$

Далее по схеме работ [26-29] получаем

$$z'(t_1)\phi_{xx}(x(t_1))z(t_1)= \quad (4.8)$$

$$=\sum_{\alpha=t_0}^{t_1}\sum_{\beta=t_0}^{t_1}\Delta_{v(\alpha)}g(\alpha,x(\alpha),u(\alpha))Q_1'(t_1,\alpha)\phi_{xx}(x(t_1))Q_1(t_1,\beta)\Delta_{v(\beta)}g(\beta,x(\beta),u(\beta)),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\Delta_{v(t)}H_x'(t,x(t),u(t),\psi(t))z(t)= \tag{4.9}$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\Delta_{v(t)}H_x'(t,x(t),u(t),\psi(t))Q_1(t,\tau)\Delta_{v(\tau)}g(\tau,x(\tau),u(\tau))\right],$$

$$\begin{gathered}\sum_{t=t_0}^{t_1}z'(t)H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t))z(t)=\sum_{\alpha=t_0}^{t_1}\sum_{\beta=t_0}^{t_1}\Delta_{v(\alpha)}g'(\alpha,x(\alpha),u(\alpha))\times\\ \times\left[\sum_{t=max(\alpha,\beta)}^{t_1}Q_1'(t,\alpha)H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t))Q_1(t,\beta)\right]\Delta_{v(\beta)}g(\beta,x(\beta),u(\beta)).\end{gathered} \tag{4.10}$$

Положим

$$\begin{gathered}K_1(\alpha,\beta)=-Q_1'(t_1,\alpha)\phi_{xx}(x(t_1))Q_1(t_1,\beta)+\\ +\sum_{t=max(\alpha,\beta)}^{t_1}Q_1'(t,\alpha)H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t))Q_1(t,\beta).\end{gathered} \tag{4.11}$$

Принимая во внимание обозначение (4.11) и тождества (4.8)-(4.10) из неравенства (4.3) получаем,что

$$\begin{gathered}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1}\sum_{\beta=t_0}^{t_1}\Delta_{v(\alpha)}g'(\alpha,x(\alpha),u(\alpha))K_1(\alpha,\beta)\Delta_{v(\beta)}g(\beta,x(\beta),u(\beta))+\\ +2\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\Delta_{v(t)}H_x'(t,x(t),u(t),\psi(t))Q_1(t,\tau)\Delta_{v(\tau)}g(\tau,x(\tau),u(\tau))\right]\le 0\ .\end{gathered} \tag{4.12}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 4.3. Если множество (3.1) выпукло, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.3), (4.7) необходимо, чтобы неравенство (4.12) выполнялось для всех $v(t)\in U$, $t\in T$.

Частным случаем теоремы 4.3 является следующее утверждение.

Теорема 4.4. При выполнении условий теоремы 4.3 для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.4), (4.7) необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{gathered}\Delta_w g'(\theta,x(\theta),u(\theta))K_1(\theta,\theta)\Delta_w g(\theta,x(\theta),u(\theta))+\\ +2\Delta_w H_x'(\theta,x(\theta),u(\theta),\psi(\theta))Q_1(\theta,\theta)\Delta_w g(\theta,x(\theta),u(\theta))\le 0\ .\end{gathered} \tag{4.13}$$

выполнялось для всех $\theta\in T$ и $w\in U$.

Неравенство (4.13) есть аналог условия Габасова-Кирилловой из [20,21], доказанный методом матричных импульсов.

Заметим, что условие оптимальности (4.12) сохраняет свое содержательное значение также при вырождении аналога условия Габасова-Кирилловой (4.13).

5. Линеаризованный принцип максимума и квазиособые управления. Предположим, что $f(t,\tau,x,u)$ – непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (x,u) до второго порядка включительно, а $U \subset R^r$ выпуклое множество. Пусть $(u(t),x(t))$ – фиксированный допустимый процесс.

В силу выпуклости области управления U «возмущенное» управление $u(t;\mu)$ можно определить по формуле

$$u(t;\mu)=u(t)+\mu[v(t)-u(t)], \quad t \in T. \tag{5.1}$$

Здесь $\mu \in [0,1]$ произвольное число, а $v(t) \in U$, $t \in T$ произвольное допустимое управление.

Через $x(t;\mu)$ обозначим решение уравнения (2.1) соответствующее возмущенному управлению $u(t;\mu)$, определяемое формулой (5.1).

Тогда ясно, что

$$\begin{aligned} x(t;\mu) &= \sum_{\tau=t_0}^{t} f(t,\tau,x(\tau;\mu),u(\tau;\mu)) \equiv \\ &\equiv \sum_{\tau=t_0}^{t} f(t,\tau,x(\tau;\mu),u(\tau)+\mu[v(\tau)-u(\tau)]). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Положим по определению

$$y(t)=\left.\frac{\partial x(t;\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}; \qquad z(t)=\left.\frac{\partial^2 x(t;\mu)}{\partial \mu^2}\right|_{\mu=0}. \tag{5.3}$$

Используя (5.2) получаем, что $y(t)$ и $z(t)$ определяемые формулами (5.3) являются, соответственно решениями уравнений

$$y(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[f_x(t,\tau,x(\tau),u(\tau))+f_u(t,\tau,x(\tau),u(\tau))(v(\tau)-u(\tau))\right], \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} z(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\Big[& f_x(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau)+2(v(\tau)-u(\tau))' f_{ux}(t,\tau,x(\tau),u(\tau))y(\tau)+ \\ & +(v(\tau)-u(\tau))' f_{uu}(t,\tau,x(\tau),u(\tau))(v(\tau)-u(\tau))+y'(\tau) f_{xx}(t,\tau,x(\tau),u(\tau))y(\tau)\Big]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Далее, используя формулу Тейлора, вычислим специальное приращение критерия качества (2.3), соответствующее специальному приращению (5.1) управления $u(t)$.

В результате получим

$$\Delta S_\mu(u(t)) = S(u(t)+\Delta u(t;\,\mu)) - S(u(t)) = \mu\,\varphi_x'(x(t_1))\,y(t_1) +$$
$$+\frac{\mu^2}{2}\varphi_x'(x(t_1))\,z(t_1) + \frac{\mu^2}{2}y'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\,y(t_1) + 0(\mu^2)\,. \tag{5.6}$$

Принимая во внимание сопряженную систему (3.7) и соотношения (5.4)-(5.5), по аналогии с параграфом 3, разложение (5.6) представляется в виде

$$\Delta S_\mu(u(t)) = -\mu\sum_{t=t_0}^{t_1} H_u'(t,x(t),u(t),\psi(t))(v(t)-u(t)) +$$
$$+\frac{\mu^2}{2}\Bigg[y'(t_1)\phi_{xx}(x(t_1))\,y(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1}\big[y'(t)H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t))\,y(t)+$$
$$+2(v(t)-u(t))'\,H_{ux}(t,x(t),u(t),\psi(t))\,y(t)+$$
$$+(v(t)-u(t))'\,H_{uu}(t,x(t),u(t),\psi(t))(v(t)-u(t))\big]\Bigg] + 0(\mu^2). \tag{5.7}$$

Из разложения (5.7) сразу следует

Теорема 5.1. Если множество U выпукло, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} H_u'(t,x(t),u(t),\psi(t))(v(t)-u(t)) \le 0 \tag{5.8}$$

выполнялось для всех $v(t)\in U$, $t\in T$.

Соотношение (5.8) представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка в форме линеаризованного условия максимума [13-15, 20-24].

Рассмотрим случай вырождения необходимого условия оптимальности (5.8).

Определение 5.1. Допустимое управление $u(t)$ назовем квазиособым управлением в задаче (1.1)-(1.3), если для всех $v(t)\in U$, $t\in T$,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} H_u'(t,x(t),u(t),\psi(t))(v(t)-u(t)) = 0\,.$$

Ясно, что для квазиособого управления линеаризованный принцип максимума выполняется тривиальным образом. Поэтому для проверки оптимальности квазиособых управлений надо иметь новые необходимые условия оптимальности.

Из разложения (5.7) в силу произвольности $\mu\in[0,1]$ следует следующее неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Теорема 5.2. Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы неравенство

$$y'(t_1)\phi_{xx}(x(t_1))y(t_1)-\sum_{t=t_0}^{t_1}\Big[y'(t)H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t))y(t)-2(v(t)-u(t))'\times \tag{5.9}$$

$$\times H_{ux}(t,x(t),u(t),\psi(t))y(t)+(v(t)-u(t))'H_{uu}(t,x(t),u(t),\psi(t))(v(t)-u(t))\Big]\geq 0$$

выполнялось для всех $v(t)\in U$, $t\in T$.

Неравенство (5.9) является неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Опираясь на него, удается получить необходимые условия оптимальности носящие конструктивный характер.

Система уравнений (5.4) является линейной системой разностных уравнений типа Вольтерра.

Используя результат работы [34], решение этого уравнения представляется в виде

$$\begin{aligned} y(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t} f_u(t,\tau,x(\tau),u(\tau))(v(\tau)-u(\tau))-\\ -\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\sum_{s=\tau}^{t}R(t,s)\,f_u(s,\tau,x(\tau),u(\tau))\right](v(\tau)-u(\tau))\,, \end{aligned} \tag{5.10}$$

где $R(\tau,t)$ есть решение уравнения (4.4).

Полагая

$$Q_2(t,\tau)=f_u(t,\tau,x(\tau),u(\tau))-\sum_{s=\tau}^{t}R(t,s)\,f_u(s,\tau,x(\tau),u(\tau)),$$

из (5.10) получим

$$y(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}Q_2(t,\tau)(v(\tau)-u(\tau)). \tag{5.11}$$

Положим

$$\begin{aligned} K_2(\tau,s)=-Q_2'(t_1,\tau)\phi_{xx}(x(t_1))Q_2(t_1,s)+\\ +\sum_{t=max(\tau,s)}^{t_1}Q_2'(t,\tau)H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t))Q_2(t,s). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Принимая во внимание обозначение (5.12) при помощи (5.11) неравенство (5.9) представляется в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=t_0}^{t_1}\sum_{s=t_0}^{t_1}(v(\tau)-u(\tau))'K_2(\tau,s)(v(s)-u(s))+\\ +2\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}(v(t)-u(t))'H_{ux}(t,x(t),u(t),\psi(t))Q_2(t,\tau)(v(\tau)-u(\tau))\right]+ \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1}(v(t)-u(t))' H_{uu}(t,x(t),u(t),\psi(t))(v(t)-u(t))\le 0 .$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 5.3. При сделанных предположениях для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы неравенство (5.13) выполнялось для всех $v(t)\in R^r$, $t\in T$.

Заметим, что из теоремы 5.3 следует более легко проверяемые необходимые условия оптимальности.

Приведем одно из них.

Теорема 5.4. При сделанных предположениях для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{gathered}(w-u(\theta))' [K_2(\theta,\theta)+2H_{ux}(\theta,x(\theta),u(\theta),\psi(\theta))Q_2(\theta,\theta)+\\ +H_{uu}(\theta,x(\theta),u(\theta),\psi(\theta))](w-u(\theta))\le 0\end{gathered} \tag{5.14}$$

выполнялось для всех $w\in U$, $\theta\in T$.

Соотношение (5.14) является аналогом условия оптимальности Габасова-Кирилловой из [20, 21].

6. Необходимое условие оптимальности первого и второго порядков в случае открытости области управления. Пусть в задаче (2.1)-(2.3) вектор-функция $f(t,\tau,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (x,u) до второго порядка включительно, а U – заданное непустое, ограниченное и открытое множество.

Пусть $(u(t),x(t))$ – фиксированный допустимый процесс. В силу открытости области управления U существует «возмущенный» процесс $(u(t;\varepsilon),x(t;\varepsilon))$ такой, что

$$\begin{gathered}x(t;\varepsilon)=\sum_{\tau=t_0}^{t} f(t,\tau,x(\tau;\varepsilon),u(\tau;\varepsilon))\equiv\\ \equiv\sum_{\tau=t_0}^{t} f(t,\tau,x(\tau;\varepsilon),u(\tau)+\varepsilon\delta u(\tau)),\ t\in T,\end{gathered} \tag{6.1}$$

где ε – произвольное достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T$ произвольная r-мерная ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управления $u(t)$).

Положим

$$y(t)=\left.\frac{\partial x(t;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}; \qquad z(t)=\left.\frac{\partial^2 x(t;\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{6.2}$$

Используя (6.1) получаем, что вектор-функции $y(t)$ и $z(t)$ определенные формулами (6.2) являются соответственно решениями следующих уравнений:

$$y(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\frac{\partial f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))}{\partial x}y(\tau)+\frac{\partial f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))}{\partial u}\delta u(\tau)\right], \qquad (6.3)$$

$$\begin{gathered}z(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\frac{\partial f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))}{\partial x}z(\tau)+y'(\tau)\frac{\partial^2 f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))}{\partial x^2}y(\tau)+\right.\\ \left.+2\,\delta u'(\tau)\frac{\partial^2 f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))}{\partial u\,\partial x}\delta x(\tau)+\delta u'(\tau)\frac{\partial^2 f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))}{\partial u^2}\delta u(\tau)\right].\end{gathered} \qquad (6.4)$$

Уравнение (6.3) является аналогом уравнения в вариациях [21, 22, 26, 27, 40], а уравнение (6.4) назовем уравнением в вариациях второго порядка.

Используя формулу Тейлора и учитывая (6.2) специальное приращение критерия качества (2.3) записывается в виде

$$\begin{gathered}\Delta S_\varepsilon(u(t))=S(u(t\,;\,\varepsilon))-S(u(t))=\varepsilon\frac{\partial\varphi'(x(t_1))}{\partial x}y(t_1)+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial\varphi'(x(t_1))}{\partial x}z(t_1)+\\ +\frac{1}{2}\varepsilon^2\,y'(t_1)\frac{\partial^2\varphi(x(t_1))}{\partial x^2}y(t_1)+0(\varepsilon^2).\end{gathered} \qquad (6.5)$$

Учитывая, что $\psi(t)$ является решением сопряженного уравнения (3.7), специальное приращение (6.5) функционала качества (2.1) представляется в виде

$$\Delta S_\varepsilon(u(t))=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}H_u'(t,x(t),u(t),\psi(t))\delta u(t)+ \qquad (6.6)$$

$$\begin{gathered}+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{y'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))y(t_1)-\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[y'(t)H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t))y(t)+\right.\right.\\ \left.\left.+2\,\delta u'(t)H_{ux}(t,x(t),u(t),\psi(t))y(t)+\delta u'(t)H_{uu}(t,x(t),u(t),\psi(t))\delta u(t)\right]\right\}+0(\varepsilon^2).\end{gathered}$$

Известно [40-43], что в случае открытости области управления для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче о минимуме функционала необходимо, чтобы первая вариация $(\delta^1 S(u:\delta u))$ минимизируемого функционала равнялась нулю, а вторая $(\delta^2 S(u:\delta u))$ была неотрицательной.

Поэтому из разложения (6.6) следует, что вдоль оптимального в задаче (2.1)-(2.3) процесса $(u(t),x(t))$ соотношения

$$\delta^1 S(u;\,\delta u)=-\sum_{t=t_0}^{t_1}H_u'(t,x(t),u(t),\psi(t))\delta u(t)=0\,, \qquad (6.7)$$

$$\delta^2 S(u:\delta u)=y'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))y(t_1)-\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[y'(t)H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t))y(t)+\right.$$
$$\left.+2\delta u'(t)H_{ux}(t,x(t),u(t),\psi(t))y(t)+\delta u'(t)H_{uu}(t,x(t),u(t),\psi(t))\delta u(t)\right]\geq 0 \qquad (6.8)$$

выполняются для всех $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T$.

Соотношения (6.7), (6.8) являются неявными необходимыми условиями оптимальности первого и второго порядка соответственно. Используя их перейдем к получению необходимых условий оптимальности, непосредственно выраженные через параметры задачи (2.1)-(2.3).

Из (6.13) в силу произвольности допустимой вариации $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T$ следует, что

$$H_u(\theta,x(\theta),u(\theta),\psi(\theta))=0\,. \qquad (6.9)$$

Теорема 6.1. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы соотношение (6.9) выполнялось для всех $\theta\in T$.

Соотношение (6.9) есть аналог уравнения Эйлера, и является необходимым условием оптимальности первого порядка.

Определение 6.1. Каждое допустимое управление, удовлетворяющее уравнению Эйлера, назовем классической экстремалью.

Ясно, что оптимальное управление находится среди классических экстремалей. Но не каждая классическая экстремаль является оптимальной. Поэтому надо иметь новые необходимые условия оптимальности (необходимые условия оптимальности второго порядка), позволяющие существенно сузить множество классических экстремалей подозрительных на оптимальность.

Уравнение (6.3) является линейным неоднородным разностным уравнением типа Вольтерра относительно $y(t)$.

Используя формулу о представлении решений подобных уравнений [34] имеем

$$y(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t} f_u(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\delta u(\tau)-\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\sum_{s=\tau}^{t}R(t,s)\,f_u(s,\tau,x(\tau),u(\tau))\right]\delta u(\tau), \qquad (6.10)$$

где $R(\tau,t)$ – решение уравнения (4.4).

С учетом (5.11) представление (6.10) записывается в виде

$$y(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}Q_2(t,\tau)\delta u(\tau). \qquad (6.11)$$

При помощи представления (6.11) получаем, что

$$y'(t_1)\phi_{xx}(x(t_1))y(t_1)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1}\sum_{s=t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)Q_2'(t_1,\tau)\phi_{xx}(x(t_1))Q_2(t_1,s)\delta u(s), \qquad (6.12)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\delta u'(t)H_{ux}(t,x(t),u(t),\psi(t))\,y(t)=$$
$$=\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\delta u'(t)H_{ux}(t,x(t),u(t),\psi(t))Q_2(t,\tau)\delta u(\tau)\right]. \tag{6.13}$$

Наконец по аналогии с [26-29] имеем

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}y'(t)H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t))\,y(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1}\sum_{s=t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)\times$$
$$\times\left[\sum_{t=max(\tau,s)}^{t_1}Q_2'(t,\tau)H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t))Q_2(t,s)\right]\delta u(s). \tag{6.14}$$

Принимая во внимания тождества (6.12)-(6.14) в (6.8) получаем, что вдоль оптимального процесса $(u(t),x(t))$

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1}\sum_{s=t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)K_2(\tau,s)\delta u(s)+\sum_{t=t_0}^{t_1}\delta u'(t)H_{uu}(t,x(t),u(t),\psi(t))\delta u(t)+$$
$$+2\sum_{t=t_0}^{t_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\delta u'(t)H_{ux}(t,x(t),u(t),\psi(t))Q_2(t,\tau)\delta u(\tau)\right]\le 0\ . \tag{6.15}$$

Сформулируем полученный результат.

Теоремы 6.2. Для оптимальности классической экстремали $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство (6.15) выполнялось для всех $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T$.

Замечания 6.1. Предположим, что в задаче (2.1)-(2.4) правая часть системы уравнений и критерий качества линейны по x, то есть рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u)=c'x(t_1),$$
$$u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in T,$$
$$x(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[A(t,\tau)x(\tau)+g(t,\tau,u(\tau))\right].$$

Здесь c – заданный постоянный вектор, $A(t,\tau)$ – заданная $(n\times n)$ дискретная матричная функция, $g(t,\tau,u)$ – заданная n-мерная непрерывная функция по совокупности переменных, а остальные данные задачи аналогичны данным задачи (2.1)-(2.3).

Нетрудно заметить, что в случае этой задачи принцип максимума Понтрягина является не только необходимым но и достаточным условиям оптимальности. При этом выпуклость множества

$$g(t,\tau,U)=\{\alpha:\alpha=g(t,\tau,v),v\in U\}$$

не требуется.

Заключение. В статье рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой нелинейных разностных уравнений типа Вольтерра. При различных предположениях на данные задачи доказан аналог дискретного принципа максимума Понтрягина, выведен аналог линеаризованного условия максимума, установлен аналог уравнения Эйлера. Исследован случаи вырождения (т.е. тривиального выполнения) принципа максимума Понтрягина и линеаризованного условия максимума. В случае открытости области управления выведены различные необходимые условия оптимальности второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 628 с.
2. Винокуров В.Р. Оптимальное управление системами, описываемыми интегральными уравнениями // Изв. Вузов. Сер. Мат. 1967, № 7, с. 21-33.
3. Carlson D.A. 1983: An Elementary Proof of the Maximum Principle for Optimal Control Problems governed by a Volterra Integral Equations // Journal Optimiz. Theory and Appl. v. 54, No 1, pp. 43-61.
4. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптималь-ности второго порядка для процессов, описываемых системой нелинейных интегральных уравнений типа Вольтера // Автоматика и телемеханика, 2000, № 1, с. 3-11.
5. Dela. Vega C. 2006: Necessary Conditions for Optimal Terminal Time Control Problems governed by a Volterra Integral Equations // Journ. of Optimiz. Theory and Appl. v. 130, No 1. pp. 79-83.
6. Burnap C., Kazemi M.A. 1999: Optimal Control of a System governed by Nonlinear Volterra Integral Equations with Delay // IMA J. Math. Control Info. v. 15, No 1. pp. 1-17.
7. Yatsenko Yu., Haritonenko N. 2005: Maximum Principle for Integral Dynamic Models with Endogenous Delay // Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems. Series A. Mathematical Analysis. v. 12, No 2. pp. 469-477.
8. Belbas S.A. 2007: A New Method for Optimal Control of Volterra Integral Equations // Applied Mathematics and Computation. v. 189, No 3. pp. 1902-1915.
9. Elnagar G.N., Kazemi M.A. 2000: Necessary and Sufficient Optimality Conditions for Control Systems described by Integral Equations with Delay // J. Korean Math. Soc. v. 37, No 4. pp. 625-643.
10. Дымков М.П. Оптимальное управление дискретной системой Вольтерра по квадратичному функционалу // Докл. АН Беларуси. 1997, т. 41, № 3, с. 10-16.
11. Дымков М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Мн.: БГЭУ, 2005, 313 с.
12. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем. III// Автоматика и телемеханика 1959, №12, с.1561-1578.
13. Габасов Р. К теории оптимальных процессов//Ж. Вычисл.матем.и матем.физ.1968, №4, с.780-796.
14. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973, 448 с.
15. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука,1973, 256 с.
16. Марданов М.Дж., Малик С.Т. О необходимых условий оптимальности в дискретных системах // Докл. НАН Азербайджана. 2014, № 4, с. 6-8.

17. Mardanov M.J., Melikov T.K., Mahmudov N.I. 2015: On Necessary Optimality Conditions in Discrete Control Systems // Intern. Journ. of Control, v. 88, No 10, pp. 2097-2106.
18. Halkin H.A. 1966: Maximum Principle of the Pontryagin Type for Systems described by Nonlinear Differerence Equations // SIAM Journal of CONTROL. v.41. pp. 90-111.
19. Holtzman M. 1966: Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // SIAM J. of Control. v. 4, pp. 263-275.
20. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности в дискретных системах управления // Управляемые системы//ИМ СО АН СССР, 1979, в.18 с. 14-25.
21. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем // Автоматика и телемеханика, 1969, №12, с.39-47.
22. Ащепков Л.Т. Оптимальные управление разрывными системами. М.: Наука, 1987, 272 с.
23. Ащепков Л.Т., Габасов Р. К оптимизации дискретных систем // Дифференц. уравнения, 1972, № 6, с. 1068-1080.
24. Минченко Л.И. О необходимых условиях оптимальности для некоторых классов дискретных систем управления// Дифференц. уравнения, 1976, №7, с. 1211-1268.
25. Гороховик В.В., Гороховик С.Я.,Маринкович Б. Необходимые условия оптимальности в гладкой задаче управления дискретной системой с векторным показателем качестве// Труды Ин-та математики НАН Белоруси, 2009, т.17, №1, с.27-40.
26. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2002, 114с.
27. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1999, 176 с.
28. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2010, 360 с.
29. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени д-ра физ.-мат. наук. Баку: БГУ, 39 с.
30. Колмановский В.Б. О предельной периодичности решений некоторых систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2001, № 5, с. 31-43.
31. Choi S.K., Goo Y.H., Koo N.J. 2006:, Existence and Boundedness of Solutions for Volterra Discrete Equations // Journal of the Chungcheong Mathematical Society. v. 19, No 3. pp. 237-244.
32. Al-Garni S.A. 2003: Numerical Study of Volterra Difference Equations of the Second Kind. King Fahd. Univ. Dhahran. Saudi Arabia, 110 p.
33. Crisci M.R., Kolmanovski V.B., Russo E., Vecchio A. 1997: Boundedness of Discrete Volterra Equations. // J. Math. and Appl. v. 211, No 2. pp. 106-130.
34. Колмановский В.Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2000, № 4, с. 42-50.
35. Zouyousefain M., Leela S. 1990: Stability Results for Difference Equations of Volterra Type, Part I // Appl. Math. Comput. v. 36, No1. pp. 51-61.
36. Choi S.K., Goo H.Y., Koo N.J. 2007: Asymptotic Behavior of Nonlinear Volterra Difference Systems // Bull. Korean Math. Soc. v. 44, No 1. pp. 177-184.
37. Song Y., Baker T.H., Christopher. 2002: Pertubation Theory for Discrete Volterra Equations // Preprint. The Victoria University of Manchester. 20 p.
38. Baker T.H., Christopher, Song Y. 2003: Discrete Volterra Equations, Discrete Volterra Operators, Fixed Points Theorems and Their Applications. // Nonlinear Studies, No 19. pp. 79-101.
39. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Мн.: БГУ, 1981, 400 с.
40. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256 с.
41. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л-д.: ЛГУ, 1968.

42. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Мн.: Наука и техника, 1974, 274 с.
43. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002, 832 с.

VOLTERRA TİPLİ FƏRQ TƏNLİKLƏRİ İLƏ TƏSVİR OLUNAN PROSESLƏRDƏ BİR İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

K.B.MƏNSİMOV, M.Ü.ÇIRAXOVA

XÜLASƏ

Məqalədə Volterra tipli fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Əvvəlcə optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər (diskret maksimum prinsipi, xəttiləşdirilmiş maksimum şərti, Eyler tənliyinin analoqu) alınmış, sonra isə diskret maksimum və xəttiləşdirilmiş maksimum şərtlərinin cırlaşdığı hallar tədqiq edilmişdir. İdarə oblastı açıq olan halda optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərt çıxarılmışdır.

Açar sözlər: Volterra fərq tənlikləri, optimallıq üçün zəruri şərt, diskret maksimum prinsipi, Eyler tənliyinin analoqu , məxsusi idarələr.

ON ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR PROCESSES DESCRIBED BY VOLTERRA TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS

K.B.MANSIMOV, M.U.CHIRAGOVA

SUMMARY

The problem of optimal control described by the system of Volterra type nonlinear differential equations is considered. Analogues of the Pontryagin maximum principle and the linearized maximum condition are proved. An analogue of the Euler equation is derived. The case of degeneration of the maximum principle and the linearized maximum conditions is studied. Necessary conditions of optimality of the second order are established.

Key words: Volterra differential equation, necessary optimality condition, discrete maximum principle.

Поступила в редакцию: 15.11.2018 г.
Подписано к печати: 08.04.2019 г.