УДК 517.984

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Н.Г.МАМЕДОВА*, А.Х.ХАНМАМЕДОВ**

Гянджинский Государственный Университет

***** Институт Прикладной Математики, БГУ***

agil_khan@mail.ru

Рассмотрен оператор Шредингера $L=-\frac{d^2}{dx^2}+|x|$ на всей оси. Исследован спектр оператора. Получена асимптотическая формула для собственных значений.

Ключевые слова: оператор Шредингера, уравнение Эйри, функции Эйри, собственные значения.

Введение и основные результаты

Спектральные свойства оператора Эйри $L_D y=-y''+xy,\, y(0)=0$ или $L_N y=-y''+xy,\, y'(0)=0$ изучались в работах довольно многих авторов (см. $[1]-[9]$ и имеющиеся там литературу). Интерес представляет также соответствующий оператор на всей оси.

В пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y)=-y''+|x|y$$

с областью определения

$$D(L)=\left\{y\in L_2(-\infty,\infty): y\in W^2_{2,loc},\, l(y)\in L_2(-\infty,\infty)\right\}.$$

Заметим, что оператор L плотно определен, так как его область определения содержит бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем на интервале $(-\infty,\infty)$, множество которых плотно в $L_2(-\infty,\infty)$. Более того, L является самосопряженным оператором. Очевидно, что спектр оператора L дискретен и состоит из собственных значений $\lambda_n, n=1,2,\ldots$, где $\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Нас будет интересовать асимптотическое поведение λ_n.

Вначале рассмотрим уравнение

$$-y'' + xy = \lambda y,\ -\infty < x < \infty,\quad \lambda \in C. \qquad (1)$$

Известно, что уравнение (1) имеет $[10]$ решения в виде $Ai(x-\lambda), Bi(x-\lambda)$, где $Ai(z), Bi(z)$ - функции Эйри первого и второго рода соответственно. Отметим некоторые свойства этих функций. Как известно (см. $[8],[10]$), обе эти функции являются целыми функциями порядка 3/2 и типа 2/3. Имеют место асимптотические равенства при $|z| \to \infty$

$$\mathrm{A}i(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\zeta}\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right], |\arg z| < \pi,$$

$$Ai'(z) \sim -\pi^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} e^{-\zeta}\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right], |\arg z| < \pi,$$

$$\mathrm{A}i(-z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right], |\arg z| < \frac{2\pi}{3},$$

$$Ai'(-z) \sim -\pi^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right], |\arg z| < \frac{2\pi}{3},$$

где $\zeta = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$. В секторе $|z| < \frac{\pi}{3}$ для функции $Bi(z)$ имеет асимптотическое представление

$$Bi(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{\zeta}\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right].$$

Таким образом, функция $Bi(z)$ экспоненциально растет при $|z| \to \infty$ на любом луче этого сектора. Для Вронскиана функций $Ai(z), Bi(z)$ справедливо равенство

$$\{Ai(z), Bi(z)\} = Ai(z)Bi'(z) - Ai'(z)Bi(z) = \pi^{-1}. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$-y'' + |x| y = \lambda y,\ -\infty < x < \infty,\quad \lambda \in C. \qquad (3)$$

Согласно общей теории (см. $[11]$) уравнение (3) имеет два линейно независимых решения $\psi_{\pm}(x,\lambda)$, которые при каждом $\lambda, \operatorname{Im}\lambda > 0$ удовлетворяют условиям $\psi_{\pm}(x,\lambda) \in L_2(0,\pm\infty)$. Так как уравнение (3) не изменяется при замене x на $-x$, то функция $\psi_{\pm}(-x,\lambda)$ также является его решением. Следовательно, можно считать, что $\psi_{-}(x,\lambda) = \psi_{+}(-x,\lambda)$.

С другой стороны, так как $Ai(x-\lambda) \in L_2(0,\infty)$, то функции $\psi_{+}(x,\lambda), Ai(x-\lambda)$ с точностью до множителя совпадают. Исходя из этих соображений при $x \ge 0$ положим $\psi_{+}(x,\lambda) = Ai(x-\lambda)$. Далее, при $x \le 0$ ищем решение $\psi_{+}(x,\lambda)$ в виде

$$\psi_{+}(x,\lambda) = \alpha Ai(-x-\lambda) + \beta Bi(-x-\lambda),$$

поскольку функции $Ai(-x-\lambda), Bi(-x-\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) при $x \le 0$. Принимая во внимание, что решение $\psi_+(x,\lambda)$ и его производная $\psi'_+(x,\lambda)$ непрерывны в точке $x=0$, для определения коэффициентов α, β получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} Ai(-\lambda)\alpha + Bi(-\lambda)\beta = Ai(-\lambda) \\ Ai'(-\lambda)\alpha + Bi'(-\lambda)\beta = -Ai'(-\lambda) \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно коэффициентов α, β и учитывая равенство (2), получаем

$$\alpha = -\pi\left(Ai(-\lambda)Bi(-\lambda)\right)',$$

$$\beta = -2\pi Ai(-\lambda)Ai'(-\lambda).$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Уравнение (3) имеет специальные решения* $\psi_\pm(x,\lambda)$, *представимые в виде*

$$\psi_+(x,\lambda) = \begin{cases} Ai(x-\lambda), x \ge 0, \\ -\pi\left(Ai(-\lambda)Bi(-\lambda)\right)' Ai(-x-\lambda) - 2\pi Ai(-\lambda)Ai'(-\lambda)Bi(-x-\lambda), x < 0 \end{cases}$$

$$\psi_-(x,\lambda) = \begin{cases} -\pi\left(Ai(-\lambda)Bi(-\lambda)\right)' Ai(x-\lambda) - 2\pi Ai(-\lambda)Ai'(-\lambda)Bi(x-\lambda), x \ge 0, \\ Ai(-x-\lambda), x < 0 \end{cases}$$

Вернемся теперь к изучению спектра оператора L. Из того, что $\psi_\pm(x,\lambda) \in L_2(0,\pm\infty)$, следует, что если $\lambda = \lambda_n$ - собственное значение, то решения $\psi_+(x,\lambda_n)$ и $\psi_-(x,\lambda_n)$ линейно зависимы. В самом деле, так как

$$\psi_+\left(x,\lambda_n^0\right) = \begin{cases} Ai\left(x-\lambda_n^0\right), x \ge 0, \\ (-1)^{n-1} Ai\left(-x-\lambda_n^0\right), x < 0, \end{cases}$$

$$\psi_-\left(x,\lambda_n^0\right) = \begin{cases} (-1)^{n-1} Ai\left(x-\lambda_n^0\right), x \ge 0, \\ Ai\left(-x-\lambda_n^0\right), x < 0, \end{cases}$$

то имеет место равенство

$$\psi_+\left(x,\lambda_n^0\right) = (-1)^{n-1}\psi_-\left(x,\lambda_n^0\right).$$

Из этих рассуждений следует, что собственные значения оператора L совпадают с нулями функции

$$\Delta(\lambda) = \{\psi_+(x,\lambda), \psi_-(x,\lambda)\}.$$

Воспользовавшись тем, что вронскиан двух решений не зависит от x, получим

$$\Delta(\lambda) = \{\psi_+(x,\lambda), \psi_-(x,\lambda)\}\big|_{x=0} = -2Ai(-\lambda)Ai'(-\lambda). \tag{4}$$

Из последней формулы и известных свойств нулей функций $Ai(\lambda), Ai'(\lambda)$ (см. $[10]$) вытекает, что собственные значения $\lambda_n, n = 1,2,...$ оператора L

расположены только на положительной полуоси и справедливо следующее асимптотическое равенство

$$\lambda_n = \left(\frac{3\pi(2n-1)}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + O\left(n^{-2}\right)\right), n \to \infty .$$

Докажем, что собственные значения оператора L простые. Вводим нормировочные числа $\alpha_n, n = 1,2,...,$

$$\alpha_n = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_{\pm}(x, \lambda_n)\right|^2 dx} . \tag{5}$$

Условимся точками обозначать дифференцирование по λ, а штрихами- по x:

$$u' = \frac{\partial}{\partial x} u, \dot{u} = \frac{\partial}{\partial \lambda} u .$$

Так как $\psi_{\pm}(x, \lambda)$ экспоненциально убывает при $x \to \pm\infty$, то из стандартного (см., напр., $[12]$) тождества

$$f^2 = \left\{ \dot{f}, f \right\}'$$

и (5) вытекает, что

$$(\alpha_n)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_+^2(x, \lambda_n) dx = \int_0^{\infty} \psi_+^2(x, \lambda_n) dx + \int_{-\infty}^{0} \psi_-^2(x, \lambda_n) dx =$$

$$= \left\{ \dot{\psi}_+(x, \lambda_n), \psi_+(x, \lambda_n) \right\}\Big|_0^{\infty} + .\left\{ \dot{\psi}_-(x, \lambda_n), \psi_-(x, \lambda_n) \right\}\Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$= -\left\{ \dot{\psi}_+(x, \lambda_n), \psi_+(x, \lambda_n) \right\}\Big|_{x=0} + .\left\{ \dot{\psi}_-(x, \lambda_n), \psi_-(x, \lambda_n) \right\}\Big|_{x=0} =$$

$$= -(-1)^{n-1} \left\{ \dot{\psi}_+(x, \lambda_n), \psi_-(x, \lambda_n) \right\}\Big|_{x=0} -$$

$$(-1)^{n-1} .\left\{ \psi_+(x, \lambda_n), \dot{\psi}_-(x, \lambda_n) \right\}\Big|_{x=0} = -(-1)^{n-1} \dot{\Delta}(\lambda_n).$$

Следовательно, $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$, t.e. собственные значения оператора L простые.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Spektr operatora L sostoit iz posledovatelğnosti prostıx vehestvennıx sobstvennıx znaçeniy* $\lambda_n, n \geq 1$, *расположенных на положительной полуоси, priçem spravedliva sleduöhaə asimptotiçeskaə formula*

$$\lambda_n = \left(\frac{3\pi(2n-1)}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + O\left(n^{-2}\right)\right), n \to \infty .$$

Замечание. В пространстве $L_2(0, \infty)$ рассмотрим операторы

$$L_D y = -y'' + |x| y, y(0) = 0 \text{ и } L_N y = -y'' + |x| y, y'(0) = 0 .$$

Формула (4) показывает, что спектр оператора L состоит из объединения спектров операторов L_D и L_N.

ЛИТЕРАТУРА

1. Avron J., Herbst I. Spectral and scattering theory of Schrodinger operators related to the Stark effect// Commun. Math. Phys..-1977.- 52.- PP. 239–254.
2. Lin Y., Qian M., Zhang Q. Inverse scattering problem for one-dimensional Schordinger operators related to the general Stark effect// Acta Mathematicae Applicatae Sinica.- 1989.- 5, №2.-PP. 116-136.
3. Yishen Li. One special inverse problem of the second order differential equation on the whole real axis// Chin. Ann. of Math..-1981.- 2, №2.- PP. 147-155.
4. Kachalov A. P., Kurylev Ya. V. The method of transformation operators in the inverse scattering problem. The one-dimensional Stark effect// J. Soviet Mathematics.-1991.- 5, №3.- PP. 3111–3122.
5. Муртазин Х.Х., Амангильдин Т. Г. Асимптотика спектра оператора
6. Штурма-Лиувилля// Матем. сб.. -1979.- 110(152, №1.- С. 135–149.
7. Jensen A. Perturbation results for Stark effect resonances//J. Reine Angew. Math.- 1989.- 394.- PP. 168–179.
8. Korotyaev E.L. Resonances for 1D Stark operators// Journal Spectral Theory.-2017.- 7, №3.- PP. 633-658
9. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси// Функц. анализ и его прил., 2017.-51:1 с.82–98.
10. Гусейнов И.М., Ханмамедов А.Х. К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера с растущим потенциалом//, Укр. мат. журн.-2018.- 70, №10, с. 1390-1402.
11. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 827 с.
12. Титчмар Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т.1, Москва, 1960.
13. Marchenko V. A. Sturm–Liouville Operators and Applications, Basel, Birkheauser, 1986.

ARTAN POTENSİALLI ŞREDİNGER OPERATORUNUN SPEKTRİ HAQQINDA

N.Q.MƏMMƏDOVA, A.X.XANMƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Bütün oxda $L=-\frac{d^2}{dx^2}+|x|$ Şredinger operatoruna baxılmışdır. Bu operatorun spektri araşdırılmışdır. Məxsusi ədədlərin sonsuzluqdakı asimptotikası tapılmışdır.

Açar sözlər: Şredinger operatoru, Eyri tənliyi, Eyri funksiyası, məxsusi ədədlər.

ABOUT THE SPECTRUM OF THE OPERATOR SHREDINGER WITH GROWING POTENTIAL

N.G.MAMEDOVA, A.Kh.KHANMAMEDOV

SUMMARY

The Schrodinger operator on the entire axis is considered. The spectrum of the operator is investigated. An asymptotic formula for eigenvalues is obtained.

Keywords: Schrodinger operator, Airy equation, Airy functions, eigenvalues.

Поступила в редакцию: 15.03.2019 г.
Подписано к печати: 16.10.2019 г.