BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

UOT 517.518.12

ÇƏKİLİ HÖLDER FƏZALARINDA KOŞİ SİNQULYAR İNTEQRAL OPERATORU ÜÇÜN QİYMƏTLƏNDİRMƏLƏR

A.Ə.ƏKBƏROV
Bakı Dövlət Universiteti
asimakbarov@mail.ru

İşdə birölçülü Koşi sinqulyar inteqral operatorunun H_ω^ρ çəkili Hölder fəzasının birindən digərinə məhdud təsir göstərməsi üçün (ω,ρ) cütləri üzərinə zəruri şərtlər təyin edən qiymətləndirmələr alınmışdır.

Açar sözlər: çəkili Hölder fəzaları, sinqulyar inteqral operator, kəsilməzlik modulu.

Tutaq ki, $\rho_i(x), (i=1,2)$ azalmayan funksiyadır və $\rho_i(0)=0$; $\rho(x)=$ $=\rho_1(x-a)\rho_2(b-x),\ x\in[a,b];\omega(\delta),\ \delta\in(0,b-a]$ kəsilməzlik moduludur;

$$H_\omega^\rho=\Big\{u\in C(a,b):\lim_{x\to a}(\rho u)(x)=\lim_{x\to b}(\rho u)(x)=0,$$

$$\|u\|=\sup_{\substack{x_1,x_2\in[a,b]\\ x_1\neq x_2}}\big(|(\rho u)(x_1)-(\rho u)(x_2)|/\omega(|x_1-x_2|)\big)<+\infty\Big\}$$

ümumiləşmiş çəkili Hölder fəzasıdır [1,2].

H_ω^ρ fəzaları şkalasında aşağıdakı singulyar inteqral operatora baxaq:

$$(A_\mu u)(x)\overset{df}{=}\lim_{x\to 0+}\left(\int_a^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{b}\right)\frac{u(s)ds}{(s-x)|x-s|^\mu},\quad x\in(a,b);\ \mu\in(0,1)\,. \tag{1}$$

Teorem. Əgər A_μ operatoru H_ω^ρ-dan $H_{\tilde\omega}^{\tilde\rho}$-yə məhdud təsir edirsə

1) $$\tilde\rho_i(x)+\frac{\tilde\rho_i(x)}{\rho_i(x)}\int_0^x\frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}}dt+\frac{\tilde\rho_i(x)}{x^{1+\mu}}\int_0^x\frac{\omega(t)}{\rho_i(t)}dt+$$

$$+\rho_i(x)\int_x^{\frac12}\frac{\omega(t)dt}{\rho_i(t)\cdot t^{1+\mu}}\le c_1\tilde\omega(x),\ \ x\in\left(0,\frac12\right),\ (i=1,2);$$

2) Əgər $\tilde\rho$ həm də aşağıdakı şərti ödəyirsə:

$\exists\bar{x}\in(0,1),\ \exists\delta_0>0,\ \forall y\in(\bar{x}-\delta_0,\bar{x})\subset(0,1)$ (və ya $\forall y\in(\bar{x},\bar{x}+\delta_0)\subset(0,1)$), (*)
onda

$$\int_0^h\frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}}dt+h\int_h^{\frac{1}{2}}\frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}}dt\le c_1\widetilde{\omega}(h),\quad h\left(0,\frac{1}{2}\right].$$

İsbatı. Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $\rho\ge 0,\ \widetilde{\rho}\ge 0$. Aşağıdakı kimi təyin olunan funksiyalar ailəsinə baxaq:

$$u_{x_0}(x)=\begin{cases} f_{x_0}(x)\cdot g_{x_0}(x), & x\ne 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Burada

$$f_{x_0}(x)=\begin{cases}\omega(x), & x\in[0,x_0/2]\\ \omega(|x-x_0|), & x\in\left[x_0/2,\dfrac{1}{2}\right]\\ \omega\left(\left|\dfrac{1+x_0}{2}-x\right|\right), & x\in\left(1/2,\dfrac{1+x_0}{2}\right]\\ 0, & x\in\left(\dfrac{1+x_0}{2},1\right]\end{cases}$$

və $g_{x_0}(x)=(x-x_0)/|x-x_0|,\ x\ne x_0$.

Qeyd edək ki, $\exists c_1,c_2>0$ var ki,

$$c_1\omega(\delta)\le\omega_{u_{x_0}}(\delta)\le c_2\omega(\delta),\quad \delta>0 \tag{2}$$

$$\left\|u_{x_0}\rho^{-1}\right\|_{H_\omega^\rho}\le c_2,\ \forall x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right], \tag{3}$$

burada c_1,c_2 sabitləri x_0 və δ-dan asılı deyil.

A_μ operatoru H_ω^ρ-dan $H_{\widetilde{\omega}}^{\widetilde{\rho}}$-yə məhdud təsir etdiyi üçün

$$\exists B>0\ \ \forall x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\ \ \left\|A\left(u_{x_0}(x)/\rho(x)\right)\right\|_{H_{\widetilde{\omega}}^{\widetilde{\rho}}}\le B.$$

Onda $\forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ üçün alarıq:

$$B\widetilde{\omega}(x)\ge\left|\widetilde{\rho}(x)A(u_x/\rho)(x)\right|\ge c\widetilde{\rho}(x)\left|\int_0^1\frac{u_x(s)ds}{\rho(s)(s-x)(s-x)^\mu}\right|\ge$$

$$\ge c\widetilde{\rho}(x)\left|\int_0^{x/2}\frac{u(s)ds}{\rho(s)|x-s|^{\mu+1}}+\int_{x/2}^{x}\frac{\omega(|x-s|)ds}{\rho(s)|x-s|^{\mu+1}}+\int_x^{1/2}\frac{u(|s-x|)ds}{\rho(s)|s-x|^{\mu+1}}\right|. \tag{4}$$

Şərtə görə $\rho(2x)\sim\rho(x),\ \omega(2\delta)\sim\omega(\delta)$ və $\omega(\delta)/\delta$ azalan olduğundan alarıq:

$$\exists c>0\ \forall s\in\left(\frac{x}{2},x\right)\ \rho(s)\le c\rho(x),\ \forall s\in\left(x,\frac{1}{2}\right)\quad \frac{\omega(s-x)}{s-x}\ge c^{-1}\frac{\omega(s)}{s}.$$

Buna görə də

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{\omega(x-s)ds}{\rho(s)(x-s)^{1+\mu}}\ge\frac{c}{\rho(x)}\int_0^x\frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}}dt;\ \int_x^{1/2}\frac{\omega(x-s)ds}{\rho(s)(x-s)^{1+\mu}}\ge\int_x^{1/2}\frac{\omega(s)ds}{\rho(s)s^{1+\mu}};$$

$$\int_0^{x/2}\frac{\omega(s)ds}{\rho(s)(x-s)^{1+\mu}}\ge c\frac{1}{x^{1+\mu}}\int_0^x\frac{\omega(s)ds}{\rho(s)}.$$

Bu qiymətləri nəzərə alsaq (4)-dən alarıq:

$$CB\omega(x)\ge\frac{1}{x^{1+\mu}}\widetilde{\rho}(s)\int_0^x\frac{\omega(s)}{\rho(s)}ds+\frac{\widetilde{\rho}(x)}{\rho(x)}\cdot\frac{1}{x^{1+\mu}}\int_0^x\frac{\omega(t)dt}{t^{1+\mu}}+\widetilde{\rho}(s)\int_0^{1/2}\frac{\omega(s)ds}{\rho(s)s^{1+\mu}}.$$

Əgər $x<\frac{1}{4}$ olduqda $\int_x^{1/2}\frac{\omega(s)ds}{\rho(s)s^{1+\mu}}\ge\int_{1/4}^{1/2}\frac{\omega(s)ds}{\rho(s)s^{1+\mu}}\ge c>0$; $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ olduqda isə $\widetilde{\rho}(x)\sim\widetilde{\rho}\left(\frac{x}{2}\right)$ və $\widetilde{\rho}(x)\int_x^{1/2}\frac{\omega(s)ds}{\rho(s)s^{1+\mu}}\le c\widetilde{\omega}(x)$ münasibətlərindən alınır ki, $\widetilde{\rho}(x)\le c\widetilde{\omega}(x)$, $\forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$. Bunları yuxarıda nəzərə alsaq teoremin 1) bəndi isbat olunar.

İndi isə teoremin 2) bəndini isbat edək.

Tutaq ki, (*) ödənir. $\overline{x}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ və $0<\delta_0<\frac{1}{4}$. Burada $\overline{x}$ və δ_0-ı qeyd edək və aşağıdakı funksiyaya baxaq:

$$u(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,\overline{x}]\cup\left[\frac{1}{4}+\overline{x},1\right]\\ \omega(x-\overline{x}), & x\in\left[\overline{x},\overline{x}+\frac{1}{8}\right]\\ \omega\left(\overline{x}-x+\frac{1}{4}\right), & x\in\left[\overline{x}+\frac{1}{8},\overline{x}+\frac{1}{4}\right]\end{cases}.$$

Aşkardır ki, $\omega_u(\delta)\le3\omega(\delta)$, $\forall\delta\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$. Buna görə də $u(x)\rho^{-1}(x)\in H_{\omega}^{\rho}$. Onda şərtə görə $A_\mu(u/\rho)\in H_{\widetilde{\omega}}^{\widetilde{\rho}}$. Deməli,

$$\exists B>0\ \forall y\in(0,1)\ B\widetilde{\omega}(|y-x|)\ge|(\widetilde{\rho}(y)-\widetilde{\rho}(\overline{x}))|\cdot A_\mu(u\rho^{-1})(y)+$$
$$+\widetilde{\rho}(x)\left(A_\mu(u\rho^{-1})(y)-A_\mu(u\rho^{-1})(\overline{x})\right).$$

Əgər

$$J_1 = \widetilde{\rho}(x)\big(A_\mu(u\rho^{-1})(y) - A_\mu(u\rho^{-1})(\overline{x})\big);$$
$$J_2 = \left|\widetilde{\rho}(y) - \widetilde{\rho}(\overline{x})\right| \cdot A_\mu(u\rho^{-1})(y)$$
işarə etsək alarıq:
$$J_1 \le B\widetilde{\omega}(|y-x|) + J_2 . \tag{5}$$
İndi J_1 - aşağıdan qiymətləndirək. Qeyd edək ki, $y < \overline{x}$ olduqda
$$A \overset{df}{=} A_\mu(u\rho^{-1})(\overline{x}) - A_\mu(u\rho^{-1})(y) \ge \int_{\overline{x}}^{\overline{x}+\frac{1}{8}} \frac{\omega(s-\overline{x})ds}{\rho(s)[(s-\overline{x})^{1+\mu} - (s-y)^{1+\mu}]} .$$
Qeyd edək ki, $\exists\, c_1, c_2 > 0$
$$\left|(s-\overline{x})^{1+\mu} - (s-y)^{1+\mu}\right| \ge c_1 \frac{(\overline{x}-y)}{(s-y)(s-\overline{x})^{1+\mu}}, \quad y < \overline{x} \le s ,$$
$$\rho(s) \ge c_2, \quad s \in \left[\overline{x}, x + \frac{1}{4}\right].$$
Bunları nəzərə alıb $s - \overline{x} = t$ əvəzləməsi aparsaq, alarıq:
$$|A| \ge \frac{c_1}{c_2}\left(\int_0^{\overline{x}-y} \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}}dt + (\overline{x}-y)\int_{\overline{x}-y}^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(t)}{t^{2+\mu}}dt\right).$$
Axırıncı J_1-in ifadəsində nəzərə alsaq, alarıq:
$$J_1 \ge \widetilde{\rho}_1(y)\frac{c_1}{2c_2}\left[\int_0^{\overline{x}-y} \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}}dt + (\overline{x}-y)\int_{\overline{x}-y}^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(t)}{t^{2+\mu}}dt\right]. \tag{6}$$
Analoji qaydada göstərmək olar ki,
$$J_2 \le const\ \widetilde{\omega}(\overline{x}-y) . \tag{7}$$
(6) və (7)-ni (5)-də nəzərə alsaq, $\forall y \in (\overline{x}-\delta_0, \overline{x})$ üçün
$$\widetilde{\rho}_1(y)\left(\int_0^{\overline{x}-y} \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}}dt + (\overline{x}-y)\int_{\overline{x}-y}^{\frac{1}{8}} \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}}dt\right) \le const\ \widetilde{\omega}(\overline{x}-y) .$$
$\widetilde{\rho}_1(y) \ge \widetilde{\rho}(\overline{x}-\delta_0)$ olduğunu nəzərə alıb $\overline{x} - y = h$ işarə etsək, $o < h < \delta_0$ üçün 2)-ni isbat etmiş olarıq. $\delta_0 \le h \le \frac{1}{2}$ halında 2)-nin doğruluğu aşkardır.

ƏDƏBİYYAT

1. Абдуллаев С.К., Бабаев А.А. Некоторые оценки для особого интеграла с суммируемой плотностью // ДАН СССР, т.188, №2, 1969, с.263-265.
2. Абдуллаев С.К., Бабаев А.А. Об особом интеграле с суммируемой плотностью // Функциональный анализ и его применение, Баку, 1978, с.3-32.
3. Акперов А.А. Обратные оценки для сингулярных интегралов / Azərbaycan Respublikasının prezidenti Heydər Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunan "Riyaziyyatın müasir problemləri" mövzusunda elmi konfransın materialları, Bakı, 2003, s.19-20.

ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

А.А.АКПЕРОВ

РЕЗЮМЕ

В работе получены оценки сингулярного интегрального оператора Коши, которые позволяют найти необходимые условия на пару (ω, ρ), при которых указанный оператор ограниченно действует из одного весового пространства H_{ω}^{ρ} в другое.

Ключевые слова: весовые пространства Гельдера, сингулярный интегральный оператор, модуль непрерывности.

ESTİMATES FOR THE SİNGULAR İNTEQRAL CAUCHY OPERATOR İN WEİGHTED HOLDER SPACES

A.A.AKBAROV

SUMMARY

In the paper for the bounded action of the one-dimensional singular integral Cauchy operator from one H_{ω}^{ρ} weighted Holder space to another, that determine the necessary conditions for a pair of (ω, ρ) were obtained.

Key words: weighted Holder space, singular integral operator, continuons module.

Redaksiyaya daxil oldu: 11.02.2019-cu il
Çapa imzalandı: 16.10.2019-cu il