BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

УДК 517.177.52

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕТИПОВЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Ж.Б.АХМЕДОВА*, И.Ф.НАГИЕВА**

Бакинский Государственный Университет

****Институт Систем Управления НАН Азербайджана***

akja@rambler.ru, ilaha_21@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений с нетиповым критерием качества при предположении выпуклости области управления. Доказаны необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Ключевые слова: задача оптимального управления, специальное приращение функционала качества, квазиособое управление, линеаризованный принцип максимума.

Некоторые задачи оптимального управления описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями с нетиповым критерием качества. Подобного типа задачи оптимального управления впервые поставлено и изучено Н.Н.Моисеевым в [1]. Он в рассматриваемых задачах установил аналог принципа максимума Понтрягина [2].

В предлагаемой работе рассматривается аналогичная задача оптимального управления при предположении выпуклости области управления. Установлен аналог линеаризованного (дифференциального) [2] принципа максимума и исследован случай его вырождения (квазиособый случай [3]).

Целью представленной работы является доказательство необходимых условий оптимальности.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u)=\varphi(x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} G(t,s,x(t),x(s),u(t),u(s))\,ds\,dt\,, \qquad (1)$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in T=[t_0,t_1], \qquad (2)$$

$$\dot{x}=f(t,x,u),\quad t\in T,\quad x(t_0)=x_0\,. \qquad (3)$$

Здесь $G(t,\ s,\ a,\ b,\ u,\ v)-$ заданная скалярная функция непрерывная в $T\times T\times R^n\times R^n\times R^r\times R^r$ вместе с частными производными по (a,b,u,v)

до второго порядка включительно, $f(t, x, u)-$ заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная $T \times R^n \times R^r$ вместе с частными производными по (x,u) до второго порядка включительно, t_0, t_1 заданы, x_0 заданный постоянный вектор, $\varphi(x)-$заданная дважды непрерывно дифференцируемая в R^n скалярная функция, $u(t)-$ r-мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий, $U-$заданное непустое ограниченное и выпуклое множество (допустимое управление).

Допустимое управление, $u(t)$, доставляющее минимальное значение функционалу (1) при ограничениях (2), (3), назовем оптимальным управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$ соответствует единственное кусочно-гладкое решение $x(t)$ задачи (3).

Специальное приращение функционала качества. Пусть $(u(t), x(t))$ фиксированный, а $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$ – произвольный допустимые процессы.

Введя обозначение $H(t,x,u,\psi) = \psi' f(t,x,u)$, приращение функционала качества (1) можно записать в виде

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = [\varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1))] + \psi'(t_1)\Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t)\Delta x(t)dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t))]dt + \tag{4}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} [G(t,s,\bar{x}(t),\bar{x}(s),\bar{u}(t),\bar{u}(s)) - G(t,s,x(t),x(s),u(t),u(s))]ds\,dt\,.$$

Здесь $\psi = \psi(t)$ пока неизвестная n-мерная вектор-функция (вектор-функция сопряженных переменных).

Используя формулу Тейлора приращение (4) критерия качества (1) можно представить в виде

$$\Delta S(u) = \varphi_x'(x(t_1))\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) + \psi'(t_1)\Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1}\dot{\psi}'(t)\Delta x(t)dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} H_u'[t]\Delta u(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} H_x'[t]\Delta x(t)dt - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) + 2\Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t) +$$

$$+ \Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)]dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[G_a[t,s] + G_b[s,t]]\Delta x(t)ds\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[\mathrm{G_u}[t,s]\Delta u(t) + \tag{5}$$

$$+ G_v[t,s]\Delta u(s)]ds\,dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[\Delta x'(t)G_{aa}[t,s]\Delta x(t) + \Delta x'(t)G_{ab}[t,s]\Delta x(s) +$$

$$+\Delta x'(s)G_{ba}[t,s]\Delta x(t)+\Delta x'(s)G_{bb}[t,s]\Delta x(s)]ds\,dt+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[\Delta u'(t)G_{uu}[t,s]\Delta u(t)+$$

$$+\Delta u'(s)G_{vv}[t,s]\Delta u(s)+2\Delta u'(t)G_{ua}[t,s]\Delta x(t)+2\Delta u'(t)G_{ub}[t,s]\Delta x(s)+$$

$$+2\Delta u'(s)G_{va}[t,s]\Delta x(t)+2\Delta u'(s)G_{vb}[t,s]\Delta x(s)+2\Delta u'(t)G_{uv}[t,s]\Delta u(s)]ds\,dt+\eta_1(\Delta u),$$ где по определению

$$f_x[t]\equiv f_a(t,\ x(t),\ u(t)),$$

$$H_x[t]\equiv H_x(t,\ x(t),u(t),\psi(t)),$$

$$H_u[t]\equiv H_u(t,\ u(t),\psi(t),x(t)),$$

$$G_a[t,s]\equiv G_a(t,\ s,\ x(t),\ x(s),\ u(t),\ u(s)),$$

$$G_b[t,s]\equiv G_b(t,\ s,\ x(t),\ x(s),\ u(t),\ u(s)),$$

$$G_{aa}[t,s]\equiv G_{aa}(t,\ s,\ x(t),\ x(s),\ u(t),\ u(s)),$$

$$G_{bb}[t,s]\equiv G_{bb}(t,\ s,\ x(t),\ x(s),\ u(t),\ u(s)),$$

$$G_{ab}[t,s]\equiv G_{ab}(t,\ s,\ x(t),\ x(s),\ u(t),\ u(s)),$$

$$G_{ba}[t,s]\equiv G_{ba}(t,\ s,\ x(t),\ x(s),\ u(t),\ u(s)).$$

$$\eta_1(\Delta u)=0_1\left(\|\Delta x(t_1)\|^2\right)-\int_{t_0}^{t_1}0_2\left(\|\Delta z(t)\|^2\right)dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}0_3\left(\|\Delta c(t,s)\|^2\right)ds\,dt,$$

$$\Delta z(t)=(\Delta x(t),\ \Delta u(t))',\qquad \Delta c(t,s)=(\Delta x(t),\ \Delta x(s),\ \Delta u(t),\ \Delta u(s))'.$$

Здесь величины $o_i(\cdot)$, $i=\overline{1,\ 3}$ определяются из разложений

$$\varphi(\bar{x})-\varphi(x)=\varphi_x'(x)\Delta x+\frac{1}{2}\Delta x'\varphi_{xx}(x)\Delta x+0_1\left(\|\Delta x\|^2\right),$$

$$H(t,\bar{x},\bar{u},\psi)-H(t,x,u,\psi)=H_x'(t,x,u,\psi)\Delta x+H_u'(t,x,u,\psi)\Delta u+$$

$$+\frac{1}{2}(\Delta x' H_{xx}(t,x,u,\psi)\Delta x+2\Delta u' H_{ux}(t,x,u,\psi)\Delta x+\Delta u' H_{uu}(t,x,u,\psi)\Delta u)+o_2\left(\|\Delta z\|^2\right),$$

$$G(t,s,\bar{a},\bar{b},\bar{u},\bar{v})-G(t,s,a,b,u,v)=G_a(t,s,a,b,u,v)\Delta a+G_b(t,s,a,b,u,v)\Delta b+$$

$$+\frac{1}{2}[\Delta a'G_{aa}(t,s,a,b,u,v)\Delta a+\Delta a'G_{ab}(t,s,a,b,u,v)\Delta b+\Delta b'G_{ba}(t,s,a,b,u,v)\Delta a+$$

$$+\Delta b'G_{bb}(t,s,a,b,u,v)\Delta b+\Delta u'G_{uu}(t,s,a,b,u,v)\Delta u+\Delta v'G_{vv}(t,s,a,b,u,v)\Delta v+$$

$$+2\Delta u'G_{ua}(t,s,a,b,u,v)\Delta a+2\Delta u'G_{ab}(t,s,a,b,u,v)\Delta b+2\Delta v'G_{va}(t,s,a,b,u,v)\Delta a+$$

$$+2\Delta v'G_{vb}(t,s,a,b,u,v)\Delta b+2\Delta u'G_{uv}(t,s,a,b,u,v)\Delta v]+o_3\left(\|\Delta c\|^2\right).$$

Если предположить, что вектор-функция сопряженных переменных $\psi=\psi(t)$ является решением задачи

$$\dot{\psi}=-H_x(\mathrm{t},\mathrm{x}(\mathrm{t}),u(t),\psi)+\int_{t_0}^{t_1}[G_a[t,s]+G_b[s,t]]ds,\qquad \psi(t_1)=-\varphi_x(x(t_1)),\qquad (6)$$

то формула приращения (5) критерия качества (1) примет вид:

$$\Delta S(u)=\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}H_u'[t]\Delta u(t)dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[G_u[t,s]+G_v[s,t]]\Delta u(t)ds\,dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t)+2\,\Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t)]dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[\Delta x'(t)G_{aa}[t,s]\Delta x(t)+\Delta x'(t)G_{ab}[t,s]\Delta x(s)+\Delta x'(s)G_{ba}[t,s]\Delta x(t)+$$

$$+\Delta x'(s)G_{bb}[t,s]\Delta x(s)]ds\,dt+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[\Delta u'(t)G_{uu}[t,s]\Delta u(t)+\Delta u'(s)G_{vv}[t,s]\Delta v(s)+$$

$$+2\,\Delta u'(t)G_{ua}[t,s]\Delta x(t)+2\,\Delta u'(t)G_{ub}[t,s]\Delta x(s)+2\,\Delta u'(s)G_{va}[t,s]\Delta x(t)+ \qquad (7)$$
$$+2\,\Delta u'(s)G_{vb}[t,s]\Delta x(s)+2\,\Delta u'(t)G_{uv}[t,s]\Delta u(s)]+\eta_2(\Delta u).$$

Займемся преобразованием формулы приращения (7).

Ясно, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(s)G_{vv}[t,s]\Delta u(s)ds\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(t)G_{vv}[s,t]\Delta u(t)ds\,dt\,,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(s)G_{va}[t,s]\Delta x(t)ds\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(t)G_{va}[s,t]\Delta x(s)ds\,dt\,,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(s)G_{vb}[t,s]\Delta x(s)ds\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(t)G_{vb}[s,t]\Delta x(t)ds\,dt\,.$$

Учитывая, эти тождества формула (7), для приращения функционала (1), записывается в виде:

$$\Delta S(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\left[H_u[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_u[t,s]+G_v[s,t]]ds\right]'\Delta u(t)dt+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta x'(t)\left[H_{xx}[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{aa}[t,s]+G_{bb}[s,t]]ds\right]\Delta x(t)dt+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[\Delta x'(t)G_{ab}[t,s]\Delta x(s)+$$

$$+\Delta x'(s)G_{ba}[t,s]\Delta x(t)]ds\,dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(t)\left[H_{uu}[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{uu}[t,s]+G_{vv}[s,t]]ds\right]\Delta u(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(t)\left[H_{ux}[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{ua}[t,s]+G_{vb}[s,t]]ds\right]\Delta x(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(t)[G_{ub}[s,t]+G_{va}(s,t)]\times$$

$$\times\Delta x(s)ds\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta u'(t)G_{uv}[t,s]\Delta u(s)ds\,dt+\eta_1(\Delta u). \qquad (8)$$

Специальное приращения допустимого управления $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u(t;\,\mu)=\mu[w(t)-u(t)], \quad t\in T \tag{9}$$

Здесь $\mu\in[0,1]$ произвольное число, а $w(t)\in U$, $t\in T-$ произвольное допустимое управление.

Через $\Delta x_\mu(t)$ обозначим специальное приращение траектории $x(t)$. По аналогии с работой [2, 4], доказывается справедливость оценки

$$\|\Delta x(t)\|\le L\int_{t_0}^{t_1}\|\Delta u(t)\|dt,\; t\in T, \tag{10}$$

где L некоторое положительное постоянное.

Далее при помощи формулы Тейлора доказывается, что $\Delta x(t)$ является решением линеаризованной системы

$$\begin{gathered}\Delta\dot{x}=f_x(t,x(t),u(t))\Delta x(t)+f_u(t,x(t),u(t))\Delta u(t)+\\+o(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta u(t)\|),\end{gathered} \tag{11}$$

$$\Delta x(t_0)=0. \tag{12}$$

С учетом оценки (10) при помощи линеаризованной задачи (11)-(12) доказывается, что специальное приращение $\Delta x(t;\,\mu)$ траектории $x(t)$ отвечающее приращению (9) управления $u(t)$ допускает разложение

$$\Delta x(t;\,\mu)=\mu\,\ell(t)+0(\mu;\,t). \tag{13}$$

где $\ell(t)-$ n-мерная вектор-функция являющаяся решением задачи Коши

$$\dot{\ell}(t)=f_x[t]\ell(t)+f_u[t](w(t)-u(t)), \quad \ell(t_0)=0. \tag{14}$$

Учитывая (9), (13) в (8) приходим к разложению

$$\begin{gathered}\Delta \mathrm{S}(u)=S(u(t)+\Delta u(t;\,\mu))-S(u(t))=\\
=-\mu\left[\int_{t_0}^{t_1}\left[H_u[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_u[t,s]+G_v[s,t]]ds\right](w(t)-u(t))dt\right]+\frac{\mu^2}{2}\{\ell'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\ell(t_1)-\\
-\int_{t_0}^{t_1}\ell'(t)\left[H_{xx}[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{aa}[t,s]+G_{bb}[s,t]]ds\right]\ell(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[\ell'(t)G_{ab}[t,s]\ell(s)+\\
+\ell'(s)G_{ba}[t,s]\ell(t)]ds\,dt-\int_{t_0}^{t_1}(w(t)-u(t))'\left[H_{uu}[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{uu}[t,s]+G_{vv}[s,t]]ds\right]\times\\
\times(w(t)-u(t))dt-2\int_{t_0}^{t_1}(w(t)-u(t))'\left[H_{ux}[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{ua}[t,s]+G_{vb}[s,t]]ds\right]\ell(t)dt+\\
+2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(w(t)-u(t))'[G_{ub}[s,t]+G_{va}[s,t]]\ell(s)ds\,dt+\\
+2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(w(t)-u(t))'G_{uv}[t,s](w(s)-u(s))ds\,dt\Big\}+0(\mu^2)\,.\end{gathered} \tag{15}$$

Из разложения (15), в силу произвольности $\mu \in [0,1)$, следует необходимое условие оптимальности первого порядка в виде линеаризованного условия максимума.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1)-(3) необходимо, чтобы неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[H_u[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_u[t,s]+G_v[s,t]]ds\right]'(w(t)-u(t))dt \le 0\,, \tag{16}$$

выполнялось для всех $w(t)\in U$, $t\in T$.

Неравенство (16) является аналогом линеаризованного (дифференциального) условия максимума для задачи (1)-(3).

Как видно специфика критерия качества (1) отражается в условии (16).

Неравенство (16) является интегральным необходимым условием оптимальности. Из него следуя, например, [5, 6] получается эквивалентное поточечное линеаризованное необходимое условие оптимальности в виде:

$$\left[\mathrm{H_u}[\theta]-\int_{t_0}^{t_1}[G_u[\theta,s]+G_v[s,\theta]]ds\right](v-u(\theta))\le 0\,, \tag{17}$$

выполняется для всех $\theta\in[t_0,t_1)$ и $v\in U$.

Разложение (15) позволяет исследовать случаи вырождения линеаризованного условия максимума (17) в задаче (1)-(3).

Определение 1. Если для всех $v\in U$ и $\theta\in[t_0,t_1)$

$$\left[\mathrm{H_u}[\theta]-\int_{t_0}^{t_1}[G_u[\theta,s]+G_v[s,\theta]]ds\right](v-u(\theta))=0\,, \tag{18}$$

то допустимое управление $u(t)$ назовем квазиособым управлением.

При выполнении (18), из разложения (15) следует

Теорема 2. (Неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений). Если $u(t)$ квазиособое управление в задаче (1)-(3), то для его оптимальности необходимо, чтобы

$$\ell'(t)\varphi_{xx}(x(t_1))\ell(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\ell'(t)\left[H_{xx}[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{aa}[t,s]+G_{ba}[s,t]]ds\right]\ell(t)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[\ell'(t)G_{ab}[t,s]\ell(s)+\ell'(s)G_{ba}[t,s]\ell(t)]ds\,dt-\int_{t_0}^{t_1}(w(t)-u(t))'\times$$

$$\times\left[H_{uu}[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{uu}[t,s]+G_{vv}[s,t]]ds\right](w(t)-u(t))dt-2\int_{t_0}^{t_1}(w(t)-u(t))'\times$$

$$\times\left[H_{ux}[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{ua}[t,s]+G_{vb}[s,t]]ds\right]\ell(t)dt+2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(w(t)-u(t))'\times \tag{19}$$

$$\times[G_{ub}[t,s]+G_{va}[s,t]]\ell(s)ds\,dt+2\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(w(t)-u(t))'G_{uv}[t,s](w(s)-u(s))ds\,dt\geq 0$$

выполнялось для всех $u(t)\in U$, $t\in T$.

Неравенство (19) является неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений.

Используя это неравенство, удается получить интегральное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Решение $\ell(t)$ задачи Коши (14) допускает (см. например [1-6]) представление

$$\ell(t)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t,\tau)f_u[\tau](w(\tau)-u(\tau))d\tau. \tag{20}$$

Здесь $\Phi(t,\tau)$ является решением задачи

$$\Phi_\tau(t,\tau)=-\Phi(t,\tau)f_x(\tau,x(\tau),u(\tau)), \tag{21}$$

$$\Phi(t,t)=E, \tag{22}$$

($E-(n\times n)$ единичная матрица).

При помощи представления (20) доказывается справедливость тождеств:

$$\ell'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\ell(t_1)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(w(\alpha)-u(\alpha))'f_u'[\alpha]\Phi'(t_1,\alpha)\varphi_{xx}(x(t_1))\Phi(t_1,\beta)f_u[\beta](w(\beta)-u(\beta))d\alpha\,d\beta, \tag{23}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\ell'(t)\left[H_{xx}[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{aa}[t,s]+G_{bb}[s,t]]ds\right]\ell(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(w(\alpha)-u(\alpha))'f_u'[\alpha]\times$$

$$\times\left[\int_{\max(\alpha,\beta)}^{t_1}\Phi'(t,\alpha)\left[H_{xx}[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{aa}[t,s]+G_{bb}[s,t]]ds\right]\Phi(t,\beta)dt\right]\times$$

$$\times f_u'[\beta](w(\beta)-u(\beta))d\alpha\,d\beta,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[\ell'(t)G_{ab}[t,s]\ell(s)+\ell'(s)G_{ba}[t,s]\ell(t)]ds\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(w(\alpha)-u(\alpha))'\times \tag{24}$$

$$\times\int_{\alpha}^{t_1}\left[\int_{\beta}^{t_1}\Phi'(t,\alpha)G_{ab}[t,s]\Phi(s,\beta)dt+\int_{\beta}^{t_1}\Phi'(s,\alpha)G_{ba}[t,s]\Phi(t,\beta)dt\right]ds\times$$
$$\times f_u[\beta](w(\beta)-u(\beta))d\alpha\,d\beta,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}(w(t)-u(t))'\left[H_{ux}(t)-\int_{t_0}^{t_1}[G_{ua}[t,s]+G_{vb}[s,t]]ds\right]\ell(t)dt= \tag{25}$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}(w(\alpha)-u(\alpha))'\left[H_{ux}[\alpha]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{ua}[\alpha,s]+G_{vb}[s,\alpha]]ds\right]\Phi(\alpha,t)d\alpha\right]\times$$
$$\times f_u[t](w(t)-u(t))dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(\mathrm{w}(\mathrm{t})-u(t))'[G_{ub}[t,s]+G_{va}[s,t]]\ell(s)ds\,dt= \tag{26}$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(\mathrm{w}(\mathrm{t})-u(t))'\left[\int_{s}^{t_1}[G_{ub}[t,\beta]+G_{va}[\beta,t]]\Phi(\beta,s)d\beta\right]f_u[s](w(s)-u(s))ds\,dt.$$

Полагая

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(\alpha,\beta)&=-\Phi(t_1,\alpha)\varphi_{xx}(x(t_1))\Phi(t_1,\beta)+\int_{\max(\alpha,\beta)}^{t_0}\Phi'(t,\alpha)H_{xx}[t]\Phi(t,\beta)dt-\\&-\int_{\mathrm{t}_0}^{t_1}\left[\int_{\max(\alpha,\beta)}^{t_1}\Phi'(t,\alpha)G_{aa}[t,s]\Phi(t,\beta)dt\right]ds-\int_{\alpha}^{t_1}\left[\int_{\beta}^{t_1}\Phi'(t,\alpha)G_{ab}[t,s]\Phi(s,\beta)ds\right]dt-\\&-\int_{\alpha}^{t_1}\left[\int_{\beta}^{t_1}\Phi'(s,\alpha)G_{ba}[t,s]\Phi(t,\beta)dt\right]ds-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{\max(\alpha,\beta)}^{t_1}\Phi'(s,\alpha)G_{bb}[t,s]\Phi(s,\beta)ds\right]dt\end{aligned} \tag{27}$$

и принимая во внимания тождества (23)-(26) неравенство (13) записывается в виде

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(w(\alpha)-\mathrm{u}(\alpha))'f_u'[\alpha]M[\alpha,\beta]f_u[\beta](w(\beta)-u(\beta))d\alpha\,d\beta+\\&+\int_{t_0}^{t_1}(w(\alpha)-u(\alpha))'\left[H_{uu}[t]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{vv}[s,t]+G_{uu}[t,s]]ds\right](w(\alpha)-u(\alpha))dt+\\&+2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}(w(\alpha)-u(\alpha))'\left[H_{ux}[\alpha]-\int_{t_0}^{t_1}[G_{ua}[t,s]+G_{vb}[s,\alpha]]ds\right]\Phi[\alpha,t]d\alpha\right]\times\\&\times f_u[t](w(t)-u(t))dt-2\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}_1}\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}_1}(w(t)-u(t))'[G_{vv}[t,s]+\\&+\int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{t}_1}[G_{ub}[t,\beta]+G_{va}[\beta,t]]\Phi(\beta,s)f_u[s]d\beta\Big](w(s)-u(s))dsdt\le 0\ .\end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в задаче (1)-(3) необходимо, чтобы неравенство (28) выполнялось для всех

$w(t) \in U$, $t \in T$.

Из неравенства (28) можно получить ряд относительно легко проверяемых условий оптимальности.

Используя произвольность $w(t)$ его определим по формуле

$$\mathrm{w}(\mathrm{t}) = \begin{cases} v, & t \in [\theta, \theta + \mu), \\ u(t), & t \in T \setminus (\theta, \theta + \mu). \end{cases} \tag{29}$$

Здесь $v \in U -$ произвольный вектор, $\mu > 0$ произвольное достаточно малое число такое, что $\theta + \mu < t_1$.

Принимая во внимание (29) в (28), после некоторых преобразований, получим

$$\mu (v - u(\theta))' \left[H_{uu}[\theta] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{vv}[s, \theta] + G_{uu}[\theta, s]] ds \right] (v - u(\theta)) + 0(\mu) \le 0.$$

Отсюда следует

Теорема 4. Вдоль квазиособого оптимального управления $u(t)$ в задаче (1)-(3) неравенство

$$(v - u(\theta))' \left[H_{uu}[\theta] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{vv}[s, \theta] + G_{uu}[\theta, s]] ds \right] (v - u(\theta)) \le 0 \tag{30}$$

выполняется для всех $v \in U$, $\theta \in [t_0, t_1)$.

В случае вырождения условия оптимальности (30) из необходимого условия оптимальности (28) можно получить поточечное условие оптимальности.

Определение 2. Если для всех $v \in U$ и $\theta \in [\mathrm{t}_0, t_1)$

$$(v - u(\theta))' \left[H_{uu}[\theta] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{vv}[s, \theta] + G_{uu}[\theta, s]] ds \right] (v - u(\theta)) = 0, \tag{31}$$

то квазиособое управление $u(t)$ назовем квазиособым второго порядка управлением в задаче (1)-(3).

Учитывая (29), (31) в (28) после некоторых преобразований приходим к утверждению.

Теорема 5. Если $u(t)$ квазиособое второго порядка управление, то для его оптимальности в задаче (1)-(3) необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{aligned} (\upsilon - u(\theta))' \Bigg[& f_u'[\theta] M(\theta, \theta) f_u[\theta] + \left[H_{ux}[\theta] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{ua}[\theta, s] + G_{vb}[s, \theta]] ds \right] f_u[\theta] \Bigg] - \\ & - 2 \left[\mathrm{G}_{\mathrm{uv}}[\theta, \theta] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{ub}[\theta, \beta] + G_{va}[\beta, t]] \Phi(\beta, \theta) d\beta \, f_u[\theta] \right] (v - u(\theta)) \le 0 \end{aligned} \tag{32}$$

выполнялось для всех $v \in U$ и $\theta \in [\mathrm{t}_0, t_1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Мн., 1972, 271 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Мн.: БГУ, 1973, 248 с.
4. Ащепков Л.Т., Величенко В.В. Оптимальное управление. Владивосток: Дальневост. Ун-т, 1989, 116 с.
5. Срочко В.А. Вычислительные методы оптимального управления. Иркутск: ИГУ, 1982, 110 с.
6. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1989, 176 с.

BİR SİNİF QEYRİ-TİPİK KEYFİYYƏT MEYARLI OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNİN TƏDQİQİ

J.B.ƏHMƏDOVA, İ.F.NAĞIYEVA

XÜLASƏ

İşdə keyfiyyət meyarı heç bir tipə aid olmayan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün əvvəlcə xəttiləşdirilmiş maksimum şərti formasında zəruri şərt alınmış, sonra isə bu zəruri şərtin cırlaşdığı hal öyrənilmişdir.

Açar sözlər: optimal idarəetmə məsələsi, keyfiyyət funksionalının xüsusi artımı, kvaziməxsusi idarə, xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipi.

A STUDY OF A CLASS OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH AN ATYPICAL QUALITY CRITERION

Zh.B.AHMEDOVA, I.F.NAGIEVA

SUMMARY

We consider the optimal control problem described by a system of ordinary differential equations with an atypical quality criterion under the assumption of a convex control domain. The necessary optimality conditions for the first and second orders are proved.

Keywords: optimal control problem, special increment of the quality functional, quasi-special control, linearized maximum principle.

Поступила в редакцию: 26.09.2019 г.
Подписано к печати: 16.10.2019 г.