BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

UOT 519.8

XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMANIN BLOK-ÜÇBUCAQ MATRİSLİ BİR MƏSƏLƏSİ VƏ ONUN HƏLLİ ÜÇÜN AYRILIŞ SXEMİ

R.H.HƏMİDOV
Bakı Dövlət Universiteti
Bsu_edu.gov.az

İşdə blok-üçbucaq matrisli böyük ölçülü bir sinif xətti proqramlaşdırma məsələsi üçün ayrılış sxemi verilmişdir. Sxemin köməyilə məsələ həm dəyişənlərinin, həm də məhdudiyyətlərinin sayı daha az olan məsələlərin köməyilə həll olunur. Təklif olunan sxemin üç variantda icra sxemi göstərilir. Bunlar sətrlərlə icra sxemi, bloklarla icra sxemi və iterasiya yolu ilə icra sxemləridir. Sxemin müfəssəl şərhi ədədi misal üzərində nümayiş edilmişdir. İşdə təklif olunan sxemin tətbiq sahələri də göstərilmişdir.

Açar sözlər: Xətti proqramlaşdırma, bazis həll, simpleks üsul, blok proqramlaşdırma.

Həllin seçilməsi ilə bağlı bir çox məsələlər özlərinə məxsus spesifikaya malik olur. Bu hal adətən böyük məsələlərdə baş verir [1]. Məsələnin spesifikasının strukturunu nəzərə almaqla bu cür məsələlər üçün işlənib hazırlanmış həll alqoritmləri hesablamanın effektivliyini əhəmiyyətli dərəcədə artırmağa imkan verir. Belə alqoritmlər real böyük ölçülü məsələlərin standart üsullarla həlli zamanı baş verə biləcək bir çox çətinlikləri aradan qaldırır.

Böyük ölçülü məsələlərin əksər hissəsi xətti proqramlaşdırma məsələsi kimi təqdim olunur. Məsələnin ölçüsü bu halda dəyişənlərin sayından, bu dəyişənləri bir-biri ilə bağlayan məhdudiyyətlərin sayının çox olmasından və bu məhdudiyyətlərin xarakterindən asılıdır. Belə məsələlərdən biri müsbət elementləri diaqonalda yerləşən blok-üçbucaq şəkilli xətti proqramlaşdırma məsələsidir [2]. Müsbət elementləri diaqonalda yerləşən blok-üçbucaq şərti qoyulmadan belə məsələlər ətraflı şəkildə [3]-də öyrənilmişdir. [3]-də təklif olunan alqoritmlər burada baxdığımız blok-üçbucaq halı üçün də tətbiq oluna bilər. Lakin blokların sayı çox olduqda və hər bir blokun özünün ölçüsü böyük olduqda [3]-dəki alqoritmlərin tətbiqində hesablama prosesinin təşkili və bu hesablamanın aparılması ilə bağlı bir çox çətinliklər qarşıya çıxır. Bu çətinliklər elə böyük məsələləri standart yolla həll edən zaman qarşıya çıxan çətinliklər kimi olur. Təqdim olunan işdə bu problemin aradan qaldırılması məqsədilə ayrılış sxemi təklif olunur. Sxemin köməyilə məsələ onun qoyuluşundakı sətr blokların iştirakı ilə tərtib olunan və diaqonal blokların sayı qədər olan alt məsələnin həllinə gətirilir. Hər bir alt məsələni həll edən zaman isə diaqonal blokdakı sətrlərinin sayı qədər onda olan dəyişənlərdən yalnız optimal bazisə daxil olan sətrlər üzərində çevirmə icra olunur. Başqa sözlə hər bir alt məsələnin məhdudlarının yalnız bir hissəsi hesablama prosesinə cəlb olunur və bu hissə lazım gəldikcə müraciət olunan şərtdəki sətrlərin bir-birinin ardınca hesablamaya cəlb olunmasından təşkil olunur. Təklif olunan sxemin hər bir addımı baxılan məsələ üçün [3]-dəki alqoritmlərin hər bir addımından daha sadədir və onun effektivliyini asanlıqla nümayiş etdirmək mümkündür. Bu məqsədlə ədədi misala baxırıq. Təqdim olunan ayrılış alqoritminin ayrı-ayrı detalları bu misalda daha qabarıq özünü göstərir və [3]-dəki sxemə nəzərən təklif olunan sxemin effektivliyini əyani formada təsdiqləyir.

1. Məsələnin qoyuluşu

(mxm) –ölçülü nxn sayda $A_{ij}\ , i,j = 1,\dots,n$ matrisləri verilmişdir və onlar üzərinə belə şərtlər qoyulur: $A_{ij}, i = j$ olduqda diaqonal elementləri müsbət, diaqonal olmayan elementləri isə müsbət deyillər, $A_{ij}, i \neq j$ olduqda elementləri müsbət deyil, $A_{ij}, i < j$ olduqda elementləri sıfıra bərabərdir. $b^i, i = 1,\dots,n$ verilmiş m -ölçülü mənfi olmayan koordinatlara malik sütun vektorlardır, $c^i, i = 1,\dots,n$ verilmiş m -ölçülü sətr vektorlarıdır, $x^i, i = 1,\dots,n$ m -ölçülü naməlum koordinatlı vektorlardır. Vektorlar arasındakı $\geq$ münasibəti koordinatlara görə olan $\geq$ münasibətini ifadə edir. Bu işarələmələrin köməyilə baxacağımız blok-üçbucaq şəkilli məsələni aşağıdakı kimi yaza bilərik.

$$
\begin{aligned}
&A_{11}x^1 && \leq b^1\\
&A_{21}x^1 + A_{22}x^2 && \leq b^2\\
&\quad\cdot && \quad\cdot\\
&\quad\cdot && \quad\cdot\\
&\quad\cdot && \quad\cdot\\
&A_{n1}x^1 + A_{n2}x^2 + \dots + A_{nn-1}x^{n-1} + A_{nn}x^n && \leq b^n\\
&x^1 \geq 0, x^2 \geq 0, \dots, x^{n-1} \geq 0, x^n \geq 0\\
&c^1x^1 + c^2x^2 + \dots + c^{n-1}x^{n-1} + c^nx^n \to max
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Əlavə olaraq fərz olunur ki, A_{ii} , i=1,2,...n -nin elementləri mənfi deyil.

(1) məsələsinin matrisini A ilə işarə edək, onun sağ tərəfini ifadə edən sütun vektoru b, məqsəd funksiyasının əmsallarını ifadə edən sətr vektoru c, naməlum dəyişənlərin sütun vektorunu isə x ilə işarə edək. Onda (1)-i

$$Ax \leq b\,, x \geq 0, \tag{2}$$

$$cx \to \max$$

kimi yaza bilərik.

$m = 1$ olduqda (2) məsələsinin həlli üçün [3] də həm sonlu və həm də iterativ effektiv həll alqoritmləri işlənib hazırlanmışdır. (1) üçün də, yəni $m \geq 1$ olduqda da bu alqoritmlər istifadə oluna bilər. Lakin m -in qiyməti böyük olduqda bu alqoritmlər də ölçü ilə bağlı problemləri aradan qaldırmaqda acizdirlər. Ona görə də bu faktla bağlı problemin həllini verən proseduranın işlənib hazırlanmasına ehtiyac vardır.

(1) şəkilli xətti proqramlaşdırma məsələsi ilə bir çox texniki və iqtisadi yönümlü praktiki məsələlərin həllinin ədədi realizasiyası zamanı qarşılaşırıq (məs., bax [3]). Belə məsələlərdən birinə, məsələn, neft yataqlarının elastik rejimdə istismarının optimal rejimdə aparılmasını tədqiq edən zaman qarşıya çıxan aşağıdakı dinamik xətti proqramlaşdırma məsələsinin ədədi realizasiyası zamanı rast gəlirik [3]:

$$J = \int_0^T c(t)x(t)dt \to max,$$

$$x(t) - F[x(t)] \leq b(t), x(t) \geq 0, 0 \leq t \leq T. \qquad (3)$$

Burada

$F[x(t)] \equiv A(t)x(t) + \int_0^\tau H(t,\tau)x(\tau)d\tau,\;\; c(t), b(t), x(t) - n$-ölçülü vektor funksiyalardır; $A(t), H(t,\tau)\;\; nxn$ -ölçülü matris funksiyalardır. (3)-dəki bərabərsizliklər vektorun hər bir ayrı-ayrı koordinatları üzrə olan bərabərsizlik kimi başa düşülür. $c(t), b(t), x(t) \epsilon L_r^n[0,T]$.

F operatoru $L_2^n[0,T]$- ni özünə inikas etdirir.

Başqa bir praktiki məsələ iqtisadi sahədən olan Markoviçin ümumi gəlirin maksimallaşdırılması məsələsidir [3].

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i, 0 \leq y_i \leq x_i, i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^T (x_i - y_i) d\tau \to max.$$

[3]-də (3) məsələsinə gələn praktiki məsələlərin ətraflı şəkildə sistemli yanaşmanın köməyilə təhlili verilmişdir. Verilən təhlil belə məsələlərin tətbiq sahəsinin həm geniş, həm də mühüm praktik əhəmiyyət kəsb etdiyini göstərir.

2. Ədədi misal üzərində ayrılış sxeminin şərhi

İki blok diaqonala malik (1) məsələsinə baxaq:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix},$$

$$c^1x^1 + c^2x^2 \to max, x^1, x^2 \epsilon E^n.$$

Burada:

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.7 & -0.1 & -0.4 \\ -0.3 & -0.2 & 0.8 & -0.1 \\ -0.1 & -0.4 & 0.1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{22}=\begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & 0.8 & -0.1 & -0.5 \\ -0.2 & -0.1 & 1 & -0.6 \\ -0.1 & -0.3 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} -1 & -0.4 & -0.5 & -0.2 \\ -0.1 & -0.2 & -0.6 & -0.1 \\ -0.6 & -0.4 & -0.1 & -0.8 \\ -0.2 & -0.1 & -0.3 & -0.4 \end{pmatrix} \qquad b^1=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} b^2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c^1 = (-2, -6, -10, 1), \; c^2=(5\ -10\ -1\ -12)$$

Məsələni verilənlərin köməyilə yazaq.

$$\begin{array}{ll}
0.8x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.1x_4 & \le 4, \\
-0.1x_1 + 0.7x_2 - 0.1x_3 - 0.4x_4 & \le 3, \\
-0.3x_1 - 0.2x_2 + 0.8x_3 - 0.1x_4 & \le 5, \\
-0.1x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 + 1x_4 & \le 2, \\
-x_1 - 0.4x_2 - 0.5x_3 - 0.2x_4 + 0.7x_5 - 0x_6 - 0.2x_7 - 0.1x^8 & \le 1, \\
-0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.6x_3 - 0.1x_4 - 0x_5 + 0.8x_6 - 0.1x_7 - 0.5x^8 & \le 3, \\
-0.6x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 - 0.8x_4 - 0.2x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.6x^8 & \le 1, \\
-0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.4x_4 - 0.1x_5 - 0.3x_6 - 0.2x_7 + 1x^8 & \le 4, \\
x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0; x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ x_5 \ge 0; x_6 \ge 0; x_7 \ge 0;\ x_8 \ge 0, & \\
-2x_1 - 6x_2 - 10x^3 + x_4 + 5x_5 - 10x_6 - x_7 - 12x_8 \to max. &
\end{array} \quad (1)$$

Aşağıdakı kimi iki (2) və (3) məsələsinə baxacağıq:

$$\begin{array}{ll}
0.8x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.1x_4 & \le 4, \\
-0.1x_1 + 0.7x_2 - 0.1x_3 - 0.4x_4 & \le 3, \\
-0.3x_1 - 0.2x_2 + 0.8x_3 - 0.1x_4 & \le 5, \\
-0.1x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 + 1x_4 & \le 2, \\
x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0, & \\
-2x_1 - 6x_2 - 10x_3 + x_4 \to max &
\end{array} \quad (2)$$

(2)-nin məqsəd funksiyasının əmsalları ayrılış sxeminin icrası zamanı ona müraciət olunduqda mövcud qiymətlərdən fərqli olacaqlar

$$\begin{array}{l}
-x_1 - 0.4x_2 - 0.5x_3 - 0.2x_4 + 0.7x_5 - 0x_6 - 0.2x_7 - 0.1x_8 \le 1, \\
-0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.6x_3 - 0.1x_4 - 0x_5 + 0.8x_6 - 0.1x_7 - 0.5x_8 \le 3, \\
-0.6x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 - 0.8x_4 - 0.2x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.6x_8 \le 1,
\end{array} \quad (3)$$

$$-0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.4x_4 - 0.1x_5 - 0.3x_6 - 0.2x_7 + 1x_8 \le 4\,,$$
$$x^5 \ge 0; x_6 \ge 0; x_7 \ge 0;\ x_8 \ge 0,$$
$$5x^5 - 10x_6 - x_7 - 12x_8 \to max.$$

Məqsəd baxılan (1) məsələsini diaqonal blokun iştirakı ilə tərtib olunan daha kiçikölçülü (2) və (3) kimi məsələnin köməyilə həll etməkdir. Yəni (1) məsələsini daha kiçikölçülü, sayı diaqonal blokların sayı qədər olan məsələlərə gətirən ayrılış sxemi verməkdir. Sxemin misal üzərində müfəssəl şərhini iki addımda icra edəcəyik.

1-ci addım

Əvvəlcə axırıncı iki A_{21} $və\, A_{22}$ blokun iştirakı ilə olan aşağıdakı məsələyə baxırıq:

$$-x_1 - 0.4x_2 - 0.5x_3 - 0.2x_4 + 0.7x_5 - 0x_6 - 0.2x_7 - 0.1x_8 \le 1,$$
$$-0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.6x_3 - 0.1x_4 - 0x_5 + 0.8x_6 - 0.1x_7 - 0.5x_8 \le 3,$$
$$-0.6x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 - 0.8x_4 - 0.2x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.6x_8 \le 1,$$
$$-0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.4x_4 - 0.1x_5 - 0.3x_6 - 0.2x_7 + 1x_8 \le 4\,,$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0; x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ x_5 \ge 0; x_6 \ge 0; x_7 \ge 0;\ x_8 \ge 0,$$
$$-2x_1 - 6x_2 - 10x^3 + x_4 + 5x_5 - 10x_6 - x_7 - 12x_8 \to max.$$

Məqsəd funksiyasının ikinci bloka uyğun dəyişənlərinin əmsallarından düzələn

$$c^2 = \left(5, -10, -1, -12\right)$$

vektorunun koordinatları içərisində müsbət olanı yoxdursa 2-ci addıma keçirik. Əks halda sağdan sola ilk müsbət əmsala malik həddə baxırıq. Baxdığımız misalda bu x_5 - lə bağlı həddir. Sonra məsələnin şərtləri içərisində x_5 -in əmsalı müsbət olan bərabərsizliyi seçib onu aşağıdakı kimi bərabərliklə əvəz edirik.

$$-x_1 - 0.4x_2 - 0.5x_3 - 0.2x_4 + 0.7x_5 - 0x_6 - 0.2x_7 - 0.1x_8 - 1 = 0$$

Bərabərliyi x_5 -in əmsalı vahid olan hala gətiririk.

$$-1.43x_1 - 0.59x_2 - 0.71x_3 - 0.29x_4 + 1x_5 - 0x_6 - 0.29x_7 - 0.14x_8 - 1.43 = 0 \quad (4)$$

Alınan bərabərliyin sol tərəfini (-5)-ə vurub məqsəd funksiyasının üzərinə gəlib və x_5 -i bu funksiyadan kənarlaşdırırıq.

$$5.15x_1 - 3.05x_2 - 6.45x_3 + 2.45x_4 + 0x_5 - 10x_6 + 0.45x_7 - 11.3x_8 + 7.15 \to max$$

Yeni məqsəd funksiyasının əmsalları əvvəlkilərdən müsbət artım almaqla dəyişikliyə uğrayır. İlkin halda əmsalı mənfi olan x_7 dəyişəni yoxetmə prosesindən sonrakı müsbət əmsala malik olur. Yenə də yeni məqsəd funksiyasının axırıncı diaqonal bloka uyğun $c^2 = (0, -10, 0.45, -11,28)$ əmsallar vektorunun sağdan sola ilk müsbət koordinatını seçirik. Bu koordinat 0.45 olub x_7 -nin əmsalıdır. Şərtlərdən x_7 -nin əmsalı müsbət olanı bərabərliyə çeviririk.

$$-0.6x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 - 0.8x_4 - 0.2x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.6x_8 - 1 = 0 \quad (5)$$

(1)-in köməyilə (2)-dən x_5-i kənarlaşdırırıq. (1)-in hər iki tərəfini 0.2-yə vuraq:

$$-0.29x_1 - 0.12x_2 - 0.14x_3 - 0.06x_4 + 0.2x_5 - 0x_6 - 0.06x_7 - 0.03x_8 - 0.29 = 0$$

Bərabərliyin sol tərəfini (5)-nin sol tərəfi ilə toplayaq:

$$-0.95x_1 - 0.55x_2 - 0.26x_3 - 0.91x_4 + 0x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.67x_8 - 1.31 = 0$$

Bərabərliyin hər iki tərəfini 0.94-ə bölürük:

$$-0.95x_1 - 0.55x_2 - 0.26x_3 - 0.91x_4 + 0x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.67x_8 - 1.31 = 0 \quad (6)$$

(6)-dan istifadə edib x_7-ni məqsəd funksiyasından kənarlaşdıraq. (6)-nın sol tərəfini (-0.45)-ə vuraq:

$$0.43x_1 + 0.25x_2 + 0.12x_3 + 0.41x_4 + 0x_5 + 0.05x_6 - 045x_7 + 0.3x_8 + 059 = 0$$

Bərabərliyin sol tərəfini məqsəd funksiyasının üzərinə gələk

$$5.58 - 2.8x_2 - 6.33x_3 + 2.86x_4 - 0x_5 - 9.95x_6 + 0x_7 - 11x_8 + 7.74 \to max \quad (7)$$

yenidən c^2 vektorunu tərtib edirik:

c^2=(0, -9.95, 0, -11)

Məsələnin x^{op} həlli üçün $x_6^{op} = 0$, $x_8^{op} = 0$ olduğunu qəbul edirik. c^2-nin müsbət koordinatı olmadığı üçün keçid edirik 2-ci addıma.

2-ci addım

Bu addımda birinci blokla bağlı aşağıdakı məsələyə baxırıq:

$$\begin{aligned}
&0.8x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.1x_4 \le 4,\\
&-0.1x_1 + 0.7x_2 - 0.1x_3 - 0.4x_4 \le 3,\\
&-0.3x_1 - 0.2x_2 + 0.8x_3 - 0.1x_4 \le 5,\\
&-0.1x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 + 1x_4 \le 2,\\
&x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0,\\
&Z = 5.58 - 2.8x_2 - 6.33x_3 + 2.86x_4 + 7.74 \to max
\end{aligned}$$

1-ci addıma analoji olaraq hərəkət edirik. Məqsəd funksiyasının birinci bloka uyğun

$$c^1 = \left(5.58\,, -2.8, -6.33, 2.86\right)$$

əmsallar vektorunu tərtib edirik. Sağdan ilk müsbət koordinatı, yəni x_4-ün əmsalını seçirik və məsələnin şərtlərindən bu dəyişənin əmsalı müsbət olanı seçib onu bərabərliyə çeviririk:

$$c^1 = (5.58\,, -2.8, -6.33, 2.86) \quad (8)$$

olacaq.

(7)-dən istifadə edib məqsəd funksiyasından x_4-ü kənarlaşdırırıq. Əvvəlcə (7)-nin hər iki tərəfini (-2.86)-ya vuraq.

$$0.29x_1 + 1.14x_2 + 0.29x_3 - 2.86x_4 + 5.72 = 0$$

Bərabərliyin sağ tərəfini məqsəd funksiyasının üzərinə əlavə edək.
$Z = 5.87x_1 - 1.66x_2 - 5.04x_3 + 0x_4 + 13.36 \to max$
$c = (5.87, -1.66, -5.04, 0)$,
$c_1^1 = 5.87 > 0$.
Onda məsələnin birinci şərtini

$$0.8x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.1x_4 - 4 = 0 \quad (9)$$

tənliyi ilə əvəz edirik. Bu tənlikdən (8)-in vasitəsilə x_4-ü kənarlaşdırırıq. (7)-nin hər iki tərəfini 0.1-ə vuraq.
$-0.01x_1 - 0.04x_2 - 0.01x_3 + 0.1x_4 - 0.2 = 0$
Bərabərliyin sol tərəfini (9)-un sol tərəfinin üzərinə əlavə edək
$-0.01x_1 - 0.04x_2 - 0.01x_3 + 0.1x_4 - 0.2 = 0$
İndi isə x_1-in əmsalını soldakı ifadədə 1-ə çevirən əməliyyatı icra edək:

$$x_1 - 0.18x_2 - 0.4x_3 + 0x_4 - 5.44 = 0 \quad (10)$$

(10)-nun köməyilə x_1-i Z-in axırıncı ifadəsindən kənarlaşdıraq.
$Z = 0x_1 - 0.62x_2 - 3.73x_3 - 0x_4 + 0x_5 + 40.66 \to max$
c^1-in yeni ifadəsini yazaq:

$$c^1 = \left(0, -0.62, -0.73, 0\right)$$

$c_i^1 \leq 0, i = 1,2,3,4$ olduğundan 2-ci addımı tamamlayırıq və $x_2^{op} = 0$, $x_3^{op} = 0$ qəbul edirik. Optimal x^{op} həllin qalan $x_1^{op}, x_4^{op}, x_7^{op}, x_5^{op}$ koordinatları (10),(8),(6),(4) ifadələrinin köməyilə ardıcıl olaraq aşağıdakı kimi hesablanır:
$x_1^{op} = 5.32$ ((10)-dan alırıq),
$x_4^{op} = 0.1x_1^{op} + 2 = 2.54$ ((8)-dən alırıq),
$x_7^{op} = 0.95x_1^{op} + 0.91x_4^{op} + 1.31 = 8.78$ ((6)-dən alırıq),
$x_5^{op} = 1.43x_1^{op} + 0.29x_4^{op} + 0.29x_7^{op} + 1.43 = 12.09$
((4)-dən alırıq).
Deməli,
$x^{op} = \left(5.32, 0, 0, 2.53, 12.57, 0, 9.73\ 0\right)$,
$Z^{op} = 40.66$

Beləliklə, diaqonal blokların sayı qədər (baxdığımız misalda bu say ikiyə bərabərdir) və hər dəfə diaqonal blokun sətrləri sayı qədər dəyişənlərin bir hissəsindən istifadə etməklə (bizim halda sətrlərin sayı dördə, istifadə olunan dəyişənlərin sayı isə ikidir) səkkiz dəyişənli məsələni iki mərhələdə həll etdik. Başqa sözlə ilkin məsələni iki kiçik məsələyə gətirdik. Həll prosesində bu iki məsələ arasındakı əlaqə məsələnin kriteriyası vasitəsilə koordinə edilirdi.

3. Ayrılış alqoritminin şərhi

Ayrılış alqortminin misal üzərində şərhi onu asanlıqla ümumi hala genişləndirməyə imkan verir.

Alqoritmin şərhi.

Alqoritmin sətr formasında icrası

$$A_{n1}x^1 + A_{n2}x^2 + \cdots + A_{nn-1}x^{n-1} + A_{nn}x^n \le b^n, \qquad (11)$$

$$Z = c^1x^1 + c^2x^2 + \cdots + c^{n-1}x^{n-1} + c^nx^n, \qquad (12)$$

$$c^n = (c_1^n, c_2^n, \dots, c_m^n) \qquad (13)$$

ifadələrini (1)-dən götürüb (12)-nin üzərində (13) və (12)-dən istifadə etməklə aşağıdakı çevirməni icra edirik. Əvvəlcə $m_0 = min\{k|c_{m-k}^n > 0, k = 0,1, \dots, (n-1)\}$ ədədinin olub olmadığını yoxlayırıq. Olmadıqda sonrakı addıma keçirik. m_0-ın olduğu halda

$$(A_{n1}x^1 + A_{n2}x^2 + \cdots + A_{nn-1}x^{n-1} + A_{nn}x^n \le b^n)_{m_0=}(b^n)_{m_0} \qquad (14)$$

bərabərliyindən $x_{m_0}^n$-ın yerdə qalan x_i^n dəyişənləri ilə ifadəsini (12)-də $c_{m_0}^n$-da yerinə yazırıq və bu zaman (12)-nin yeni ifadəsini

$$Z^{(1)} = c^{1(1)}x^1 + c^{2(1)}x^2 + \cdots + c^{n-1(1)}x^{n-1} + c^{n(1)}x^n + \alpha^{(1)}$$

tərtib edirik. $Z^{(1)}$-in əmsalları Z-in əmsallarından yalnız müsbət artım almaqla fərqlənə bilər və $\alpha^{(1)} \ge 0$.

İndi isə $c^{n(1)}$ vektoru üçün

$$m_1 = min\{k|c_{m-k}^{n(1)} > 0, k = 0,1, \dots, m-1\}$$

kimi ədədin olub olmadığını yoxlayırıq. Olmadıqda sonrakı addıma keçirik. Əgər belə ədəd varsa, onda $m_1 \ne m_0$ və (14)-dən istifadə etməklə

$$(A_{n1}x^1 + A_{n2}x^2 + \cdots + A_{nn}x^n)_{m_1=}b_{m_1} \qquad (15)$$

bərabərliyindən x_{m_0}-ı yox edirik, sonra isə yeni alınmış (15) bərabərliyinin köməyilə x_{m_1}-i $Z^{(1)}$-in ifadəsindən kənarlaşdırıb $Z^{(2)}$ və $\alpha^{(2)}$-ni hesablayırıq. c^n-nin koordinatlarının sayı sonlu olduğu üçün proses sonlu addımdan sonra başa çatacaqdır. Sonda blokların sayı bir vahid az olan (1) məsələsini almış oluruq. Deyilənləri yeni alınmış (1) məsələsi üçün icra edirik. Beləliklə, n sayda (mxm)- ölçülü matrisin yalnız bir hissəsi üzərində Qaus yoxetməsini icra etməklə (1) məsələsini həll etmiş oluruq.

Alqoritmin əsaslandırılması [3]-dəki xassələrdən bilavasitə alınır. Təqdim olunan ayrılış sxeminin [3]-də təqdim olunan həll sxemindən üstünlüyü A_{ii} blokundan istifadə olunmaqla (14) ilə bağlı çevirmə prosesində başqa diaqonal bloku olan məhdudiyyətlərə müraciətə lüzumun olmamasıdır. Başqa sözlə (1)-in həll prosesini n-sayda daha kiçikölçülü məsələlərin həllinə gətirmiş oluruq.

Ayrılış sxeminin blok şəkilli icrası

Əvvəlcə

$$A_{nn}x^n \le b^n, x^n \ge 0, \tag{16}$$

$c^n x^n \to \max$

kimi məsələyə baxırıq. Alqoritmin sətr formasında olan variantındakı kimi hərəkət edirik, lakin bu zaman yalnız x^n dəyişənli

$(A_{nn} x^n)_i = b_i$

bərabərliklərindən istifadə edib x_i^n dəyişənlərini uyğun olaraq blok şəklində [3]-dəkinə uyğun olaraq lazım gəldikcə $c^n x^n$-dən kənarlaşdırırıq və sonda kənarlaşdırılan dəyişənləri (16) məsələsinin optimal bazis həllinin bazis dəyişənləri kimi qəbul edirik. Bu dəyişənlər həm də (1) məsələsinin optimal bazis həllinin bazis dəyişənləri olur. Sadəlik üçün bu dəyişənlərin $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n, \dots, x_m^n)^T$ sırasının ilk k_n yerdə durduğunu fərz edək. Onda ayrılış alqoritmin iş prinsipinə əsasən (1)-in axırıncı blok formalı şərtini

$$\left(A_{nn}x^n\right)_i = b_i^n, i = 1, \dots, k_n \tag{17}$$

şərti ilə əvəz edə bilərik. (17)-dəki bazis dəyişənlərin bazis olmayan dəyişənlərlə aşağıdakı ifadəsini yaza bilərik:

$$x^{nb} = -A_{nn}^{b-1}A_{nn}^{bo}x^{nbo} + A_{nn}^{b-1}b^{nb} \tag{18}$$

Burada A_{nn}^{b}, A_{nn}^{bo}, x^{nbo} + b^{nb} blokları x^{nb} -yə uyğun A_{nn}, x^n və $b^n -$ dən kəsilib ayrılan hissələrdir. Onda (12)-dən x^{nb}-yə daxil olan dəyişənləri yox etmək üçün A_{nn}^{b-1} tərs matrisini yox $c^{nb}A_{nn}^{b-1}$-ni hesablamaq kifayətdir. Çünki qeyd olunan çevirmə (12)-ni

$$\left(c^1 - c^{nb}A_{nn}^{b-1}A_{nn}^{bo}\right)x^1 + \dots + \left(c^{n-1} - c^{nb}A_{nn-1}^{b-1}A_{nn-1}^{bo}\right)x^{n-1} + c^bA_{nn}^{b-1}b$$

şəklinə salır. $c^{nb}A_{nn}^{b-1}$-ni bilməklə bu çevirməni icra edə bilərik. $c^{nb}A_{nn}^{b-1}$ - ni isə A_{nn}^{b-1} tərs matrisini tapmadan

$$uA_{nn}^b = c^{nb} \tag{19}$$

tənliyinin həlli kimi tapa bilərik. Tələb olunan həllin tapılması bir çox halda tərs matrisin tapılmasından sadə olur. Beləliklə, ayrılış sxemini $A_{ii}^b, i = 1, \dots, n$ blokların köməyilə düzələn k_i ölçülü (19) kimi tənliklərin həllindən istifadə olunan bir sxem kimi təqdim etmiş oluruq.

Blokların sayı çox olduqda, A_{ii}-lərin ölçüsü isə kiçik olduqda ayrılış alqoritminin blok şəklindəki icrasına üstünlük verməк məqsədəuyğundur.

Blokların sayı az olduqda isə alqoritmin sətr formasında olan variantına üstünlük vermək lazımdır.

Ayrılış alqoritminin iterativ formada icrası

Əvvəlcə (1) məsələsinin şərtlərində sadə çevirmə aparmaqla A_{nn}-ləri $E - \bar{A}_{nn}$ kimi təqdim edirik.Burada $E\ nxn$ ölçülü vahid matrisdir, $\bar{A}_{nn}$ isə mənfi olmayan elementli mxm - ölçülü matrisdir. Onda

$$u^{r+1} = \max(0, c^i + u^r \bar{A}_{ii}), u^0 = 0, i = 1, \dots \tag{20}$$

ardıcıllığının köməyilə

$$uA_{ii}^b = c^b \tag{21}$$

tənliklərinin həllərini tapırıq. (21)-in həlli (20)-nin həllindən sıfır olan koordinatları atmaqla alınır. (21)-in həlli $\lim_{r\to\infty} u^r = u^*$ kimi tapılır.

İterativ üsul proqram təminatı üçün əlverişlidir. Çünki bu halda ayrılış sxemi n sayda sadə iterasiyaya yaxın iterasiyanı icra etməklə təşkil oluna bilər.

Qeyd: Ayrılış sxeminin blok və iterativ formaları (1) məsələsinə qoşma olan məsləni həll edir. Sətrlə olan ayrılış sxemi isə (1) məsələsinin optimal həllini bilavasitə tapır. İkinci halda (1)-in optimal həllini qurmaq üçün əlavə olaraq n sayda $A_{ii}^b x^b = b^b, i = 1, \dots, n$ tənlikləri həll etməli oluruq. Lakin elə məsələlər var ki, yalnız ikili məsələni həll etmək kifayət edir. Məsələn, bizi qoyulmuş məsələnin optimal qiyməti maraqlandırırsa onda ikili məsələnin həlli kifayətdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Лэсдон Л. Оптимизация больших систем. М.: Наука, 1975, 432 с.
2. Hamidov R.H, Mutallimov M.M, Hwseynova X.Y, Javadzade R.R. Reduction of one block linear multicriteria decision - making problem. Advanced Mathematical Models and Application. Vol.3, №3, 2018, pp227-233
3. Мееров М.В. Исследование и оптимизация многосвязных систем управления. М: Наука, 1986, 235 с.

СХЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНОЙ ФОРМЫ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р.Г.ГАМИДОВ

РЕЗЮМЕ

В работе предлагается схема разложения для решения одной задачи линейного программирования большой размерностью блочно-треугольную формы записи. Схема разложения предлагается в трех вариантах строчный блочный и итерационный. Приводится числовой пример с целью более детально иллюстрировать отдельные шаги схемы и иметь наглядное представление о ее числовой реализации и эффективности.

Ключевые слова: Линейное программирование, базисное решение, симплекс метод, блочное программирование

ONE BLOCK-TRIANGLE SHAPE OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEM AND DECOMPOSITION SCHEME FOR ITS SOLUTION

R.H.HAMIDOV

SUMMARY

One block triangle shape linear programming problem is considered and a decomposition method is suggested to solve the problem by solving a number of problems with less dimentions. A numerical example is given to illustrate more details each step of decomposition scheme and its effiency.

Keywords: Linear programming, basis solution, simplex method, block programming

Redaksiyaya daxil oldu: 07.03.2019-cu il
Çapa imzalandı: 16.10.2019-cu il