**BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ**

***№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019***

**MEXANİKA**

**УДК 539.384**

# ОБ ИЗГИБЕ НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ЛЕЖАЩЕЙ НА ДВУХКОНСТАНЕЙНОМ ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

**А.Х.МОВСУМОВА**
***Институт математики и механики НАН Азербайджана***
***aytenmovsumova@mail.ru***

*В работе исследуется поперечной изгиб неоднородной по толщине анизотропной пластинки. В случая всесторонно шарнирного закрепления, проведен численный расчет и результаты представлено графиками зависимостям между значением прогиба в центре пластинка от зависимости постоянной распределенной нагрузки.*

**Ключевые слова:** пластинка, основания, изгиб, прогиб, метод, функция, непрерывность.

В настоящее время при сооружении инженерных комплексов, мостов, эстакад и в ряде других отраслях широко используется прямоугольные пластинки изготовленные из естественных и искусственных неоднородных по толщине анизотропных материалов [1,2]. Во многих случаях причиной появления неоднородности материала является технология изготовления, механическая и термическая обработка, неоднородности составов и т.п. [1,3,4].

Отметим, что учет вышеуказанных специфических свойств и влияние сопротивления внешней среды гораздо осложняет математическое решения задачи и анализ полученных результатов а не учет может привести к существенных погрешностям [5,6].

Предположим, что пластинке лежащей на двух константном основании типа Пастернака П.Л. [7]. Реакция $R$ - который с прогибом $W(x, y)$ связан следующим соотношением:

$$R = K_v W - K_p \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

Здесь $K_v(\frac{N}{m^3})$, коэффициент Винклера, $K_p(\frac{N}{m})$ - коэффициент Пастернака, П.Л.

Допустим, что пластинка находится под действием поперечной нагрузки типа

$$P(x,y) = P_0 \sin\frac{\pi}{a}x \cdot \sin\frac{\pi}{b}y \qquad (2)$$

Здесь $(a,b)$ - размеры пластинки.

Координатная система выбрано следующим образом. Оси $X$ и $Y$ находится в срединой плоскости а ось $Z$ перпендикулярен к ним.

В данном случае связь между компонентами тензора напряжений и деформаций записывается в следующем виде [1,2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= f(z)\left(a_{11}^0\varepsilon_{11} + a_{12}^0\varepsilon_{22} + a_{13}^0\varepsilon_{12}\right) \\ \sigma_{22} &= f(z)\left(a_{21}^0\varepsilon_{11} + a_{22}^0\varepsilon_{22} + a_{23}^0\varepsilon_{12}\right) \\ \sigma_{12} &= f(z)\left(a_{31}^0\varepsilon_{11} + a_{32}^0\varepsilon_{22} + a_{33}^0\varepsilon_{12}\right) \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь $f(z)$- непрерывная функция характеризует неоднородность по толщине $a_{12}^0$ - соответствует к однородному анизотропному материалу.

Принимается, что и для непрерывно неоднородно анизотропной пластинки гипотеза Кирхгофа-Лява остается в силе и имеет место

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11} - z_{11}\chi_{11} \\ \varepsilon_{22} &= e_{22} - z_{22}\chi_{22} \\ \varepsilon_{12} &= e_{12} - z_{12}\chi_{12} \end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь $e_{11}$, $e_{22}$, $e_{12}$ - малые деформации, $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$- кривизны и кручение срединной поверхности и компонентами вектора перемещении $(U,V,W)$ связаны следующим образом

$$\begin{aligned} &e_{11} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad e_{22} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad e_{12} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ &\chi_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{aligned} \qquad (5)$$

Учитывая (4) в (3) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= f(z)\left[\left(a_{11}^0 e_{11} + a_{12}^0 e_{22} + a_{13}^0 e_{12}\right) - z\left(a_{11}^0\chi_{11} + a_{12}^0\chi_{22} + a_{13}^0\chi_{12}\right)\right] \\ \sigma_{22} &= f(z)\left[\left(a_{21}^0 e_{11} + a_{22}^0 e_{22} + a_{23}^0 e_{12}\right) - z\left(a_{21}^0\chi_{11} + a_{22}^0\chi_{22} + a_{23}^0\chi_{12}\right)\right] \\ \sigma_{12} &= f(z)\left[\left(a_{31}^0 e_{11} + a_{32}^0 e_{22} + a_{33}^0 e_{12}\right) - z\left(a_{31}^0\chi_{11} + a_{32}^0\chi_{22} + a_{33}^0\chi_{12}\right)\right] \end{aligned} \qquad (6)$$

Так, как в плоскости пластинки внешние силы отсутствуют, естественно предполагать, что результирующие силы всюду равны нуля:

$$\int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_{11}dz=0;\quad \int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_{22}dz=0;\quad \int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_{12}dz=0 \tag{7}$$

Подставляя (6) в (7), получим:

$$\begin{gathered}
a_{11}^0 e_{11}+a_{12}^0 e_{22}+a_{13}^0 e_{12}=A_2\cdot A_1^{-1}\left(a_{11}^0\chi_{11}+a_{12}^0\chi_{22}+a_{13}^0\chi_{12}\right)\\
a_{21}^0 e_{11}+a_{22}^0 e_{22}+a_{23}^0 e_{12}=A_2\cdot A_1^{-1}\left(a_{21}^0\chi_{11}+a_{22}^0\chi_{12}+a_{23}^0\chi_{12}\right)\\
a_{31}^0 e_{11}+a_{32}^0 e_{22}+a_{33}^0 e_{12}=A_2\cdot A_1^{-1}\left(a_{31}^0\chi_{11}+a_{32}^0\chi_{22}+a_{33}^0\chi_{12}\right)
\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$A_1=\int_{-h/2}^{+h/2}f(z)dz;\quad A_2=\int_{-h/2}^{+h/2}f(z)z\,dz$$

Аналогичным образом можно вычислить моменты

$$M_{i,j}=\int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_{ij}zdz;\quad i,j=1,2 \tag{9}$$

Подставляя (6) в (9) с учетом (8) получим связь между моментами с $\chi_{11},\chi_{22},\chi_{12}$:

$$\begin{gathered}
M_{11}=\mu\left(a_{11}^0\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+a_{12}^0\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+a_{13}^0\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)\\
M_{22}=\mu\left(a_{21}^0\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+a_{22}^0\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+a_{23}^0\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)\\
M_{12}=\mu\left(a_{31}^0\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+a_{32}^0\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+a_{33}^0\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)
\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$A_3=\int_{-h/2}^{+h/2}f(z)z^2dz;\quad \mu=A_2^2\cdot A_1^{-1}-A_3 \tag{11}$$

Уравнения равновесия в данном случае с учетом (1) и (2) записывается в следующем виде.

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2}+K_v W-K_p\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)=P_0\sin\frac{\pi}{a}x\cdot\sin\frac{\pi}{b}y \tag{12}$$

Подставляя (10) в (12) после ряда преобразовании получим уравнения равновесия относительно прогиба в следующем виде.

$$L(W)+K_v W-K_p\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)=P_0\sin\frac{\pi}{a}x\cdot\sin\frac{\pi}{b}y \tag{13}$$

Здесь

$$L(W)=a_{11}^0\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\left(a_{12}^0+2a_{12}^0+a_{32}^0\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+$$
$$+a_{22}^0\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}+\left(a_{13}^0+2a_{31}^0\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^3\partial y}+\left(2a_{32}^0+a_{13}^0\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x\partial y^3} \qquad (14)$$

Пусть пластина всесторонне закреплена с шарнирами. Тогда $W(x,y)$ должен удовлетворять следующие краевые условия

$$W=0$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0 \qquad \text{при} \quad x=0;\ x=a$$

$$W=0 \qquad (15)$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0 \qquad \text{при} \quad y=0;\ y=b$$

Решение (12) примем в виде:

$$W(x,y)=W_0\sin\frac{\pi}{a}x\cdot\sin\frac{\pi}{b}y \qquad (16)$$

Нетрудно проверить, что (16) удовлетворяет краевые условия:

Подставляя (6) в (14), получим связь между $W_0$ и $P_0$ в следующем виде:

$$W_0=\frac{P_0}{\overline{D_1}\lambda^4+\overline{D_2}\beta^4+2\overline{D_3}\lambda^2\beta^2+K_\nu-K_p\left(\lambda^2+\beta^2\right)} \qquad (17)$$

Здесь

$$\lambda=\frac{\pi}{a};\quad \beta=\frac{\pi}{b}$$

Для квадратной пластинке $\lambda=\beta$.

$$W_{0,k}=\frac{P_0}{\lambda^4\left(\overline{D_1}+\overline{D_2}+2\overline{D_3}\right)+K_\nu-2K_p\lambda^2} \qquad (18)$$

Результаты численного расчета представлены в виде таблицы и графиками зависимостями между характерными параметрами (рис.1).

Таблица 1

| $\varepsilon$ | $\overline{A_1}$ | $\overline{A_2}$ | $\overline{A_3}$, $\left\lvert\overline{\mu_0}\right\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0,083 |
| 0,25 | 1 | 0 | 0,086 |
| 0,5 | 1 | 0 | 0,089 |
| 0,75 | 1 | 0 | 0,093 |
| 1 | 1 | 0 | 0,096 |

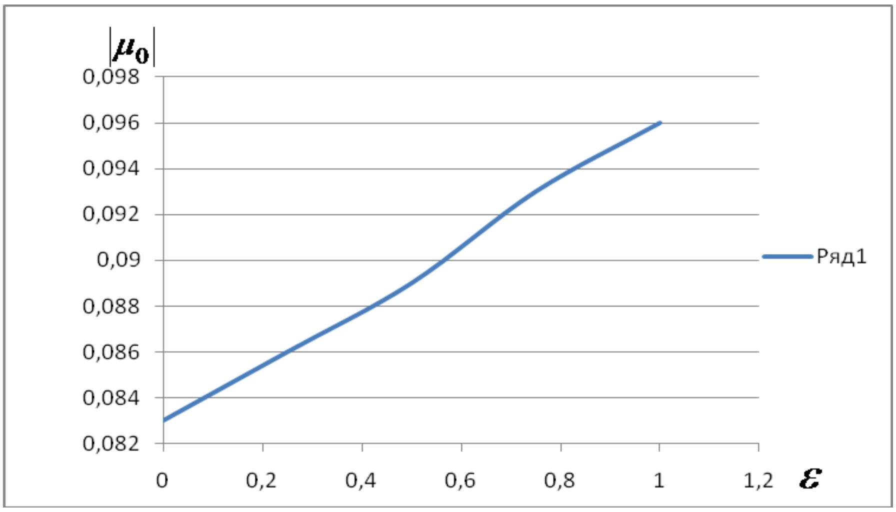


**Рис. 1:** График зависимости жесткости пластинки от параметра неоднородности по толщине пластинки.

Численный анализ проведем для ортотропной пластинки при следующих значениях характеристик параметров.

$$f(z)=1+\varepsilon\left(\frac{z}{n}\right)^2; \quad \varepsilon\in[0,1];$$

$$E_1/E_2=10,25,40,55; \quad \nu_1=0,25; \quad \left(\frac{a}{b}\right)=1$$

$$K_w=10^6\ {}^{N}\!/_{m^3}, \quad K_p=10^4\ {}^{N}\!/_{m}$$

### *Заключение*

*В работе проведен численный анализ целью определения значение прогиба в центре пластинки с учетом неоднородности и сопротивления внешней среды.*

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ, 1976, 376с.
2. Лехницкий Г.С. Теория анизотропных пластин. Гостехиздат, 1979, 445с.
3. Кравчук А.С., Майборода В.В., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. М., 1985, 303с.
4. Мехтиев М.Ф. Метод однородных решений в анизотропной теории оболочек. Баку: Элм, 2014.
5. Haciyev V.C., Sofiyev A.H., Kuruoglu N. 2018: Free Bending Vibration Analysis of Thin Biderectionaliy Exponentially Graded Orthotropic Rectangular Plates Restiny on Two Parameter Elastic Foundation. Composite Structural. 372-377,
6. Haciyev V.C., Mirzayeva G.R. and Siriyev A.I. 2018: Effect of Winkler Foundation in Homogeneity and Orthotropy on the Frequency of Plates. Journal Structural Engineering Appl. Mechanics, v. 1, pp. 1-5.

7. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Госспроиздат, 1959, 89 с.

## İKİ SABİTLİ PASTERNAK ƏSASI ÜZƏRİNDƏ YERLƏŞƏN ANİZOTROP QEYRİ-BİRCİNS DÜZBUCAQLI LÖVHƏNİN ƏYİLMƏSİ

**A.H.MÖVSÜMOVA**

**XÜLASƏ**

Məqalədə aparılan ədədi hesabatların nəticələri göstərir ki, lövhənin anizotropluğu, qalınlıq boyu qeyri-bircinsliyi, əsasın xarakteristikaları əyintinin qiymətinə ciddi təsir edir.

**Açar sözlər:** əyilmə, anizotrop, qeyri-bircins, düzbucaqlı lövhə.

## BENDING OF AN ANISOTROPIC NONHOMOGENEOUS RECTANGULAR PLATE ON TWO CONSTANT PASTERNAK BASE

**A.H.MOVSUMOVA**

**SUMMARY**

The results of the numerical calculation show that the anisotropy, non-homogeneity on the thickness of the plate, characteristics of the base have a significant influence on the value of the bending.

**Key words:** bending, anisotropic, non-homogeneous, rectangular plaque.

*Поступила в редакцию: 24.01.2019 г.*
*Подписано к печати: 08.04.2019 г.*