MEXANİKA

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОСНОВАНИЯ

Г.М.ГАСЫМОВ
Бакинский Государственный Университет
husameddinqasimov@gmail.com

В работе решается задача устойчивости непрерывно неоднородной прямоугольной пластинки сжатой в одном направлении, с учетом внешнего упругого сопротивления. Предполагается, что модули упругости, сдвига и удельная плотность являются экспоненциальными функциями координаты длины пластинки. Задача решается приближенным способам.

Ключевые слова: пластинка, деформация, устойчивость, ортотроп.

Известно, что в строительстве инженерных комплексов, в частности, при строительстве магистральных железных дорог широко применяются элементы конструкций типа пластин-полос, изготовленных из неоднородного материала.

В силу того, что эти элементы конструкций предназначены для работ в динамических условиях, а также в условиях неоднородного по физико-механическим свойствам грунтов, проектирование таких элементов конструкций базируется, как правило, на расчетных формулах динамической устойчивости неоднородных (ортотропных) тел [1,2].

Исследуемая задача решается при следующих предположениях:

– модули упругости $\left(E_1, E_2\right)$ и модуль сдвига $\left(G\right)$ являются экспоненциальными функциями координаты длины x. Причем координатная система выбирается следующим образом: оси X и У находятся на срединной плоскости, а ось Z направлена перпендикулярно к ним;

– механические характеристики неоднородного материала принимается в виде[3]:

$$E_1 = E_1^0 e^{-f(x)}, E_2 = E_2^0 e^{-f(x)}, G = G_0\ e^{-f(x)}, \tag{1}$$

здесь E_1^0, E_2^0, G_0 – соответствуют к однородному случаю, а $f(x)$ со свои-

ми производными являются непрерывными функциями;
– предполагается, что пластинка лежит на анизотропном основании[3]:

$$F = k_1 w - k_2 \frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_3 \frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \qquad (2)$$

Здесь F – реакция оснований; k_1, k_2, k_3 –характеристики сопротивления по главными направлениями и зависят от свойств основания (эти характеристики определяются экспериментально); w–прогиб.

При этих предположениях связь между напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$ и деформациями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ имеет следующий вид [1]:

$$\sigma_1 = \frac{E_1^0 e^{-f(x)}}{1-\nu_1\nu_2}\left(\varepsilon_1 + \nu_2\varepsilon_2\right),$$

$$\sigma_2 = \frac{E_2^0 e^{-f(x)}}{1-\nu_1\nu_2}\left(\varepsilon_2 + \nu_1\varepsilon_1\right),$$

$$\sigma_{12} = G_0 e^{-f(x)}\varepsilon_{12},$$

где ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона и принимаются постоянными.

Напряжения изгиба в произвольном слое пластинки, а также выражения моментов запишем в виде [2]:

$$\sigma_{1,n} = -\frac{E_1^0 e^{-f(x)}}{1-\nu_1\nu_2} z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$\sigma_{2,n} = -\frac{E_2^0 e^{-f(x)}}{1-\nu_1\nu_2} z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \qquad (3)$$

$$\sigma_{12,n} = -2G_0 e^{-f(x)} z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{1,n} z dz, \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{2,n} z dz, \quad M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12,n} z dz. \qquad (4)$$

С учетом (3) из (4), получим:

$$M_1 = -D_1^0 e^{-f(x)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_2 = -D_2^0 e^{-f(x)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \qquad (5)$$

$$M_{12} = -2D_k^0\, e^{-f(x)}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

Здесь D_1^0 и D_2^0 – изгибные жесткости по главными направлениями для однородного ортотропного материала, D_k^0 –крутильная жесткость.

$$D_1^0 = \frac{E_1^0 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_2^0 = \frac{E_2^0 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_k^0 = \frac{G_0 h^3}{12}.$$

Уравнение устойчивости запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + k_1 w - k_2 \frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_3 \frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + Te^{-f(x)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{6}$$

здесь T – внешняя сжимающая нагрузка.

Подставляя (5) в (6), получим:

$$D_1^0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(D_1^0\nu_2 + D_2^0\nu_1 + 4D_k^0\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2^0 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - D_1^0\left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right.$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) +$$

$$\left. + 2\frac{df(x)}{dx}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right] - 2\left(D_1^0\nu_2 + 2D_k^0\right)\frac{df}{dx}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - e^{f(x)}\left(k_1 w - k_2 \frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_3 \frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{7}$$

В силу математической сложности уравнение (7), построим приближенно аналитическое решение поставленной задачи.

Применим к уравнению (7) метод Бубнова-Галеркина, причем функцию $w(x,y)$ будем искать в следующем виде:

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} A_{ij} F_i(x)\Phi_j(y). \tag{8}$$

Здесь предполагается, что каждая из функций $F_i(x), \Phi_j(y)$ удовлетворяют краевым условиям поставленной задачи.

Подставляя (8) в (7), введем следующие обозначения:

$$P_1 = D_1^0 \Phi_j \frac{d^4 F_i}{dx^4} + \left(D_1^0\nu_2 + D_2^0\nu_1 + 4D_k^0\right)\frac{d^2 F_i}{dx^2}\frac{d^2 \Phi_j}{dy^2} + D_2^0 F_i \frac{d^4 \Phi_j}{dy^4};$$

$$P_2 = D_1^0\left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\left(\Phi_j \frac{d^2 F_i}{dx^2} + \nu_2 F_i \frac{d^2 \Phi_j}{dy^2}\right) + 2\frac{df(x)}{dx}\Phi_j \frac{d^3 F_i}{dx^3}\right] +$$

$$+ 2\left(D_1^0\nu_2 + 2D_k^0\right)\frac{df}{dx}\frac{dF_i}{dx}\frac{d^2 \Phi_j}{dy^2}; \tag{9}$$

$$P_3 = e^{f(x)}\left(k_1 F_i \Phi_j - k_2 \frac{h^2}{4}\Phi_j \frac{d^2 F_i}{dx^2} - k_3 \frac{h^2}{4} F_i \frac{d^2 \Phi_j}{dy^2}\right).$$

Известно, что при решении общей задачи, критическая нагрузка должна определяться из системы линейных однородных алгебраических уравнений. Причем для существования нетривиального решения задачи главный определитель этой системы составленных из коэффициентов A_{ij} должен равняться нулю. Однако при создании инженерных расчетов, как правило, ограничиваются первым приближением. Поэтому для первого приближения, получаем:

$$\int_0^a\int_0^b\left[P_1(F_1,\Phi_1)-P_2(F_1,\Phi_1)-P_3(F_1,\Phi_1)-T\Phi_1\frac{d^2F_1}{dx^2}\right]F_1\Phi_1dxdy=0\,,$$

откуда получаем выражение для определения значения сжимающей нагрузки в виде:

$$T=\frac{\int_0^a\int_0^b[P_1(F_1,\Phi_1)-P_2(F_1,\Phi_1)-P_3(F_1,\Phi_1)]F_1\Phi_1dxdy}{\int_0^a\int_0^b F_1\frac{d^2F_1}{dx^2}\Phi_1^2dxdy}\,. \qquad (10)$$

В случае не учета влияния сопротивления основания формула (10) примет следующий упрощенный вид:

$$T_0=\frac{\int_0^a\int_0^b[P_1(F_1,\Phi_1)-P_2(F_1,\Phi_1)]F_1\Phi_1dxdy}{\int_0^a\int_0^b F_1\frac{d^2F_1}{dx^2}\Phi_1^2dxdy} \qquad (11)$$

Решая совместно (10) и (11) выразим значение нагрузки T, возникающий в полосе с учетом влияния ортотропного основания от нагрузки T_0, возникающий в полосе без влияния сопротивления основания в виде:

$$\overline{T}=\frac{T}{T_0}=\frac{\int_0^a\int_0^b[P_1(F_1,\Phi_1)-P_2(F_1,\Phi_1)-P_3(F_1,\Phi_1)]F_1\Phi_1dxdy}{\int_0^a\int_0^b[P_1(F_1,\Phi_1)-P_2(F_1,\Phi_1)]F_1\Phi_1dxdy}\,,$$

или же

$$\overline{T}=1-\frac{\int_0^a\int_0^b P_3(F_1,\Phi_1)F_1\Phi_1dxdy}{\int_0^a\int_0^b[P_1(F_1,\Phi_1)-P_2(F_1,\Phi_1)]F_1\Phi_1dxdy}\,. \qquad (12)$$

Введем обозначение: $$C = \frac{\int_0^a\int_0^b P_3(F_1,\Phi_1)F_1\Phi_1 dxdy}{\int_0^a\int_0^b [P_1(F_1,\Phi_1) - P_2(F_1,\Phi_1)]F_1\Phi_1 dxdy} \tag{13}$$

Принимая для F_1 и Φ_1 выражения вида:
$$F_1 = \sin\frac{m\pi}{a}x, \quad \Phi_1 = \sin\frac{n\pi}{b}y \tag{14}$$
и подставляя в (9), при $f(x) = 1 + \varepsilon\frac{x}{a}$, получим:
$$\begin{aligned} P_1 &= \pi^4\left[D_1^0 m^4 + \left(D_1^0\nu_2 + D_2^0\nu_1 + 4D_k^0\right)m^2n^2 + D_2^0 n^4\right]\sin m\pi\bar{x}\sin n\pi\bar{y}; \\ P_2 &= -2\varepsilon\pi^3\left[\left(D_1^0\nu_2 + 2D_k^0\right)mn^2 + D_1^0 m^3\right]\cos m\pi\bar{x}\sin n\pi\bar{y}; \\ P_3 &= \left[k_1 + \frac{\pi^2h^2}{4}\left(k_2m^2 + k_3n^2\right)\right]e^{1+\varepsilon\bar{x}}\sin m\pi\bar{x}\sin n\pi\bar{y}; \end{aligned} \tag{15}$$
где $\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}$.

Формула (13) с учетом (15) позволяет определить зависимость постоянное C от всех входящих констант, в виде:

$$C = \frac{4k_1 + h^2\pi^2\left(k_2m^2 + k_3n^2\right)}{\pi^4\left[D_1^0 m^4 + \left(D_1^0\nu_2 + D_2^0\nu_1 + 4D_k^0\right)m^2n^2 + D_2^0 n^4\right]}\cdot\frac{e\left(e^{\varepsilon} - 1\right)}{2\varepsilon}. \tag{16}$$

Учитывая (16) в (12) получаем:
$$\bar{T} = 1 - B\cdot\frac{e\left(e^{\varepsilon} - 1\right)}{2\varepsilon}, \tag{17}$$
где
$$B = \frac{4k_1 + h^2\pi^2\left(k_2m^2 + k_3n^2\right)}{\pi^4\left[D_1^0 m^4 + \left(D_1^0\nu_2 + D_2^0\nu_1 + 4D_k^0\right)m^2n^2 + D_2^0 n^4\right]} \tag{18}$$

На рис.1 представлены графическая зависимость нагрузки $\bar{T} = \frac{T}{T_0}$ от степени неоднородности материала полосы ε.

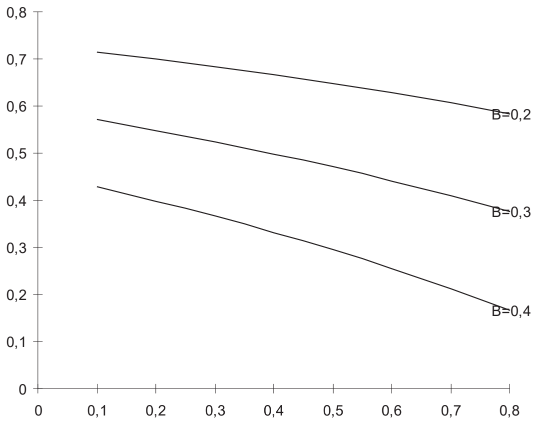

Рис.1. Зависимость нагрузки от степени неоднородности материала полосы, при различных значениях приведенного коэффициента B.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М., 1957, 463с.
2. Юдинец В.Е. Расчет собственных частот поперечных непрерывно неоднородных ортотропных пластин. VI ВК по композитных материалов. Ереван,1987, с.31-32.
3. Жемочкин Б.Н., Синицын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. М.,1962, 239с.

ƏSASIN MÜQAVİMƏTİNİ NƏZƏRƏ ALMAQLA ORTOTROP LÖVHƏNİN DAYANIQLIĞI

H.M.QASIMOV

XÜLASƏ

Məqalədə elastik əsasın müqaviməti nəzərə alınmaqla, bir istiqamətdə sıxılan kəsilməz qeyri-bircins düzbucaqlı lövhənin dayanıqlığı haqqında məsələ həll olunur. Fərz olunur ki, elastiklik modulları və sürüşmə modulu lövhənin uzunluq koordinatının eksponensial funksiyalarıdır. Məsələ təqribi üsulla həll olunur.

Açar sözlər: lövhə, deformasiya, dayanıqlıq, ortotrop.

STABILITY OF ORTHOTROPIC PLATE ALLOWING FOR FOUNDATION RESISTANCE INFLUENCE

H.M.GASIMOV

SUMMARY

In the paper studies a problem on stability of continuously inhomogeneous rectangular plate compressed in one direction, allowing for foundation resistance influence. It is assumed that the elasticity and shear modules are exponential functions of length coordinate of a plate. The problem is solved by approximate method.

Key words: plate, deformation, stability, orthotropic.

Поступила в редакцию: 06.03.2019 г.
Подписано к печати: 16.10.2019 г.