BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

УДК 519.642.2

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

М.Н.ИМАНОВА
Бакинский Государственный Университет
imn_bsu@mail.ru

Как известно, традиционные методы вычисления определенного интеграла заключаются в замене подынтегральной функции каким-нибудь интерполяционным многочленом и в вычислении интеграла от многочленов известным способом. Таким образом, получаем, что точность методов, примененных к вычислению определенных интегралов, зависит от степени интерполяции многочленов. Здесь для вычисления определенных интегралов предлагаются методы, в построении которых не приходится использовать интерполяционные многочлены. Доказано, что по предложенным здесь методам можно построить методы для вычисления определенных интегралов с высокой точностью. Построены конкретные методы, которые были иллюстрированы с помощью модельных интегралов.

Ключевые слова: определенный интеграл, Задача Коши, ОДУ, многошаговый метод.

Вычислением определенных интегралов ученые занимаются, начиная с Ньютона. Одним из популярных методов численного интегрирования связано с именем Ньютона, который обычно называется методом Ньютона-Котесса. В построении этого метода использованы интерполяционные многочлены Ньютона.

Отметим, что точность методов, построенных по вышеуказанной схеме, не превышает количество точек, использованных в этих методах. Чтобы построить более точные методы, Гаусс предложил использовать в интерполяционном многочлене интегральные точки как неизвестные, с помощью подбора которых повысится точность метода, использованного для вычисления определённого интеграла. Как известно в этом случае для определения значения интегральных точек сталкиваемся с решением нелинейной системы алгебраических уравнений. Для упрощения нахождения значений этих интегральных точек, некоторые авторы предложили использовать известные стандартные многочлены.

Здесь для вычисления значений определенного интеграла предполагается использовать нетрадиционный метод, с помощью которого построены конкретные методы, являющиеся более точными, чем методы

Гаусса. Здесь также найдена связь между методом Гаусса и гибридным методом, который построен на стыке методов Адамса и Рунге-Кутта.

Теперь предположим, что требуется вычислить значение следующего определенного интеграла:

$$I(b) = \int_a^b f(s)ds, \tag{1}$$

Здесь, заданная достаточно гладкая функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$.

Цель данной работы, как было отмечено, заключается в построении метода для вычисления приближенного значения интеграла (1). С этой целью рассмотрим следующий неопределенный интеграл:

$$y(x) = \int_a^x f(s)ds, \quad x \in [a,b]. \tag{2}$$

Очевидно, что функция $y(x)$ также является гладкой функцией, определенной на отрезке $[a,b]$ и $y(b) = I(b)$. Для нахождения значения $I(b)$ отрезок $[a,b]$ с помощью интегральных точек $x_i = a + ih \quad (i = 0,1,...,N)$ разбиваем на N равных частей и за граничные интегральные точки берем x_0 и X_N, т.е. $x_0 = a$, $X_N = b$. Здесь $h > 0$ является шагом разбиения.

Как следует из описания, наша цель заключается в построении более точных методов вычисления значений функции $y(x)$. Поскольку соотношение (2) является равенством, то из него можно написать:

$$y'(x) = f(x), \quad y(a) = 0. \tag{3}$$

Таким образом, вычисление определенного интеграла свели к решению задачи Коши для ОДУ первого порядка. Как известно, начиная с Эйлера, решение задачи Коши для ОДУ свели к решению интегрального уравнения, в котором, заменяя интеграл некоторыми квадратурными формулами, получили метод решения задачи Коши. Здесь предлагается использовать обратное, т.е. с помощью решения задачи Коши для ОДУ вычислить значения определенного интеграла. А также докажем, что такой способ можно считать оправданным.

§1 Построение многошагового метода[1]

Как было отмечено выше, для решения задачи (3) можно использовать следующее равенство:

[1] *Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики - Грант№EIF-KETPL-2-2015-1(25)-56/07/1*

$$y(x) = y(x_0) + \int_a^x f(s)ds, \quad y(a) = 0. \tag{4}$$

Используя какую-нибудь квадратурную формулу можно вычислить значение $y(b)$. В этом случае в лучшем варианте можем получить методы типа Адамса. Поскольку цель данной работы заключается в вычислении значений функции $y(x)$ с высокой точностью к решению задачи (3) применим конечно-разностный метод, который обычно записывается в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i y'_{n+i}, \quad y'(x) = f(x) \quad (n = 0,1,2,..., N-k). \tag{5}$$

Здесь коэффициенты $\alpha_i, \beta_i \quad (i = 0,1,2,...,k)$ подбираем так, чтобы метод (5) имел максимальный порядок точности. Известно, что если коэффициенты $\alpha_i, \beta_i \quad (i = 0,1,2,...,k)$ удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0; \quad \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i; \\ \sum_{i=0}^{k} \frac{i^l}{l!} \alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \frac{i^{l-1}}{(l-1)!} \beta_i \quad (l = 2,3,..., p), \end{gathered} \tag{6}$$

то метод имеет порядок точности p. Отметим, что если $\alpha_k \neq 0$, то из равенства (5) можем найти значение величины y_{n+k}. В этом случае соотношение (5) превращается в конечно-разностное уравнения с порядком k. Как следует отсюда k является порядком разностных методов. Поэтому для определения точности конечно-разностного метода (5) используем понятие степени метода, которую определяем в следующем виде. Целочисленная величина p является степенью метода (5), если имеет место следующее:

$$\sum_{i=0}^{k} (\alpha_i y(x+ih) - h\beta_i y'(x+ih)) = O(h^{p+1}), \quad h \to 0. \tag{7}$$

здесь $x = x_0 + nh$ -фиксированная точка.

Для того, чтобы имело место асимптотическое соотношение (7) необходимым и достаточным условием является удовлетворение коэффициентов метода (5) системы уравнений (6).

Предполагаем, что коэффициенты $\alpha_i, \beta_i \quad (i = 0,1,2,...,k)$ удовлетворяют следующим условиям:

A. Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i \quad (i = 0,1,2,...,k)$ -некоторые действительные числа, причем $\alpha_k \neq 0$.

B. Многочлены

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i; \qquad \sigma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \beta_i \lambda^i$$

не имеют общих множителей отличных от константы.

C. Метод (5) имеет степень $p \geq 1$ и $\sigma(1) \neq 0$.

Как известно, одним из основных свойств метода (5) заключается в его устойчивости, поскольку устойчивость метода (5) является необходимым и достаточным условием его устойчивости. Метод (5) является устойчивым, если кори многочлена $\rho(\lambda)$ лежат внутри единичного круга, на границе которого нет кратных корней. Из условия C следует, что $\rho(1) = 0$ является необходимым условием устойчивости. Как следует из системы (6), максимальное значение для степени равно $p_{\max} = 2k$. Учитывая, что как теоретический, так и практический интерес представляют устойчивее методы. Дальквистом доказано, что если метод (5) устойчив, то имеет место $p \leq 2[k/2] + 2$ и для каждого k существуют устойчивые методы со степенью $p = 2[k/2] + 2$, но если $\beta_k = 0$, то $p \leq k$ (см. напр. [10], [11], [12]).

По результатам Дальквиста получаем, что для построения более точных устойчивых конечно-разностных методов нужно модифицировать метод (5). С этой целью можно использовать методы типа забегания вперед, который в одном варианте имеет следующий вид:

$$\sum_{i=0}^{k-m} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}, \quad m > 0, \quad \alpha_{k-m} \neq 0. \tag{8}$$

Известно, что если метод (8) устойчив, то $p \leq k + m + 1$ и существуют устойчивые методы со степенью $P_{\max} = k + m + 1$ для $k \geq 3m$ (см. напр. [12]). Отметим, что для вычисления значений y_{n+k-m} по метод (8) потребуется известность значений $y_{n+k-m+1}, \ldots, y_{n+k}$, которые являются приближенными значениями решения задачи Коши (3) в последующих точках. Если $n + k - m = N$, то в формуле для вычисления значений $y(b)$ будет участвовать значение функции $f(x)$ вне отрезка $[a,b]$ в которых функция $f(x)$ может быть не определена. Поэтому метод (8) можно использовать в тех случаях, когда $f(x)$ определена на некотором расширении отрезка, например на отрезке: $[a, b + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ -некоторый параметр.

Для построения более точных методов можно использовать следующую формулу:

$$\sum_{i=0}^{k-l} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k} \gamma_i f_{n+i+\nu_i}, \quad \left(|\nu_i| < 1; i = 0,1,\ldots,k\right). \tag{9}$$

Очевидно, что при $l=0$ и $\gamma_i = 0 \ \ (i=0,1,..,k)$ из формулы (9) можно получить метод (8), а при $l=0$, $\beta_i = 0 \ \ (i=0,1,..,k)$ и при $|\gamma_0|+|\gamma_1|+...+|\gamma_k| \neq 0$ из формулы (9) можно получить гибридный метод. Отметим, что гибридные методы построены на стыке методов Адамса и Рунге-Кутта (см. напр. [13], [14]). Отметим, что при $l \neq 0$ из формулы (9) получаем гибридные методы с забеганием вперед или же метода типа (8).Таким образом, получаем, что метод (9) является более общим, чем известные нам методы. Отметим, что методы, использованные выше понятия устойчивости и степень методов (8) и (9) определяются аналогично, а именно заменой асимптотического равенства (7) со следующим:

$$\sum_{i=0}^{k-l} \alpha_i y(x+ih) - h\sum_{i=0}^{k} (\beta_i y'(x+ih) - \gamma_i y'(x+(i+\nu_i)h)) = O(h^{p+1}), \ \ h \to 0. \quad (10)$$

Отметим, что условия A,B и C для методов, полученных из формулы (9), записываются в следующей форме:

A. Коэффициенты $\alpha_i \ \ (i=0,1,2,...,k-l), \beta_i, \gamma_i \ \ (i=0,1,2,...,k)$ - некоторые действительные числа, причем $\alpha_{k-l} \neq 0$.

B. Многочлены

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k-l} \alpha_i \lambda^i; \qquad \sigma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \beta_i \lambda^i; \qquad \gamma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \gamma_i \lambda^{i+\nu_i}$$

не имеют общих множителей отличных от константы.

C. Степень метода удовлетворяет условию $p \geq 1$ и $\sigma(1)+\gamma(1) \neq 0$.

Отметим, что поскольку свойства линейных частей для этих методов определяются одним и тем же способом, следовательно, устойчивость и точность для этих методов определяется по одинаковой схеме. Например для того чтобы метод (9) имел степень p ,его коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{k-l} \alpha_i = 0; \ \ \sum_{i=0}^{k} (\beta_i + \gamma_i) = \sum_{i=0}^{k-l} i\alpha_i; \\ \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i^l}{l!}\beta_i + \frac{(i+\nu_i)^l}{l!}\gamma_i \right) = \sum_{i=0}^{k-l} \frac{i^{l+1}}{(l+1)!}\alpha_i \quad (l=1,2,...,p-1). \end{gathered} \quad (11)$$

Таким образом, доказано, что метод (9) обобщает вышеприведенные методы и поэтому исследование его представляет как теоретический, так и практический интерес.

Отметим, что система (11) является нелинейным в случае $|\nu_0|+|\nu_1|+...+|\nu_k| \neq 0$. Как известно, найти точные решения таких систем удается не всегда. Поэтому часто для решения таких нелинейных систем алгебраических уравнений используются приближенные методы. В системе (11) количество уравнений равно $p+1$, а количество неизвестных $4k+4-l$. Можно ожидать, что система (11) при $p \le 4k+2-l$ будет иметь решение. Очевидно, что методы, имеющие степень $p = 4k+2-l$ при $k > 2$ обычно бывают неустойчивыми. Поэтому систему (11) исследуем в случае $p \le 4k+2-l$. Отсюда следует, что методы типа (9) являются более точными, чем методы типа (5), (8) и (9) при $\beta_i = 0 \ \ (i = 0,1,...,k)$. Поэтому рассмотрим применение методов, полученных из формулы (9) к решению задачи (3). С этой целью рассмотрим случай когда $k=1$. Сперва построим метод при $\beta_1 = \beta_0 = 0$, а затем построим метод для $\beta_0 = 0$, а затем построим метод когда $\beta_t \ne 0, \ \ \gamma_t \ne 0 \ \ (t = 0,1)$. Таким образом, здесь построим следующие устойчивые методы:

$$y_{n+i} = y_n + h\left(y'_{n+\alpha} + y'_{n+1-\alpha}\right)/2, \ \ \alpha = 1/2 - \sqrt{3}/6, \tag{12}$$

$$y_{n+i} = y_n + 2hy'_n/9 + h\left((16+\sqrt{6})y'_{n+3/5-\alpha} + (16+\sqrt{6})y'_{n+3/5+\alpha}\right)/36, \quad \alpha = \sqrt{6}/10, \tag{13}$$

$$y_{n+i} = y_n + h\left(y'_n + y'_{n+1}\right)/1 + 5h\left(y'_{n+\beta} + y'_{n+1-\beta}\right)/12, \ \ \beta = 1/2 - \sqrt{5}/10. \tag{14}$$

Метод (12) является гибридным методом и имеет степень $p=4$, метод (13) входит в класс методов типа (9), имеет степень $p=5$ и является явным, т.е. правая часть этого метода не зависит от искомой величины y_{n+1}. А метод (14) является неявным, имеет степень $p=6$ и метод (14) имеет максимальную точность при $k=1$. Очевидно, что метод (9) при $\beta_i = 0 \ \ (i = 0,1,...,k)$ имеет степень и поэтому при $k=1$ имеет степень $p=4$. А методы полученные из (9) имеет степень $p \le 4k+2$ и следовательно при $k=1$ имеет место $p \le 6$, что имеет место для метода (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Mamedov J.J. Computational methods. 1978, 304 pp.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений // В 2-х т. – 3-е изд. Т.1. М.: Наука, 1966, 632 с.
3. Ibrahimov V.R. On a relation between order and degree for stable forward jumping formula. Zh. Vychis. Mat., № 7, 1990, p.1045-1056.
4. Bahvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V. M.: Vysshaya Shkola, 2000. Numerical methods in problems and examples, p.190.
5. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и линейные уравнения). М.: Высшая школа, 2000, 297 с.
6. Atkinson K.E. A survey of numerical methods for solving nonlinear integral equations. Journal of integral equations and applications, No 1, 1992, v.4, p.15-46.
7. Quarteroni A., Saccar R., Saleri F. Numerical Mathematics, 2007. Springer.
8. Burden R.L., Douglas J. Faires. Numerical analysis. Cengege Learning, № 7, 2001, p.850.
9. Krylov A.N. Lectures on approximate calculations. M.: Gocteh-izdat, 1950.