RİYAZİYYAT

UOT 517.97

NAZİK LÖVHƏNİN RƏQSLƏRİ TƏNLİYİ ÜÇÜN BİR OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ

H.F.QULİYEV*, X.İ.SEYFULLAYEVA**

Bakı Dövlət Universiteti, **Sumqayıt Dövlət Universiteti

xeyaleseyfullayeva82@mail.com

Təqdim olunan işdə nazik lövhənin rəqsləri tənliyi üçün kvadratik meyarlı optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Əvvəlcə baxılan məsələdə hər bir qeyd olunmuş mümkün idarəedici üçün sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi öyrənilmiş, optimal idarəedicinin varlıq teoremi isbat edilmiş və optimallıq üçün inteqral bərabərsizlik şəklində zəruri və kafi şərt çıxarılmışdır.

Açar sözlər: nazik lövhə, optimal idarəetmə, optimallıq şərti.

Məlumdur ki, praktikada bir sıra real proseslər dördtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Bunlardan çubuğun, kamertonun, üçlaylı lövhələrin, elastiki lövhələrin, nazik lövhələrin və s. rəqsləri tənliklərini misal göstərmək olar [1], [2], [3]. Ona görə də belə tənliklərlə təsvir olunan proseslərdə optimal idarəetmə məsələlərinin öyrənilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Qeyd edək ki, son dövrlərdə belə proseslər üçün optimal idarəetmə məsələləri intensiv tədqiq edilir [4]-[8].

Xüsusi törəməli tənliklər üçün, xüsusi halda, nazik lövhənin rəqsləri tənliyi üçün tərs məsələlərin tədqiqi də böyük nəzəri və praktik əhəmiyyət kəsb edir. Tərs məsələləri həll etmək üçün yanaşmalardan biri optimallaşdırma üsuludur [9]. Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, tərs məsələ optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir və yeni məsələ optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsulları ilə tədqiq olunur.

Məsələnin qoyuluşu. $(u(x,y,t),\upsilon(t))\in W_2^{2,1}(Q)\times L_2(0,T)$ funksiyalar cütünü aşağıdakı münasibətlərdən təyin edək:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\Delta(D\Delta u)=a(x,y)\upsilon(t),\ (x,y,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u(x,y,0)=\varphi_0(x,y),\ \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=\varphi_1(x,y),\ (x,y)\in\Omega, \tag{2}$$

$$u(0,y,t)=0, \frac{\partial u(0,y,t)}{\partial x}=0, u(x,0,t)=0, \frac{\partial u(x,0,t)}{\partial y}=0,\ 0\le x\le a,\ 0\le t\le T,$$
$$u(a,y,t)=0, \frac{\partial u(a,y,t)}{\partial x}=0, u(x,b,t)=0, \frac{\partial u(x,b,t)}{\partial y}=0,\ 0\le y\le b,\ 0\le t\le T, \tag{3}$$

$$\int_{\Omega} K(x,y,t)u(x,y,t)dxdy = g(t), \tag{4}$$

burada $Q=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,a)\times(0,b)$, a, b, $T>0$ müsbət ədədlər, $u(x,y,t)$-lövhənin yerdəyişməsi, $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$-lövhənin əyilmə möhkəmliyi, $h(x,y)$-lövhənin qalınlığıdır, $0<\mu_1\le h(x,y)\le\mu_2$, μ_1, μ_2-verilmiş ədədlərdir və $h(x,y)$-in Ω-da iki tərtibə qədər kəsilməz törəmələri var, E ($E>0$)-Yunq modulu, ν $\left(0<\nu<\dfrac{1}{2}\right)$-Puasson əmsalıdır, Δ-Laplas operatorudur, $\rho(x,y)$- lövhənin (x,y) nöqtəsində sıxlığıdır, o, $\overline{\Omega}$-da kəsilməzdir və $\rho(x,y)\ge\gamma>0$, γ-verilmiş ədəddir, $a(x,y)\in L_2(\Omega)$, $\varphi_0\in W_2^2(\Omega)$, $\varphi_1\in L_2(\Omega)$, $K(x,y,t)\in L_\infty(Q)$, $g(t)\in L_2(0,T)$-verilmiş funksiyalardır.

Qeyd edək ki, qoyulan məsələ tərs məsələdir.

Bu məsələni aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə gətirək: $U_{ad}\subset L_2(0,T)$-dən elə funksiya tapmalı ki, o, (1)-(3) məsələsinin həlli ilə birlikdə

$$J_0(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^T\left[\int_{\Omega} Kudxdy-g(t)\right]^2 dt \tag{5}$$

funksionalına minimum qiymət verisn, burada U_{ad} -qapalı, qabarıq çoxluqdur.

$\upsilon(t)$ funksiyasını mümkün idarəedici adlandıraq, $u=u(x,y,t;\upsilon)$ ilə $\upsilon(t)$ idarəedicisinə uyğun (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həllini işarə edək.

Tərs məsələ ilə optimal idarəetmə məsələsi arasında sıx əlaqə var. Belə ki, əgər (5) funksionalının minimum qiyməti sıfıra bərabərdirsə, onda (4) əlavə şərti ödənilir.

Hər bir $\upsilon(t)$ mümkün idarəedicisinə uyğun (1)-(3) məsələsinin həlli dedikdə elə $u(x,y,t)\in W_2^{2,1}(Q)$ funksiyası başa düşülür ki, o ixtiyari $\eta(x,y,t)\in\hat{W}_2^{2,1}(Q)$,

$$\eta(0,y,t)=0, \frac{\partial\eta(0,y,t)}{\partial x}=0, \eta(x,0,t)=0, \frac{\partial\eta(x,0,t)}{\partial y}=0,$$
$$\eta(a,y,t)=0, \frac{\partial\eta(a,y,t)}{\partial x}=0, \eta(x,b,t)=0, \frac{\partial\eta(x,b,t)}{\partial y}=0$$

funksiyası üçün

$$\int_Q \left[-\rho \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + D\Delta u \Delta \eta + \right] dxdydt - \int_\Omega \rho \varphi_1(x,y)\eta(x,y,0)dxdy = \int_Q a(x,y)\upsilon(t)\eta(x,y,t)dxdydt \qquad (6)$$

inteqral eyniliyini və $u(x,y,0) = \varphi_0(x,y)$ şərtini ödəsin. Burada $\hat{W}_2^{2,1}(Q)$ ilə $W_2^{2,1}(Q)$-dən olan və $t = T$-də sıfra bərabər olan funksiyalar sinfi işarə olunmuşdur.

(1)-(3), (5) məsələsini aşağıdakı şəkildə requlyarlaşdıraq:

$$J_\alpha(\upsilon) = J_0(\upsilon) + \frac{\alpha}{2}\int_0^T \upsilon^2(t)dt\,, \qquad (7)$$

funksionalının (1)-(3) məsələsinin həlli ilə birlikdə minimumunu tapmalı, burada $\alpha > 0$ verilmiş müsbət ədəddir.

(1)-(3) məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi

Teorem 1. Hər bir qeyd olunmuş $\upsilon(t)$ mümkün idarəedcisi üçün (1)-(3) məsələsinin $W_2^{2,1}(Q)$ fəzasında yeganə həll var.

İsbatı. Həllin varlığını göstərmək üçün Faedo-Qalyorkin üsulunu tətbiq edək.

$\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ ilə $W_2^2(\Omega)$-nın elə alt fəzası işarə edilir ki, həmin alt fəzada sıx çoxluq olaraq Ω-da iki dəfə kəsilməz diferensiallanan, özü və x, y-ə görə birinci tərtib törəmələri Ω-nın sərhədində sıfra çevrilən bütün funksiyalar götürülürsün.

$\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$-dən olan $\{\omega_i(x,y)\}_{i=1}^\infty$ bazis funksiyaları götürək və (1)-(3) məsələsinin təqribi həllini

$$u^N(x,y,t) = \sum_{i=1}^N c_i^N(t)\omega_i(x,y)$$

şəklində aşağıdakı bərabərliklərdən axtaraq:

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\omega_j(x,y)dxdy + \int_\Omega D\Delta u^N \Delta\omega_j(x,y)dxdy = \int_\Omega a(x,y)\upsilon(t)\omega_j(x,y)dxdy, \quad 1 \le j \le N, \quad (8)$$

$$c_i^N(0) = \alpha_i^N\,,\ \left.\frac{d}{dt}c_i^N(t)\right|_{t=0} = \beta_i^N\,,$$

burada α_i^N və β_i^N, $\varphi_0(x,y)$ və $\varphi_1(x,y)$ funksiyalarını $N \to \infty$ olduqda uygun olaraq $W_2^2(\Omega)$ və $L_2(\Omega)$-də aproksimasiya edən

$$\varphi_0^N(x,y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^N \omega_i(x,y)\,,\ \varphi_1^N(x,y) = \sum_{i=1}^N \beta_i^N \omega_i(x,y)$$

cəmlərin əmsallarıdır.

(8) bərabərliyinin hər iki tərəfini $\frac{d}{dt}c_j^N(t)$-yə vurub, j görə 1-dən N-ə qədər cəmləsək, alarıq:

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\frac{\partial u^N}{\partial t}dxdy + \int_\Omega D\Delta u^N \Delta \frac{\partial u^N}{\partial t}dxdy = \int_\Omega a(x,y)\upsilon(t)\frac{\partial u^N}{\partial t}dxdy .$$

Buradan alınır ki,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left[\rho\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2 + D\left(\Delta u^N\right)^2\right]dxdy = \int_\Omega a(x,y)\upsilon(t)\frac{\partial u^N}{\partial t}dxdy$$

Bu bərabərliyi t-yə görə inteqrallasaq verilənlər üzərinə qoyulmuş şərtlər daxilində aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2 + \left(\Delta u^N\right)^2\right]dxdy \le C\left[\|a\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\upsilon\|^2_{L_2(0,T)} + \|\varphi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega)}\right] +$$

$$+C\int_0^t\int_\Omega\left[\left(u^N\right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdydt,$$

$$\forall t \in [0,T],$$

burada və bundan sonra C ilə qiymətləndirilən kəmiyyətlərdən və mümkün idarəedicilərdən asılı olmayan müxtəlif sabitləri işarə edəcəyik.

$\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ fəzasındakı normaların ekvivalentliyinə görə

$$\int_\Omega \left[\left(u^N\right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2 + \left(\Delta u^N\right)^2\right]dxdy \le C\left[\|a\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\upsilon\|^2_{L_2(0,T)} + \|\varphi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega)}\right] +$$

$$+C\int_0^t\int_\Omega\left[\left(u^N\right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdydt$$

olar.

[10, səh.117]-dəki məlum

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy \le \int_\Omega \left[\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right]^2 dxdy$$

bərabərsizliyinə görə alarıq:

$$\int_\Omega \left[\left(u^N\right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy \le$$

$$\le C\left[\|a\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\upsilon\|^2_{L_2(0,T)} + \|\varphi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega)}\right] +$$

$$+C\int_0^t\int_\Omega\left[\left(u^N\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdydt\,.$$

Bu bərabərsizliyə Qronuoll lemmasını tətbiq etsək,

$$\int_\Omega\left[\left(u^N\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy\le$$

$$\le C\left[\|a\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\upsilon\|^2_{L_2(0,T)}+\|\varphi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}+\|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega)}\right],\ \forall t\in[0,T] \qquad (9)$$

və ya t-yə görə inteqrallamaqla

$$\int_\Omega\left[\left(u^N\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy\le \qquad (10)$$

$$\le C\left[\|a\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\upsilon\|^2_{L_2(0,T)}+\|\varphi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}+\|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega)}\right]$$

qiymətləndirməsini alarıq.

(10) qiymətləndirməsindən alınır ki, $\{u^N\}$ ardıcıllığı $W_2^{2,1}(Q)$-də məhduddur. Ona görə də $\{u^N\}$-dən elə alt ardıcıllıq ayırmaq olar ki, (həmin ardıcıllığı da $\{u^N\}$ kimi işarə edəcəyik), $N\to\infty$ olduqda

$$u^N\to u,\ \frac{\partial u^N}{\partial t}\to\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u^N}{\partial x}\to\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u^N}{\partial y}\to\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\to\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\to\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\to\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ \ L_2(Q)\text{-də zəif.}$$

Onda kompaktlıq teoreminə görə [10, səh.83-84], $N\to\infty$ olduqda

$$u^N\to u,\ \frac{\partial u^N}{\partial x}\to\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u^N}{\partial y}\to\frac{\partial u}{\partial y}\ \ L_2(Q)\text{-də güclü.}$$

Hilbert fəzasında norma aşağıdan zəif yarımkəsilməz olduğundan (10)-dan alınır ki, $u(x,y,t)$ limit funksiyası üçün

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)}\le C\left[\|a\|_{L_2(\Omega)}+\|\upsilon\|_{L_2(0,T)}+\|\varphi_0\|_{W_2^2(\Omega)}+\|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)}\right] \qquad (11)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

(8)-nin hər tərəfini $d_l(t)\in W_2^1[0;T],\ d_l(T)=0$ funksiyasına vurub, l-ə görə cəmləyib və t-yə görə 0-dan T-yə qədər inteqrallasaq, sol tərəfdə birinci həddə hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etsək, alarıq:

$$\int_Q\left[-\rho h\frac{\partial u^N}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t}+D\Delta u^N\Delta\eta\right]dxdydt-\int_\Omega\rho\varphi_1^N(x,y)\eta(x,y,0)dxdy=\int_Q a(x,y)\upsilon(t)\eta(x,y,t)dxdydt\,, \qquad (12)$$

burada $\eta(x,y,t)$ funksiyası $\sum_{l=1}^N d_l(t)\omega_l(x,y)$ şəkilli ixtiyari funksiyadır.

Belə $\eta(x,y,t)$ funksiyalar küllüsünü M_N ilə işarə edək. (12)-də η-nı hər hansı M_{N_i} çoxluğunda qeyd etməklə yuxarıda seçilmiş alt ardıcıllıq üzrə limitə keçmək olar. Bu $\forall\eta(x,y,t)\in \mathrm{M}_{N_i}$ olduqda $u(x,y,t)$ limit funksiyası üçün (6) eyniliyinə gətirir. Lakin $\overset{\infty}{\underset{N=1}{U}} \mathrm{M}_N$ çoxluğu $\hat{W}_2^{2,1}(Q)$ fəzasında sıxdır [11, səh.169] və $u(x,y,t)\in W_2^{2,1}(Q)$, deməli (6) eyniliyi $u(x,y,t)$ funksiyası üçün $\eta(x,y,t)\in \hat{W}_2^{2,1}(Q)$ olduqda ödənir.

Sonuncu bərabərlikdə $N\to\infty$ şərtində limitə keçsək, $\forall\eta(x,y,t)\in \hat{W}_{2,0}^{1}(Q)$ funksiyası üçün

$$\int_Q\left[-\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}+D\Delta u\Delta\eta\right]dxdydt-\int_\Omega\rho\varphi_1(x,y)\eta(x,y,0)dxdy=\int_Q a(x,y)\upsilon(t)\eta(x,y,t)dxdydt$$

inteqral eyniliyi ödənər. Beləliklə, alırıq ki, $u(x,y,t)\in W_2^{2,1}(Q)$ funksiyası (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həllidir.

Həllin yeganəliyini standart üsulla göstərmək olar, yəni hər bir mümkün idarəediciyə uyğun (1)-(3) məsələsinin iki u_1, u_2 həllinin olduğunu fərz etsəydik, onların fərqi olan $u=u_1-u_2$ üçün (9)-a analoji olaraq

$$\int_\Omega\left[(u)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy\le 0,$$
$$\forall t\in[0,T]$$

qiymətləndirməsini alardıq. Buradan isə $u=u_1-u_2\equiv 0$ olduğu alınır, yəni $u_1=u_2$.

Optimal idarəedicinin varlığı və yeganəliyi

Teorem 2. (1)-(4) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulan şərtlər daxilində həmin məsələdə yeganə optimal idarəedici var.

İsbatı. (1)-(3) xətti məsələ olduğundan ixtiyari $\upsilon_1(t)$, $\upsilon_2(t)$ və $\lambda\in R$ üçün

$$u((x,y,t;\lambda\upsilon_1+(1-\lambda)\upsilon_2)=\lambda u(x,y,t;\upsilon_1)+(1-\lambda)u(x,y,t;\upsilon_2)$$

münasibəti doğrudur. (5) funksionalı kvadratik olduğundan o, υ-yə görə qabarıq funksionaldır. Onda (7) funksionalı υ-yə görə ciddi qabarıq funksionaldır. Ona görə [12, səh.13]-dəkı məlum teoremə əsasən (7) funksionalına U_{ad} qapalı, qabarıq çoxluğunda (1)-(3) şərti daxilində minimum verən yeganə optimal idarəedici var.

Funksionalın diferensiallanması və optimallığın zəruri şərti

Verilmiş mümkün $\upsilon(t)$ idarəedicisi üçün aşağıdakı qoşma məsələni daxil edək:

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\Delta(D\Delta\psi)=-K(x,y,t)\int_\Omega\left[Kudxdy-g(t)\right],\ (x,y,t)\in Q, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\psi(0,y,t)=0,\frac{\partial\psi(0,y,t)}{\partial x}=0,\psi(x,0,t)=0,\frac{\partial\psi(x,0,t)}{\partial y}=0,\ 0\le x\le a,\ 0\le t\le T,\\&\psi(a,y,t)=0,\frac{\partial\psi(a,y,t)}{\partial x}=0,\psi(x,b,t)=0,\frac{\partial\psi(x,b,t)}{\partial y}=0,\ 0\le y\le b,\ 0\le t\le T,\end{aligned} \tag{14}$$

$$\psi(x,y,T)=0,\ \frac{\partial\psi(x,y,T)}{\partial t}=0,\ (x,y)\in\Omega. \tag{15}$$

(1)-(3) məsələsində olduğu kimi göstərmək olar ki, (13)-(15) qoşma məsələsinin də $W_2^{2,1}(Q)$-dən olan yeganə ümumiləşmiş həlli var və bu həll üçün

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(Q)}\le C\left[\|u\|_{L_2(Q)}+\|g\|_{L_2(0,T)}\right] \tag{16}$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Funksionalın diferensiallanan olmasını göstərmək üçün ixtiyari iki $\upsilon(t)\in U_{ad}$ və $\upsilon(t)+\delta\upsilon(t)\in U_{ad}$ mümkün idarəedicisini götürək. Bu idarəedicilərə uyğun (1)-(3) məsələsinin həllərini $u(x,y,t;\upsilon)$ və $u(x,y,t;\upsilon+\delta\upsilon)$ ilə işarə edək. Onda $\delta u(x,y,t)=u(x,y,t;\upsilon+\delta\upsilon)-u(x,y,t;\upsilon)$ funksiyası

$$\rho\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial t^2}+\Delta(D\Delta(\delta u))=a(x,y)\delta\upsilon(t),\ (x,y,t)\in Q, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\delta u(0,y,t)=0,\frac{\partial(\delta u(0,y,t))}{\partial x}=0,\delta u(x,0,t)=0,\frac{\partial(\delta u(x,0,t))}{\partial y}=0,\ 0\le x\le a,\ 0\le t\le T,\\&\delta u(a,y,t)=0,\frac{\partial(\delta u(a,y,t))}{\partial x}=0,\delta u(x,b,t)=0,\frac{\partial(\delta u(x,b,t))}{\partial y}=0,\ 0\le y\le b,\ 0\le t\le T,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\delta u(x,y,0)=0,\ \frac{\partial(\delta u(x,y,0))}{\partial t}=0,\ (x,y)\in\Omega \tag{19}$$

sərhəd məsələsinin həlli olar.

II hissədə olduğu kimi (17)-(19) məsələsinin həlli üçün

$$\|\delta u\|_{W_2^{2,1}(Q)}\le C\|\delta\upsilon\|_{L_2(0,T)} \tag{20}$$

qiymətləndirməsini almaq olar.

$J_\alpha(\upsilon)$ funksionalının artımını hesablayaq:

$$\Delta J_\alpha(\upsilon)=J_\alpha(\upsilon+\delta\upsilon)-J_\alpha(\upsilon)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^T\left(\int_\Omega K(u+\delta u)dxdy-g(t)\right)^2dt-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\int_\Omega Kudxdy-g(t)\right)^2dt+\frac{\alpha}{2}\int_0^T\left[(\upsilon+\delta\upsilon)^2-\upsilon^2\right]dt= \tag{21}$$

$$=\int_0^T\left[\left(\int_\Omega Kudxdy-g(t)\right)\int_\Omega K\delta udxdy\right]dt+\frac{1}{2}\int_0^T\left(\int_\Omega K\delta udxdy\right)^2dt+\alpha\int_0^T\upsilon\delta\upsilon dt+\frac{\alpha}{2}\int_0^T(\delta\upsilon)^2dt,$$

burada

$$R=\frac{1}{2}\int_0^T\left(\int_\Omega K\delta u dxdy\right)^2 dt+\frac{\alpha}{2}\int_0^T(\delta\upsilon)^2 dt$$

ilə qalıq hədd işarə etsək,

$$\Delta J(\upsilon)=\int_0^T\left(\int_\Omega Kudxdy-g(t)\right)\int_\Omega K\delta udxdydt+\alpha\int_0^T \upsilon\delta\upsilon dt+R$$

alarıq.

(20) qiymətləndirməsini və $K(x,y,t)\in L_\infty(Q)$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$R\le C\|\delta\upsilon\|^2_{L_2(0,T)} \tag{22}$$

olar.

δu funksiyası (17)-(19) sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həlli olduğundan ixtiyari $\eta(x,y,t)\in W_2^{2,1}(Q)$, $\eta(x,y,T)=0$,

$$\eta(0,y,t)=0,\frac{\partial\eta(0,y,t)}{\partial x}=0,\eta(x,0,t)=0,\frac{\partial\eta(x,0,t)}{\partial y}=0,$$

$$\eta(a,y,t)=0,\frac{\partial\eta(a,y,t)}{\partial x}=0,\eta(x,b,t)=0,\frac{\partial\eta(x,b,t)}{\partial y}=0$$

funksiyası üçün

$$\int_Q\left[-\rho\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}+D\Delta(\delta u)\Delta\eta\right]dxdydt-\int_Q a(x,y)\delta\upsilon(t)\eta(x,y,t)dxdydt=0 \tag{23}$$

inteqral eyniliyi doğrudur.

$\psi(x,y,t)$ funksiyası (13)-(15) qoşma məsələsinin ümumiləşmiş həlli olduğundan ixtiyari $\chi(x,y,t)\in W_2^{2,1}(Q)$, $\chi(x,y,0)=0$,

$$\chi(0,y,t)=0,\frac{\partial\chi(0,y,t)}{\partial x}=0,\chi(x,0,t)=0,\frac{\partial\chi(x,0,t)}{\partial y}=0,$$

$$\chi(a,y,t)=0,\frac{\partial\chi(a,y,t)}{\partial x}=0,\chi(x,b,t)=0,\frac{\partial\chi(x,b,t)}{\partial y}=0$$

funksiyası üçün

$$\int_Q\left[-\rho\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\chi}{\partial t}+D\Delta\psi\Delta\chi\right]dxdydt+\int_Q K(x,y,t)\left(\int_\Omega Kudxdy-g(t)\right)\chi dxdydt=0 \tag{24}$$

inteqral eyniliyi doğrudur.

(23)-də $\eta=\psi$, (22)-də $\chi=\delta u$ götürüb onları tərəf-tərəfə çıxsaq, aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$\int_Q K(x,y,t)\left(\int_\Omega Kudxdy-g(t)\right)\delta udxdydt=-\int_Q a(x,y)\delta\upsilon(t)\psi(x,y,t)dxdydt \tag{25}$$

(25) bərabərliyini funksionalın (21) artım düsturunda nəzərə alsaq, funksionalın artımı

$$\Delta J_\alpha(\upsilon)=\int_0^T\left[-\int_\Omega a(x,y)\psi(x,y,t)dxdy+\alpha\upsilon(t)\right]\delta\upsilon(t)dt+R \tag{26}$$

şəklinə düşər.

(22) qiymətləndirməsini nəzərə alsaq funksionalın artımının (26) düsturundan çıxır ki, baxılan məsələdə (7) funksionalının diferensialı

$$\langle J'(\upsilon),\delta\upsilon\rangle=\int_0^T\left[-\int_\Omega a(x,y)\psi(x,y,t)dxdy+\alpha\upsilon(t)\right]\delta\upsilon(t)dt \tag{27}$$

düsturu ilə hesablanır,

$$J'(\upsilon)=-\int_\Omega a(x,y)\psi(x,y,t)dxdy+\alpha\upsilon(t)$$

isə funksionalın qradiyentidir, yəni (7) funksionalı $L_2(0,T)$-də diferensiallanandır.

İndi göstərək ki, (7) funksionalı kəsilməz diferensiallanandır.

(16) və (11)-dən

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(Q)}\le C\left[\|a\|_{L_2(\Omega)}+\|\upsilon\|_{L_2(0,T)}+\|\varphi_0\|_{W_2^2(\Omega)}+\|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)}+\|g\|_{L_2(0,T)}\right]$$

qiymətləndirməsini alarıq.

İndi göstərək ki, $\upsilon\to J'(\upsilon)$ inikası $L_2(0,T)$-də kəsilməzdir.

(13)-(15) qoşma məsələsinin $\upsilon(t)$ və $\upsilon(t)+\delta\upsilon(t)$-yə uyğun həllərini $\psi(x,y,t;\upsilon)$ və $\psi(x,y,t;\upsilon+\delta\upsilon)$ kimi işarə edək. $\delta\psi(x,y,t)=\psi(x,y,t;\upsilon+\delta\upsilon)-\psi(x,y,t;\upsilon)$ olsun. Onda (16)-ə uyğun olaraq $\delta\psi$ üçün

$$\|\delta\psi\|_{W_2^{2,1}(Q)}\le C\|\delta u\|_{L_2(Q)}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Əgər burada (20) qiymətləndirməsini nəzərə alsaq,

$$\|\delta\psi\|_{W_2^{2,1}(Q)}\le C\|\delta\upsilon\|_{L_2(0,T)} \tag{28}$$

olar.

Onda (27) və (28)-dən alınır ki,

$$\|J'(\upsilon+\delta\upsilon)-J'(\upsilon)\|\le C\left[\|\delta\psi\|_{L_2(Q)}+\|\delta\upsilon\|_{L_2(0,T)}\right]\le C\|\delta\upsilon\|_{L_2(0,T)}.$$

Buradan alınır ki, $\|\delta\upsilon\|_{L_2(0,T)}\to 0$ olduqda $\|J'(\upsilon+\delta\upsilon)-J'(\upsilon)\|_{L_2(0,T)}\to 0$.

Beləliklə, göstərdik ki, $J_\alpha(\upsilon)$ funksionalı $L_2(0,T)$-də Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır.

Onda [13, səh. 28]-dəki məlum teoremə görə $\upsilon_*(t)$ idarəedicisinin baxılan məsələdə optimal idarəedici olması üçün zəruri şərt

$$\int_0^T\left[-\int_\Omega a(x,y)\psi_*(x,y,t)dxdy+\alpha\upsilon_*(t)\right](\upsilon(t)-\upsilon_*(t))dt\ge 0,\ \forall\upsilon\in U_{ad} \tag{29}$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir.

(7) funksionalı U_{ad}-də ciddi qabarıq olduğundan (29) şərti $\upsilon_*(t)$ idarəedicisinin optimallığı üçün həm də kafi şərtdir.

Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq:

Teorem 3. Məsələnin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulmuş şərtlər daxilində $\upsilon_*(t)$ idarəedicisinin (1)-(3), (7) məsələsində optimal idarəedici olması üçün zəruri və kafi şərt (29) bərabərsizliyinin ödənməsidir.

Misal. Tutaq ki, (1)-(3), (7) məsələsinin verilənləri aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$\alpha = 1,\ g(t) = \frac{1}{9}t,\ K = 100t,\ T = 1,\ \Omega = (0,1)\times(0,1),$$

$$a(x,y) = 24(y^4 - 2y^3 + y^2) + 8(6x^2 - 6x + 1)(6y^2 - 6y + 1) + 24(x^4 - 2x^3 + x^2),$$

Mümkün idarəedicilər sinfi olaraq

$$U_{ad} = \{\upsilon(t) \mid \upsilon(t) \in L_2(0,1),\ 1 \le \upsilon(t) \le 2,\ [0,1]\text{-də s.h.y.}\}$$

götürək.

Onda funksional

$$J_0(\upsilon) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^1\int_0^1 100t(x^4 - 2x^3 + x^2)(y^4 - 2y^3 + y^2)dxdy - \frac{1}{9}t\right]^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T \upsilon^2(t)dt$$

şəklində olur.

Baxılan misalda $\upsilon_*(t) = 1$ idarəedicisinə uyğun (1)-(4) məsələnin həlli

$$u_*(x,y,t) = (x^4 - 2x^3 + x^2)(y^4 - 2y^3 + y^2)$$

və

$$\int_\Omega K(x,y,t)u_*(x,y,t)dxdy = g(t)$$

şərti ödəndiyindən (13) tənliyinin sağ tərəfi sıfıra bərabərdir. Onda (13)-(15) qoşma məsələsinin həllinin yeganəliyinə görə $\psi_*(x,y,t) \equiv 0$ olur.

Bu halda (29) bərabərsizliyi

$$\int_0^1 \upsilon_*(t)(\upsilon(t) - \upsilon_*(t))dt \ge 0,\ \forall \upsilon(t) \in U_{ad}$$

və ya

$$\int_0^1 (\upsilon(t) - 1)dt \ge 0,\ \forall \upsilon(t) \in U_{ad}$$

şəklinə düşür. (29) bərabərsizliyi $\forall \upsilon(t) \in U_{ad}$ üçün ödənildiyindən və həm də bu bərabərsizlik optimallıq üçün kafi şərt olduğundan $\upsilon_*(t) = 1$ idarəedicisi baxılan misalda optimal idarəedicidir.

ƏDƏBİYYAT

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972, 736 с.
2. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975, 160 с.
3. Арман Ж.-Л.П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.: Мир, 1977, 144 с.
4. Daqun Tong and Robert L. Williams II, Sunil K. Agrawal. Optimal shape control of composite thin plates with piezoelectric actuators. Journal of Intelligent Material Systems and Structures. Vol. 9, pp. 458-467, June, 1998.
5. V.S. Deineka. Optimal control of the dynamic state of a thin compound plate. Cybernetics and Systems Analysis. Vol. 42, pp. 151-175, No 4, 2006.
6. Sadek S., Adali S., Sloss J.M., Bruchjr J.C. Vibration damping of a thin plate by optimal open-and closed-loop control forces // Journal of the Franklin Institute Pergamon Presa ple. Vol.329, No.2, pp.207-214, 1992. Printed in Great Britain.
7. Maria L. Blanton & Ibrahim S. Sadek. Optimal active pointwise of thin plates via state-control parametrization. International Journal of Systems Science. Vol. 25. Issue 11, 1994. pp.2001-2014.
8. Zhang X., Zhang J. The hybrid control of vibration of thin plate with active constrained damping layer // Applied Mathematics and Mechanics. English Edition, Vol.19, No.12, Dec. 1998, pp.1119-1134.
9. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009, 457 с.
10. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
11. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983, 424 с.
12. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 416 с.
13. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 399 с.

ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

Г.Ф.КУЛИЕВ, Х.И.СЕЙФУЛЛАЕВА

РЕЗЮМЕ

В представленной работе рассмотрена задача оптимального управления с квадратичным критерием для линейного уравнения колебаний тонкой пластины. В работе сначала изучается существования и единственность решения краевой задачи, далее доказывается теорема существования оптимального управления, выводится необходимое и достаточное условие оптимальности в виде интегрального неравенства.

Ключевые слова: тонкая пластина, оптимальное управление, условие оптимальности.

AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR EQUATION OF VIBRATIONS FOR THIN PLATE

H.F.QULIYEV, Kh.I.SEYFULLAYEVA

SUMMARY

At the work considered optimal control problem for linear equation of vibrations for thin plate with quadratic cost. The first for every fixed admissable control learned existense and uniqueness of solution of boundary value problem. Next, proved the teorem of existence optimal control and obtanied necessary and sufficient condition of optimality at the form inteqral inequality.

Key word: thin plate, optimal control, optimality condition.

Redaksiyaya daxil oldu: 24.05.2019-cu il
Çapa imzalandı: 16.10.2019-cu il.