BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

УДК 517.53

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ АППРОКСИМАЦИИ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.А.ТАГИЕВА
Бакинский Государственный Университет
mtagiyeva@mail.ru

Используя обобщенную производную в смысле Берса в классе обобщенных аналитических функций, в работе получены обобщения некоторых теорем об оценке скорости наилучшего равномерного приближения обобщенных аналитических функций обобщенными полиномами в односвязной области.

Ключевые слова: порождающая пара (F,G), (F,G)-производная, (F,G) - дифференцируемость, (F,G) - интегрируемость, аппроксимация.

Рассмотрим класс $U_{p,2}(a,b,G),\ p>2$, решений уравнения

$$\partial_{\bar z} w + aw + b\overline{w} = 0 \qquad (1)$$

в односвязной области G, с коэффициентами $a,b \in L_{p,2}(\mathbb{C}),\ p>2,\ [1]$.

В работе [1] установлено взаимно однозначное соответствие между ограниченными решениями $F(z),G(z)$ уравнения (1) класса $U_{p,2}(a,b,\mathbb{C})$ и коэффициентами уравнения (1). Пара (F,G) называется порождающей парой класса $U_{p,2}(a,b,\mathbb{C})$ [2]. Она была положена Берсом в основу построения теории псевдоаналитических функций, обобщающей классическое понятие дифференцируемости и интегрируемости [2].

Пара (F,G) удовлетворяет следующим условиям:

1) $\operatorname{Im}(F(z)\cdot \overline{G}(z)) \ge k_0 > 0$, $k_0 = const$, на всей плоскости;

2) $F,G \in C_\beta(\overline{\mathbb{C}}),\ \beta = \dfrac{p-2}{p}$, и допускают обобщенные производные по z и $\bar z$.

Пусть функция $w(z)$ определена в области G. Из условия (1) на пару (F,G) следует, что для любой точки $z_0 \in G$ существуют такие вещественные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, что

$$w(z_0) = \varphi(z_0)F(z_0) + \psi(z_0)G(z_0).$$

Функция $w(z)$ имеет в точке z_0 (F,G) - производную $\dot{w}(z_0)$, если существует конечный предел

$$\lim_{z\to z_0}\frac{w(z)-\varphi(z_0)F(z)-\psi(z_0)G(z)}{z-z_0}=\dot{w}(z_0)\equiv\dot{w}_{(F,G)}(z_0)\,. \qquad (2)$$

Для существования $\dot{w}(z_0)$ необходимо и достаточно, чтобы в точке z_0 имело место равенство

$$w_{\bar{z}}(z_0)+aw(z_0)+b(z_0)\overline{w(z_0)}=0,$$

где a и b удовлетворяют условиям

$$a=\frac{\overline{F}G_{\bar{z}}-F_{\bar{z}}\overline{G}}{F\overline{G}-\overline{F}G},\ b=\frac{F\cdot G_{\bar{z}}-F_{\bar{z}}G}{F\overline{G}-\overline{F}G}. \qquad (3)$$

Согласно Берсу, функция $w(z)$ называется псевдоаналитической в области G или (F,G) - псевдоаналитической, если она непрерывна и имеет почти всюду в этой области (F,G) - производную.

Таким образом, класс псевдоаналитических функций, соответствующих паре (F,G), совпадает с классом обобщенных аналитических функций класса $U_{p,2}(a,b,G)$ - регулярных решений уравнения (1).

Далее в нашем изложении мы будем предполагать, что функции $F(z)$ и $G(z)$ имеют гельдерово-непрерывные частные производные по z и $\bar{z}$ и что

$$|F_{\bar{z}}|+|G_{\bar{z}}|\le\frac{M}{1+|z|^{\sigma}},\ \ \sigma>1,\ z\in\overline{\mathbb{C}}.$$

Пусть (F,G) и (F_1,G_1) - две порождающие пары. Пара (F_1,G_1) называется последующей для пары (F,G) и (F,G) - предшествующей для (F_1,G_1), если

$$a_{(F_1,G_1)}=a_{(F,G)},\quad b_{(F_1,G_1)}=B_{(F,G)},$$

где

$$B_{(F,G)}=\frac{FG_z-GF_z}{F\overline{G}-\overline{F}G}.$$

Если $w(z)$ является (F,G) - псевдоаналитической функцией в области G, то $\dot{w}(z)$ является (F_1,G_1) -псевдоаналитической в области G.

Последовательность порождающих пар $\{(F_v,G_v)\}$ называется порождающей последовательностью, если (F_{v+1},G_{v+1}) следует за (F_v,G_v).

Каждая порождающая пара (F,G) может быть вложена в порождающую последовательность

$$\ldots,(F_{-1},G_{-1}),(F_0,G_0),(F_1,G_1),\ldots$$

так, что $(F,G)=(F_0,G_0)$ [2].

С помощью порождающей последовательности определяются высшие производные от функции $w(z)$ реккурентными формулами

$$\overset{[0]}{w} \equiv w, \qquad \overset{[n+1]}{w} = \frac{d_{(F_n,G_n)} \overset{[n]}{w}}{dz}, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

т.е. псевдоаналитическая функция является в определенном смысле бесконечно дифференцируемой.

(F,G) - интеграл от функции $w(z)$, непрерывной на спрямляемой кривой Γ, соединяющей точки z_0 и z, определяется формулой

$$\int_\Gamma w(z)d_{(F,G)}z = F(z)\operatorname{Re}\int_\Gamma \frac{2\overline{G}w}{F\overline{G}-\overline{F}G}dz - G(z)\operatorname{Re}\int_\Gamma \frac{2\overline{F}w}{F\overline{G}-\overline{F}G}dz .$$

Из определения следует, что

$$\int_\Gamma (\lambda w_1 + \mu w_2)d_{(F,G)}z = \lambda\int_\Gamma w_1 d_{(F,G)}z + \mu\int_\Gamma w_2 d_{(F,G)}z ,$$

где λ и μ вещественные постоянные,

$$\left|\int_\Gamma w d_{(F,G)}z\right| \le M\int_\Gamma |w|\,|dz| ,$$

где M - постоянная, зависящая от (F,G).

Непрерывная функция $w(z)$, определенная в области G, называется (F,G) - интегрируемой, если для любой замкнутой кривой Γ, расположенной в односвязной области G

$$\int_\Gamma w(z)d_{(F,G)}z = 0$$

(F,G) - производная $\dot{w}(z)$ от псевдоаналитической функции $w(z)$ является (F,G) - интегрируемой и

$$\int_{z_0}^{z} \dot{w}d_{(F,G)}z = w(z) - \varphi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z) .$$

[2]

Наличие (F,G) - производной любого порядка может быть использовано для усиления некоторых результатов из теории аппроксимации обобщенных аналитических функций обобщенными полиномами.

В [4] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть граница Γ области G удовлетворяет условию Альпера. Если $w(z)$ является обобщенной аналитической функцией в области G и непрерывной в $\overline{G}$, то существует последовательность $\{D_n(z,w)\}$ обобщенных полиномов Фабера такая, что имеет место неравенство

$$\left|w(z) - D_n(z,w)\right| \le c\omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \tag{4}$$

где $\omega(\delta, f)$ - модуль непрерывности функции $f(z)$, определенной равенством

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{w(\xi)d\xi}{\xi - z}, \quad z \in \overline{G},$$

$f(z)$ - функция голоморфная в G и непрерывная в $\overline{G}$ [1].

Следствие. При условиях теоремы для наилучшего равномерного приближения $E_n(w,\overline{G})$ функции $w(z)$ обобщенными полиномами Фабера порядка не выше n, справедливо неравенство

$$E_n(w,\overline{G}) \le c\omega\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{5}$$

Теорема 2. Пусть граница Γ области G удовлетворяет условию Альпера, а обобщенная аналитическая в области G функция $w(z)$ удовлетворяет условию Гельдера порядка $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$ в $\overline{G}$, тогда справедлива оценка

$$\left|w(z) - D_n(z,w)\right| \le \frac{c}{n^{\alpha}}, \quad z \in \overline{G}, \tag{6}$$

$$E_n(w,\overline{G}) \le \frac{c}{n^{\alpha}},$$

где c - постоянная, зависящая от области G.

В силу выше изложенного, мы будем рассматривать функцию $w(z)$ и как псевдоаналитическую относительно пары (F,G), связанной с коэффициентами a,b уравнения (1) формулой (2), обобщенные полиномы Фабера $\text{Ô}_k(z,G)$ как (F,G) - псевдополиномы, которые представляются следующим образом.

В [5] показано, что обобщенные полиномы Фабера для односвязной области G могут быть представлены в виде

$$\text{Ô}_{2k}(z,G) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\xi,G)\Phi^k(\xi)d\xi - \Omega_2(z,\xi,G)\overline{\Phi^k(\xi)d\xi}, \tag{7}$$

$$\text{Ô}_{2k+1}(z,G) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Omega_1(z,\xi,G)i\Phi^k(\xi)d\xi - \Omega_2(z,\xi,G)\overline{i\Phi^k(\xi)d\xi}, \tag{8}$$

где $\eta(z) = \Phi(z)$ - функция, конформно и однолистно отображающая область D на $\{|\eta| > 1\}$.

Ядра $\Omega_1(z,\xi,G)$, $\Omega_2(z,\xi,G)$ связаны с формальными степенями

$Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2},\xi,z\right)$, $Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i},\xi,z\right)$ формулами

$$\Omega_1(z,\xi,G)=Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2},\xi,z\right)+iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i},\xi,z\right)$$

$$\Omega_2(z,\xi,G)=Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2},\xi,z\right)-iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i},\xi,z\right)$$

[5].

Подставляя их выражения в формулы (7) и (8), соответственно получим

$$\hat{o}_{2k}(z,G)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\left(Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2},\xi,z\right)+iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i},\xi,z\right)\right)\Phi^k(\xi)d\xi-\right.$$

$$\left.-\left(Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2},\xi,z\right)-iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i},\xi,z\right)\right)\overline{\Phi^k(\xi)d\xi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2},\xi,z\right)\left(\Phi^k(\xi)d\xi+\overline{\Phi^k(\xi)d\xi}\right)+$$

$$+iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i},\xi,z\right)\left(\Phi^k(\xi)d\xi+\overline{\Phi^k(\xi)d\xi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}Z^{(-1)}\left(-1,\xi,z\right)\cdot(\operatorname{Im}\Phi^k(\xi)d\xi)+Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{i},\xi,z\right)\left(\operatorname{Re}\Phi^k(\xi)d\xi\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}Z^{(-1)}(-\operatorname{Im}\Phi^k(\xi)d\xi,\xi,z)+Z^{(-1)}\left(i\operatorname{Re}\Phi^k(\xi)d\xi,\xi,z\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}Z^{(-1)}(i\Phi^k(\xi)d\xi,\xi,z)\,. \qquad (9)$$

Аналогично

$$\hat{o}_{2k+1}(z,G)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}Z^{(-1)}(-\Phi^k(\xi)d\xi,\xi,z)\,. \qquad (10)$$

Обобщенный полином

$$D_n(z,G)=\sum_{k=0}^{n}\widetilde{\lambda}_k^{(u)}c_{2k}\,\hat{o}_{2k}(z,G)+\widetilde{\lambda}_k^{(u)}c_{2k+1}\,\hat{o}_{2k+1}(z,G)$$

в (4) мы будем рассматривать и как (F,G) - псевдополином, где $\hat{o}_{2k}$ и $\hat{o}_{2k+1}$ определены формулами (9), (10), $\lambda_k^{(u)}$ - коэффициенты суммирования.

Справедливы следующие обобщения теорем 1,2.

Теорема 3. Пусть граница Γ области G удовлетворяет условию Альпера. Если обобщенная аналитическая функция $w(z)$ в области G

имеет непрерывную (F_m, G_m) - производную $\overset{[m]}{w}$ в $\overline{G}$, то справедливо неравенство

$$E_n(w,\overline{G}) \le \frac{M}{n^m}\omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right),$$

где $\omega(\delta, f_m)$ - модуль непрерывности функции

$$f_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overset{[m]}{w}(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

в замкнутой области $\overline{G}$, а M - постоянная, зависящая от порождающих пар (F_ν, G_ν), $\nu = \overline{0, m-1}$.

Доказательство. Из неравенства (4) следует, что для (F_m, G_m) производной $\overset{[m]}{w}$ существует (F_m, G_m) - псевдополином $D_n(z)$ степени не выше n, что выполняется неравенство

$$\max_{z\in\overline{G}}\left|\overset{[m]}{w}(z) - D_n(z)\right| = E_n\left(\overset{[m]}{w}, \overline{G}\right) \le c\omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right), \quad n > m. \tag{12}$$

При фиксированной точке $z_0 \in G$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$w_1(z) = \int_{z_0}^{z}\left(\overset{[m]}{w}(\xi) - D_n(\xi)\right)d_{(F,G)}\xi = \overset{[m-1]}{w}(z) - D_{m+1}(z). \tag{13}$$

Для (F_m, G_m) - производной $\dot{w}_1(z)$ функции (13) в силу (12) выполняется условие

$$\max_{z\in\overline{G}}\left|\dot{w}_1(z)\right| \le c\omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right),$$

поэтому $w_1(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\beta = 1$ и постоянной $M_{m-1}\omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right)$, M_{m-1} зависит от пары (F_{m-1}, G_{m-1}). Но тогда в силу неравенства (6) существует (F_{m-1}, G_{m-1})-полином $D_n(z,1)$, что справедливо неравенство

$$\max_{z\in\overline{G}}\left|w_1(z) - D_n(z,1)\right| \le E_n\left(w_1, \overline{G}\right) \le \frac{M_{m-1}\omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right)}{n}. \tag{14}$$

Далее рассматриваем вторую вспомогательную функцию

$$w_2(z) = \int_{z_0}^{z}\left(w_1(\xi) - D_n(\xi,1)\right)d_{(F,G)}\xi = \overset{[m-2]}{w}(z) - Q_{m+2}(z). \tag{15}$$

(F_{m-1},G_{m-1}) - производная этой функции в силу (13) удовлетворяет неравенству

$$\max_{z\in\overline{G}}\left|\dot{w}_2(z)\right|\le\frac{M_{m-1}}{n}\omega\left(\frac{1}{n},f_m\right),\tag{16}$$

поэтому существует такой (F_{m-2},G_{m-2})-полином $D_n(z;2)$, что выполняется условие

$$\max_{z\in\overline{G}}\left|w_2(z)-D_n(z,2)\right|\le\frac{M_{m-1,m-2}}{n^2}\omega\left(\frac{1}{n},f_m\right).$$

Продолжая эти рассуждения, аналогично функциям (12) и (14) вводим вспомогательную функцию

$$w_m(z)=\int_{z_0}^{z}\left(\dot{w}(\xi)-D_n(\xi,m-1)\right)d_{(F,G)}\xi=w(z)-Q_{n+m}(z).\tag{17}$$

Производная этой функции удовлетворяет условию

$$\max_{z\in\overline{G}}\left|\dot{w}_m(z)\right|\le\frac{M_{m-1,\dots,0}}{n^{m-1}}\omega\left(\frac{1}{n},f_m\right),$$

поэтому существует такой $(F_0,G_0)\equiv(F,G)$ полином $D_n(z,m)$, что справедливо неравенство

$$\max_{z\in\overline{G}}\left|w_m(z)-D_n(z,m)\right|\le\frac{M_{m-1,\dots,0}}{n^m}\omega\left(\frac{1}{n},f_m\right).\tag{18}$$

Теперь в силу (16) рассмотрим (F,G) - псевдополином $P_{m+n}(z)=$ $=Q_{n+m}(z)+D_n(z,m)$. В результате из (17) получим неравенство

$$\max_{z\in\overline{G}}\left|w(z)-P_{n+m}(z)\right|\le\frac{M_{m-1,\dots,0}}{n^m}\omega\left(\frac{1}{n},f_m\right).$$

Таким образом, имеем

$$E_{n+m}(w,\overline{G})\le\frac{M_{m-1,\dots,0}}{n^m}\omega\left(\frac{1}{n},f_m\right)\le\frac{M_{m-1,\dots,0}}{(n+m)^m}\omega\left(\frac{1}{n+m},f_m\right).\tag{19}$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть граница Γ области G удовлетворяет условию Альпера, $w(z)$ - обобщенная аналитическая функция в области G и в $\overline{G}$ $\overset{[m]}{w}$ удовлетворяет условию Гельдера порядка α, $0<\alpha\le1$, тогда существует такая постоянная M, зависящая от области G и порождающих пар (F_ν,G_ν), $\nu=\overline{1,m}$, что выполняется неравенство

$$\left|w(z)-D_n(z)\right|\le\frac{M}{n^{m+\alpha}}.$$

Доказательство. При условиях теоремы функция $f_m(z)$, определяемая формулой (11), удовлетворяет условию Гельдера с показателем α. [1]. Тогда из неравенства (19) следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1959, 512 с.
2. Берс Л. (Bers L.) Theory of pseudo-analytic functions. New York, 1953.
3. Тагиева М.А. О суммировании рядов по обобщенным полиномам Фабера // Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2012, №4, с.86-90.
4. Тагиева М.А. Обобщённый оператор Фабера в пространстве голоморфных функций // Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2010, №4, с.58-64.
5. Тагиева М.А. О связи между некоторыми понятиями и формулами теорий Векуа и Берса // Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2013, №3, с.59-65.

ÜMUMİLƏŞMİŞ ANALİTİK FUNKSİYALAR SİNİFİNDƏ YAXINLAŞMA NƏZƏRİYYƏSİNİN BƏZİ TEOREMLƏRİNİN ÜMUMİLƏŞMƏLƏRİ

M.Ə.TAĞIYEVA

XÜLASƏ

Bu məqalədə Bers mənada ümumiləşmiş (F,G) - törəməsindən istifadə etməklə ümumiləşmiş analitik funksiyalar sinifində yaxınlaşma nəzəriyyəsinin bəzi teoremlərinin ümumiləşmələri alınmışdır.

Açar sözləri: Törədən (F,G) cütü, (F,G) törəməsi, (F,G) diferensiallama, (F,G) inteqrallama, yaxınlaşma.

GENERALIZATIONS SOME THEOREMS OF THEORY OF APPROXIMATION IN CLASS OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

M.A.TAGIYEVA

SUMMARY

In this paper, using generalizing (F,G) - derivative in the sense Bers some generalizations of theorems of approximation theory in the class of generalized analytical functions are obtained.

Key words: generating pair (F,G), (F,G) - derivative, (F,G) - integrable, approximation.

Поступила в редакцию: 11.02.2019 г.
Подписано к печати: 16.10.2019 г.