BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА

А.Т.ГАЗИЛОВА
Бакинский Государственный Университет
aydan-9393@list.ru

В работе оценены нормы операторов производных промежуточных в некоторых пространствах типа Соболева в полуоси, через нормы некоторых квазиэллиптических выражений определенных в Гильбертовом пространстве и показано.

Ключевые слова. Гильбертово пространство, вектор-функция, промежуточные производные, норма.

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство, A положительно определенный самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A)$.

Очевидно, что при $\gamma \geq 0$ область определения $D(A^\gamma)$ становится гильбертовым пространством H со скалярным произведением $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$.

Обозначим через $L_2(R_+;H)$ гильбертово всех функций $f(t)$ определенные в $R_+ = (0;\infty)$ почти всюду со значениями в H, с нормой

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2}$$

Далее введем гильбертово пространство вектор-функций $u(t)$ определенные в $R_+ = (0;\infty)$ почти всюду, имеющие третью производную и такие, что $A^3 u \in L_2(R_+;H)$, $u''' \in L_2(R_+;H)$ следующим образом [1]

$$W_2^3(R_+;H) = \{u : A^3 u \in L_2(R_+;H), u''' \in L_2(R_+;H)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^3(R_+;H)} = \left(\|A^3 u\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|u'''\|^2_{L_2(R_+;H)}\right)^{1/2}$$

Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле обобщенных функций в абстрактных гильбертовых пространствах.

Из результатов монографии [1] следует, что если $u \in W_2(R_+;H)$, то по теореме о промежуточных производных и по теореме о следах $A^{3-j}u^{(j)} \in L_2(R_+;H)$ и $j=\overline{0,3}$, $u^{(j)}(0) \in H_{3-j-1/2}$, $j=0,1,2$, причем

$$\left\| A^{3-j}u^{(j)} \right\|_{L_2(R_+;H)} \le c_j \|u\|_{L_2(R_+;H)} \ , j=\overline{0,3}$$

и

$$\left\| u^{(j)}(0) \right\|_{3-j-1/2} \le \ c_j \ \|u\|_{L_2(R_+;H)} \ j=\overline{0,2}\,.$$

Рассмотрим подпространство $\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$ пространства $W_2^3(R_+;H)$:

$$\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H) = \{u : u \in W_2^3(R_+;H), u(0)=0, u'(0)=0,\ u''(0)=0\}$$

Отметим, что аналогично определяются пространства $L_2(R;H)$ и $W_2^3(R_+;H)$, при $R=(-\infty;\infty)$

В работе [2] показано, что нормы операторов промежуточных производных $A^2\dfrac{d}{dt}$, $A\dfrac{d^2}{dt^2}$ в пространстве $L_2(R;H)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left\| A^2\frac{d}{dt} \right\|_{L_2(R;H)} \le \frac{2\sqrt{3}}{9}\|P_0u\|_{L_2(R;H)} \tag{1}$$

и

$$\left\| A\frac{d^2u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)} \le \frac{2\sqrt{3}}{9}\|P_0u\|_{L_2(R;H)} \tag{2}$$

причем, полученные неравенства точны. Здесь $u(t) \in W_2^3(R_+;H)$, а

$$P_0u = P_0(d/dt)u(t) = \left(\frac{d}{dt}+A\right)\left(\frac{d}{dt}-A\right)^2 u(t),\ u \in W_2^3(R_+;H) \tag{3}$$

Отметим, что аналогичные оценки в различных ситуациях рассмотрены в работах [3-7].

В этой работе мы докажем аналоги этих неравенств для $R_+=(0;\infty)$ в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$

Имеет место

Лемма 1. $\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)}$ является нормой в пространствах $\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$ эквивалентной нормы $\|u\|_{W_2^3(R_+;H)}$

Доказательство. Пусть $\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$ Тогда мы можем определить вектор-функцию $u_1(t) \in W_2^3(R\ ;H)$ следующим образом

$$u_1(t)=\begin{cases} u(t), & t>0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$$

Очевидно, что $u_1(t)\in W_2^3(R;H)$, так как $u_1\ (t)=0$ при $t\in(-\infty;0)$ и $u_1^{\ (k)}(t)=0$, при $t\in(-\infty,0`)$, $k=0,1,2,$. Поэтому

$$\|P_0u_1\|_{L_2(R;H)}=\|P_0u_1\|_{L_2(R_+;H)} \tag{4}$$

$$\left\|A^2\frac{du_1}{dt}\right\|_{L_2(R;H)}=\left\|A^2\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)} \tag{5}$$

и

$$\left\|A\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L_2(R;H)}=\left\|A^2\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L_2(R_+;H)} \tag{6}$$

Так как норма $\|u_1\|_{L_2(R;H)}$ эквивалентна норме $\|P_0u\|_{L_2(R;H)}$, то из равенства

$$\|u_1\|_{L_2(R;H)}=\|u\|_{L_2(R_+;H)} \quad u\in W_2^3(\overset{0}{R}_+;H)$$

$$\|P_0u_1\|_{L_2(R_+;H)}=\|u\|_{L_2(R_+;H)}, \quad u\in W_2^3(\overset{0}{R}_+;H)$$

получаем, что если

$$b_1\|P_0u_1\|\le\|u_1\|_{W_2^3(R_+;H)}\le c_1\|P_0u_1\|_{L_2(R;H)}\ ,$$

то в пространствах $\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$ имеет место неравенства.

$$b_1\|P_0u_1\|\le\|u_1\|_{W_2^3(R_+;H)}\le c_1\|P_0u_1\|_{L_2(R;H)}$$

Лемма доказана.

Обозначим через

$$\overset{0}{N}_1(R_+)=\sup_{0\ne u\in \overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)}\left\|A^2\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)}\cdot\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1} \tag{7}$$

$$\overset{0}{N}_2(R_+)=\sup_{0\ne u\in \overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)}\left\|A\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L_2(R_+;H)}\cdot\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1} \tag{8}$$

Теперь докажем основную теорему работы

Теорема. Нормы $\overset{0}{N}_1(R_+)$ и $\overset{0}{N}_2(R_+)$ определяются следующим образом:

$$\overset{0}{N}_1(R_+)=\frac{2\sqrt{3}}{9}, \qquad \overset{0}{N}_2(R_+)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Доказательство

Так как

$$\left\|A^2\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R;H)}=\left\|A^2\frac{du_1}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)}\le\frac{2\sqrt{3}}{9}\|P_0u_1\|_{L_2(R_+;H)}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)},$$

т.е $\overset{0}{N}_1(R_+;H)\le\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Аналогично имеем

$$\left\|A\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L_2(R;H)}=\left\|A^2\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)}\le\frac{2\sqrt{3}}{9}\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)},$$

т.е $\overset{0}{N}_2(R_+;H)\le\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Теперь покажем точность этих неравенств. как известно [1] – линейное множество $D(R;H)$ бесконечно дифференцируемых вектор функций с компактными носителями в R всюду плотно в пространстве $W_2^3(R,H)$, где

$$D(R;H)=\{v:v\in W_2^3(R,H),\ v(t)=0,\ |t|>N(v)\}.$$

Так как $N_1(R)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $N_2(R)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$, то для любого заданного $\varepsilon>0$ можно найти вектор-функции $v_\varepsilon(t)$ и $\omega_\varepsilon(t)$ такие, что

$$\left\|A^2\frac{dv_\varepsilon}{dt}\right\|_{L_2(R;H)}>\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}-\varepsilon\right)\|v_\varepsilon\|_{W_2^3(R\ ;H)} \tag{9}$$

и

$$\left\|A\frac{d^2\omega_\varepsilon}{dt^2}\right\|_{L_2(R;H)}>\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}-\varepsilon\right)\|\omega_\varepsilon\|_{W_2^3(R;H)} \tag{10}$$

Пусть $v_\varepsilon(t)=0$ при $t>N$, а $\omega_\varepsilon(t)=0$ при $t>N$

Определим следующие вектор-функции

$$u_\varepsilon(t)=v_\varepsilon(t-N),\quad t\in R_+=(0,\infty)$$

и

$$a_\varepsilon(t)=\omega_\varepsilon(t-N),\quad t\in R_+=(0,\infty)$$

Очевидно, что $u_\varepsilon(t)\in W_2^3(R_+;H)$, $a_\varepsilon(t)\in W_2^3(R_+;H)$ причем

$$u_\varepsilon^{(k)}(0)=v_\varepsilon^{(k)}(-N)=0,\ \ k=0,1,2$$

и

$$a_\varepsilon^{(k)}(0)=a_\varepsilon^{(k)}(-N)=0,\ \ k=0,1,2$$

Тогда $u_\varepsilon(t)\in\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$, $a_\varepsilon(t)\in\overset{0}{W}{}_2^3(R_+;H)$ и

$$\|P_0u_\varepsilon\|_{L_2(R_+;H)}=\|P_0v_\varepsilon(t-N)\|_{L_2(R_+;H)}=\|P_0v_\varepsilon\|_{L_2(R;H)} \tag{11}$$

$$\left\|P_0 a_\varepsilon\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|P_0 \omega_\varepsilon(t-N)\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|P_0 \omega_\varepsilon\right\|_{L_2(R;H)} \qquad (12)$$

Аналогично имеем, что

$$\left\|A^2 \frac{du_\varepsilon}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|A \frac{du_\varepsilon(t-N)}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|A \frac{dv_\varepsilon}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)} \qquad (13)$$

$$\left\|A \frac{d^2 a_\varepsilon}{dt^2}\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|A \frac{d^2 \omega_\varepsilon(t-N)}{dt^2}\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|A \frac{d^2 \omega_\varepsilon}{dt^2}\right\|_{L_2(R_+;H)} \qquad (14)$$

Из неравенств (11)-(13) с учетом неравенства (9) следует, что

$$\left\|A^2 \frac{du_\varepsilon}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)} > \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)\left\|P_0 u_\varepsilon\right\|_{L_2(R_+;H)}$$

т.е. $\overset{0}{N}_1(R_+;H) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Следовательно, равенства (7) доказана

Аналогично, учитывая, что

$$\left\|A^2 \frac{da_\varepsilon}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|A^2 \frac{d\omega_\varepsilon}{dt}\right\|_{L_2(R\ ;H)}$$

и

$$\left\|A \frac{d^2 a_\varepsilon}{dt^2}\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|A \frac{d^2 \omega_\varepsilon}{dt^2}\right\|_{L_2(R\ ;H)}$$

Из равенства (10) получаем, что

$$\left\|A \frac{d^2 \omega_\varepsilon}{dt^2}\right\|_{L_2(R_+;H)} > \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} - \varepsilon\right)\left\|P_0 \omega_\varepsilon\right\|_{L_2(R_+;H)}$$

т.е. $\overset{0}{N}_2(R_+;H) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Теорема доказана.

Замечание. Выражение $\left\|P_0 u_\varepsilon\right\|_{L_2(R_+;H)}$ не является нормой в пространстве $W_2^3(R_+;H)$. Действительно если $P_0 u = 0$
т.е.

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)\left(\frac{d}{dt} - A\right)^2 u(t) = 0,$$

то общее решение $u(t)$ уравнения $P_0 u$ из пространства $W_2^3(R_+;H)$ представляется в виде $u(t) = e^{-tA}\varphi$, где $\varphi \in H_{7/2}$, а e^{-tA} полугруппа линейных ограниченных операторов порождённая оператором $(-A)$. Очевидно, что при $\varphi \neq 0$ $u(t) \neq 0$, т.е. $\|P_0 u\|$ не является нормой в пространстве $W_2^3(R_+;H)$, поскольку при $0 \neq \varphi \in H_{7/2}$. $u(t) = e^{-tA}\varphi \in W_2^3(R_+;H)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371с.
2. Газилова А.Т. Об оценке нормы промежуточных производных через норму операторно-дифференциального выражения третьего порядка квазиэллиптического типа. Journal of Contemporary Applied Mathematics. v. 8, No 1, 2018, с.19-24.
3. Мирзоев. С.С. Вопросы теория разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанных с ними. Авторефер. дис. док. физ-мат. наук. Баку ,1994, 32с.
4. Гумбаталиев Р.З. О некоторых свойствах регулярных голоморфных решениях одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка. Труды межд. Конф и Совр.методы физ. мат.наук. Орел, 2006, с. 31-35
5. Гумбаталиев Р.З. Нормальная разрешенность краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка в весовом пространстве // Дифференциальные уравнения, 2010, с. 46, в. 5, с. 678-686.
6. Gasymov A.A. 2008: On Solvability of a Class of Complicated Characteristic Operator-Differential Equations of Fourth Order. Transaction of NAS of Azerbaijan. Ser. of Phys -Tech. and Math. Sciences, v. 28, pp. 49-54.
7. Эльбабли А.Л. О разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с кратной характеристикой //Вестник Бакинского Университета, 2011.

KOLMOQOROV TİPLİ BƏRABƏRSİZLİKLƏR HAQQINDA

A.T.QAZİLOVA

XÜLASƏ

İşdə Hilbert fəzasında yarımoxda Sobolev tipli fəzalarda aralıq törəmə operatorlarının normaları kvazielleptik operator-diferensial ifadə norması vasitəsilə qiymətləndirilmişdir və alınan bərabərsizliklərin dəqiqliyi göstərilmişdir.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, vektor funksiyası, aralıq törəmələri, norma.

ON KOLMOGOROV TYPE INEQUALITIES

A.T.GAZILOVA

SUMMARY

In the Hilbert space, the norms of intermediate derivative operators in the Sobolev-type spaces have been evaluated by means of the norm of quasi-elliptic operator-differential expression in the spin and the accuracy of the inequalities has been shown.

Key words: Hilbert space, vector function, intermediate derivatives, norm.

Поступила в редакцию: 05.03.2019 г.
Подписано к печати: 08.04.2019 г.