УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Р.К.ТАГИЕВ, Ш.И.МАГЕРРАМЛИ

Бакинский Государственный Университет

r.tagiyev@list.ru, semedli.shehla@gmail.com

В данной работе исследуется разрешимость начально-краевой задачи для одномерного линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием, содержащим интеграл от искомого решения. Доказано существование единственного обобщенного решения рассматриваемой задачи и исследовано ее гладкость.

Ключевые слова: параболическое уравнение, интегральное граничное условие, обобщенное решение

При математическом моделировании многочисленных процессов практики возникают краевые задачи с нелокальными граничными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных. Нелокальные граничные условия представляют соотношения, связывающие значения искомого решения в граничных и внутренних точках области. Среди нелокальных граничных условий особое место занимают интегральные условия. Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений с интегральными условиями изучены в работах [1-5] и др. Отметим, что такие краевые задачи в классах обобщенных решений наименее изучены.

В данной работе рассматривается одна нелокальная краевая задача для одномерного линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием. Это интегральное условие связывает значение производной искомого решения в граничной точке и значение решения во внутренних точках области. Доказано существование единственного обобщенного решения рассматриваемой нелокальной краевой задачи и исследовано гладкость обобщенного решения.

Постановка задачи

Рассмотрим в области $Q_T = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t \le T\}$ параболическое уравнение

$$u_t-\left(k(x,t)u_x\right)_x+q(x,t)u=f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T\,, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(0,t)=0,\ 0<t\le T, \tag{3}$$

$$k(l,t)u_x(l,t)=\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx,\quad 0<t\le T. \tag{4}$$

Здесь $k(x,t),\ q(x,t),\ f(x,t),\ \varphi(x),\ H(x,t)$ - заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$0<\nu\le k(x,t)\le\mu, \left|q(x,t)\right|\le\mu, \left|H(x,t)\right|\le\mu_1 \ \text{п.в.на}\ Q_T\,, \tag{5}$$

$$f(x,t)\in L_{2,1}(Q_T),\varphi(x)\in L_2(0,l), \tag{6}$$

где $\nu,\mu,\mu_1>0,$ - некоторые постоянные.

Определим обобщенное решение $u=u(x,t)$ задачи (1)-(4) из $V_2^{1,0}(Q_T)$ как элемент $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)=\left\{u:u\in V_2^{1,0}(Q_T),u(0,t)=0,0<t\le T\right\}$, удовлетворяющей интегральному тождеству

$$\int_{Q_T}(-u\eta_t+ku_x\eta_x+qu\eta)dxdt-\int_0^T\left[\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx\right]\eta(l,t)dt=$$

$$=\int_0^l\varphi\eta(x,0)dx+\int_{Q_T}f\eta dxdt\ . \tag{7}$$

при любой функции

$\eta=\eta(x,t)\in\hat{W}_{2,0}^{1,1}(Q_T)=\left\{\eta:\eta\in W_2^{1,1}(Q_T),\eta(0,t)=0,\right.$
$\left.0\le t\le T,\eta(x,T)=0,0\le x\le l\right\}.$

Разрешимость задачи (1)-(4)

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5),(6). Тогда задача (1)-(4) однозначно разрешима в классе $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$|u|_{Q_t}\equiv\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_t)}\le M_1\left[\|\varphi\|_{2,(0,l)}+2\|f\|_{2,1,Q_t}\right], \tag{8}$$

в котором положительная постоянная M_1 не зависит от φ и f .

Доказательство. Для доказательства используем метод Галеркина. Пусть $\{\psi_k(x)\}$ - произвольная фундаментальная система функций из

$W_{2,0}^1(0,l)=\{\psi:\psi\in W_2^1(0,l),\psi(0)=0\}$ и ортонормированная в $L_2(0,l)$.

Приближенные решения $u^N(x,t)$ задачи (1)-(4) будем искать в виде

$$u^N(x,t)=\sum_{m=1}^{N}c_m^N(t)\psi_m(x),$$

где $c_m^N(t)$ подлежать определению из условий:

$$\int_0^l u_t^N(x,t)\psi_k(x)dx+\int_0^l k(x,t)u_x^N(x,t)\psi_{kx}(x)dx+\int_0^l q(x,t)u^N(x,t)\psi_k(x)dx-$$

$$-\int_0^l H(x,t)u^N(x,t)dx\cdot\psi_k(l)=\int_0^l f(x,t)\psi_k(x)dx,\quad k=\overline{1,N},\tag{9}$$

$$c_k^N(0)=\int_0^l\varphi(x)\psi_k(x)dx,\quad k=\overline{1,N}.\tag{10}$$

Условия (9) представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dc_k^N(t)}{dt}+\sum_{m=1}^{N}A_{km}(t)c_m^N(t)+F_k(t)=0,\quad k=\overline{1,N},\tag{11}$$

где

$$A_{km}(t)=\int_0^l[k(x,t)\psi_{mx}(x)\psi_{kx}(x)+q(x,t)\psi_m(x)\psi_k(x)-H(x,t)\psi_m(x)\psi_k(l)]dx,\ k,m=\overline{1,N},$$

$$F_k(t)=-\int_0^l f(x,t)\psi_k(x)dx,\quad k=\overline{1,N}.$$

Из условий (5),(6) следует, что функции $A_{km}(t)$ и $F_k(t)$ суммируемы по t на $[0,T]$. Тогда по известной теореме из [6, с.27] заключаем, что задачи (11), (10) имеют единственное абсолютно непрерывное решение на $[0,T]$. Таким образом, функции $u^N(x,t)$ при любом N определяются однозначно.

Покажем, что для последовательности $\{u^N\}$ справедлива оценка

$$|u^N|_{Q_t}\le M_2\tag{12}$$

для всех $N=1,2,\ldots,$ где постоянная M_2 зависит только от входных данных и не зависит от N. Для этого умножим каждое из (9) на свое $c_k(t)$, полученные равенства просуммируем по k от 1 до N и результат проинтегрируем по t от 0 до $t\le T$. Тогда получим равенство

$$\frac{1}{2}\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{2,(0,l)} + \int\limits_{Q_t} k\left(u_x^N\right)^2 dxdt = \frac{1}{2}\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{2,(0,l)} - \int\limits_{Q_t} q\left(u^N\right)^2 dxdt + \int\limits_{Q_t} fu^N dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_t} H(x,t)u^N(x,t)u^N(l,t)dxdt. \qquad (13)$$

где $Q_t = \{(x,\tau): 0 < x < l, 0 < \tau \le t\}$.

Отметим, опираясь на [7, с.77], что для любой функции $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ справедливо неравенство

$$u^2(l,t) \le \int\limits_0^l \left[\varepsilon u_x^2(x,t) + c_\varepsilon u^2(x,t)\right]dx \qquad (14)$$

для почти всех $t \in [0,T]$, где $\varepsilon > 0$ - произвольное число, $c_\varepsilon = c\left(\frac{c}{4\varepsilon} + 1\right), c > 0$ - постоянная в неравенстве (6.23) из [7, с.77].

Тогда используя условия (5), очевидное неравенство $ab \le \left(a^2 + b^2\right)/2$ и (14) при $\varepsilon = \frac{\nu}{l}$ из (13) получим неравенства

$$\frac{1}{2}\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{2,(0,l)} + \nu\left\|u_x^N\right\|^2_{2,Q_t} \le \frac{1}{2}\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{2,(0,l)} + \mu\left\|u^N\right\|^2_{2,Q_t} + \|f\|_{2,1,Q_t}\max_{0\le\tau\le t}\left\|u^N(x,\tau)\right\|_{2,(0,l)} +$$

$$+\frac{1}{2}\left\|Hu^N\right\|^2_{2,Q_t} + \frac{l}{2}\int\limits_0^t\left(u^N(l,t)\right)^2 dt \le \frac{1}{2}\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{2,(0,l)} + \frac{\nu}{2}\left\|u_x^N\right\|^2_{2,Q_t} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\mu_1^2 + ld + 2\mu\right)\left\|u^N\right\|^2_{2,Q_t} + \|f\|_{2,1,Q_t}\max_{0\le\tau\le t}\left\|u^N(x,\tau)\right\|_{2,(0,l)}, \qquad (15)$$

где $d = c\left(\frac{cl}{4\nu} + 1\right)$.

Примем обозначение $y^N(t) = \max\limits_{0\le\tau\le t}\left\|u^N(x,\tau)\right\|_{2,(0,l)}$. Очевидно, что

$$\left\|u^N\right\|^2_{2,Q_t} \le t\left(y^N(t)\right)^2, \quad \left\|u^N(x,0)\right\|_{2,(0,l)} \le \|\varphi\|_{2,(0,l)},$$

$$\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{2,(0,l)} \le y^N(t)\left\|u^N(x,0)\right\|_{2,(0,l)}. \qquad (16)$$

Умножая обе части неравенства (15) на 2 и учитывая (16) имеем

$$\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{2,(0,l)} + \nu\left\|u_x^N\right\|^2_{2,Q_t} \le y^N(t)\|\varphi\|_{2,(0,l)} +$$

$$+\left(\mu_1^2 + ld + 2\mu\right)t\left(y^N(t)\right)^2 + 2\|f\|_{2,1,Q_t}\, y^N(t) \qquad (17)$$

Тогда из (17), как было доказано в работе [7, с.167], следует неравенство

$$\left|u^N\right|_{Q_t} \le c(t)\left[\|\varphi\|_{2,(0,l)} + 2\|f\|_{2,1,Q_T}\right], \tag{18}$$

справедливое для любого t из $[0,T]$. Функция $c(t)$ определяется величиной T и постоянными ν, μ, μ_1, l, c.
Следовательно, справедлива оценка (12).

В силу (12) из последовательности $\{u^N\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u^{N_m}\}$, которая сходится к некоторой функции $u \in W_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ слабо в $L_2(Q_T)$ вместе с производными $\{u_x^{N_m}\}$ и сходится к u слабо в $L_2(0,l)$ равномерно относительно $t \in [0,T]$. Без ограничения общности будем считать, что вся последовательность $\{u^N\}$ сходится к u таким образом. В силу известного свойства слабой сходимости для предельной функции u сохранится неравенство (18) и, следовательно, u будет элементом $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$. Кроме того, для функции u будет справедлива оценка (8). Покажем, что предельная функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет тождеству (7), т.е. является обобщенным решением задачи (1)-(4). Для этого возьмем произвольные абсолютно непрерывные функции $d_k(t), k = \overline{1,N}$ с $d_k'(t)$ из $L_2(0,T)$ и равные нулю при $t = T$. Умножим каждое уравнение (9) для $u^N = u^{N_m}$ на свою функцию $d_k(t)$, полученные равенства сложим по всем k от 1 до N и результат проинтегрируем по t от 0 до T. Это дает тождество

$$\int_{Q_T}\left(-u^{N_m}\Phi_t^N + ku_x^{N_m}\Phi_x^N + qu^{N_m}\Phi^N\right)dxdt - \int_0^T\left[\int_0^l H(x,t)u^{N_m}(x,t)dx\right]\Phi^N(l,t)dt =$$

$$= \int_0^l u^{N_m}(x,0)\Phi^N(x,0)dx + \int_{Q_T} f\Phi^N dxdt,$$

$$\text{где } \Phi^N(x,t) = \sum_{k=1}^N d_k(t)\psi_k(x). \tag{19}$$

Если перейти к пределу по выбранной подпоследовательности $\{u^{N_m}\}$ в равенстве (19) получим интегральное тождество

$$\int_{Q_T}\left(-u\Phi_t^N+ku_x\Phi_x^N+qu\Phi^N\right)dxdt-\int_0^T\left[\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx\right]\Phi^N(l,t)dt=$$

$$=\int_0^l \varphi(x)\Phi^N(x,0)dx+\int_{Q_T} f\Phi^N dxdt, \tag{20}$$

которое справедливо для любой функции $\Phi^N(x,t)$ представимой в виде $\Phi^N(x,t)=\sum_{k=1}^N d_k(t)\psi_k(x)$.

Обозначим через Ω_N множество всех функций представимых в виде $\Phi^N(x,t)=\sum_{k=1}^N d_k(t)\psi_k(x)$. Семейство функций $\bigcup_{p=1}^{\infty}\Omega_p$ всюду плотно в $\hat{W}_{2,0}^1(Q_T)$. Пусть функция $\eta=\eta(x,t)$ является пределом последовательности $\{\Phi^N\}$ из $\bigcup_{p=1}^{\infty}\Omega_p$ в норме $W_2^{1,1}(Q_T)$. Покажем, что справедливо равенство

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T\left[\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx\right]\Phi^N(l,t)dt=\int_0^T\left[\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx\right]\eta(l,t)dt\,. \tag{21}$$

Согласно теореме о следах [8, с.140] имеет место неравенство

$$\left\|\Phi^N(l,t)-\eta(l,t)\right\|_{2,(0,T)}\le M_3\left\|\Phi^N(x,t)-\eta(x,t)\right\|_{2,Q_T}^{(1,1)}, \tag{22}$$

где постоянная $M_3>0$ не зависит от N.

Тогда используя неравенство Коши-Буняковского, условию (5) для функции $H(x,t)$, оценки (8) и неравенство (22) имеем

$$\left|\int_0^T\left(\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx\right)\left[\Phi^N(l,t)-\eta(l,t)\right]dt\right|\le$$

$$\le\left\{\int_0^T\left(\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx\right)^2dt\right\}^{1/2}\left\{\int_0^T\left[\Phi^N(l,t)-\eta(l,t)\right]^2dt\right\}^{1/2}\le$$

$$\le\mu_1\sqrt{l}\|u\|_{2,Q_T}\cdot M_3\left\|\Phi^N-\eta\right\|_{2,Q_T}^{(1,1)}\le\mu_1\sqrt{l}M_1M_3\left[\|\varphi\|_{2,(0,l)}+2\|f\|_{2,1,Q_T}\right]\cdot\left\|\Phi^N-\eta\right\|_{2,Q_T}^{(1,1)}\to 0,$$

при $N\to\infty$. Следовательно, справедливо равенство (21).

Тогда при переходе к переделу при $N\to\infty$ в равенстве (20) получим, что оно выполняется для любого $\eta\in\hat{W}_{2,0}^1(Q_T)$. Поэтому функция $u(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (7) из определения обобщенного решения задачи (1)-(4). Следовательно, обобщенное решение задачи (1)-(4) существует.

Покажем, что задача (1)-(4) не может имет двух различных обобщенных решений из класса $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$. Действительно, если бы она имела два таких решений u_1 и u_2, то их разность $u = u_1 - u_2$ была бы обобщенным решением задачи (1)-(4) из класса $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$, соответсвующим функциям $\varphi = 0$, $f = 0$. Тогда согласно (8) для функции u имеем оценку: $|u|_{Q_T} \leq 0$, что означает совподение решений u_1 и u_2. Теорема 1 доказана.

Гладкость обобщенного решения

Покажем, что при несколько более сильных предположения о данных задачи (1)-(4) обобщенные решения из $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ принадлежат $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$. Пусть помимо условий (5) и (6) выполняются следующие условия:

$$|k_t(x,t)| \leq \mu_2, |H_t(x,t)| \leq \mu_3 \text{ п.в.на } Q_T, \tag{23}$$

$$\varphi(x) \in W_2^1(0,l), \ f(x,t) \in L_2(Q_T), \tag{24}$$

где $\mu_2, \mu_3 > 0$ - некоторые постоянные.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (5), (6), (23), (24). Тогда задача (1)-(4) однозначно разрешима в классе $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_x(x,t)\|_{2,(0,l)}^2 + \|u_t\|_{2,Q_T}^2 \leq M_4 \left[\left(\|\varphi\|_{2,(0,l)}^{(1)} \right)^2 + \|f\|_{2,Q_T}^2 \right], \tag{25}$$

где постоянная M_4 не зависит от φ и f.

Доказательство. Для доказательства снова используем метод Галеркина. Каждое из уравнений (9) умножим на свое $\frac{dc_k^N(t)}{dt}$, все полученные равенства сложим по k от 1 до N и интегрируем по t от нуля до t. Это дасть соотношение

$$\int_{Q_t} \left[\left(u_t^N\right)^2 + ku_x^N u_{tx}^N + qu^N u_t^N \right] dxdt - \int_{Q_t} H(x,t) u^N(x,t) u_t^N(l,t) dxdt = \int_{Q_t} fu_t^N dxdt. \tag{26}$$

Используя формулы интегрирования по частям получаем следующие равенства:

$$\int\limits_{Q_t} k u_x^N u_{tx}^N dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_0^l k\left(u_x^N\right)^2\Big|_{t=0}^{t=t} dx - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_t} k_t\left(u_x^N\right)^2 dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_t} H(x,t)u^N(x,t)u_t^N(l,t)dxdt = \int\limits_0^l H(x,t)u^N(x,t)u^N(l,t)\Big|_{t=0}^{t=t} dx -$$

$$-\int\limits_{Q_t}\left[H(x,t)u_t^N(x,t) + H_t(x,t)u^N(x,t)\right]u^N(l,t)dt.$$

Подставляя эти равенства в (26), получим соотношение

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l k\left(u_x^N\right)^2 dx + \int\limits_{Q_t}\left(u_t^N\right)^2 dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_0^l k(x,0)\left(u_x^N(x,0)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_t} k_t\left(u_x^N\right)^2 dxdt -$$

$$-\int\limits_{Q_t} q u^N u_t^N dxdt + \int\limits_0^l H(x,t)u^N(x,t)u^N(l,t)dx - \int\limits_0^l H(x,0)u^N(x,0)u^N(l,0)dx -$$

$$-\int\limits_{Q_t}\left[H(x,t)u_t^N(x,t) + H_t(x,t)u^N(x,t)\right]u^N(l,t)dt + \int\limits_{Q_t} f u_t^N dxdt.$$

Отсюда в силу условий (5), (23) и “неравенства Коши с ε” [7, с.33] выведем такое неравенство

$$\frac{\nu}{2}\left\|u_x^N(x,t)\right\|_{2,(0,l)}^2 + \left\|u_t^N\right\|_{2,Q_t}^2 \le \frac{\mu}{2}\left\|u_x^N(x,0)\right\|_{2,(0,l)}^2 + \frac{\mu_2}{2}\left\|u_x^N\right\|_{2,Q_t}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2}\|f\|_{2,Q_t}^2 +$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|u_t^N\right\|_{2,Q_t}^2 + \mu\left[\frac{\varepsilon_2}{2}\left\|u^N\right\|_{2,Q_t}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2}\left\|u_t^N\right\|_{2,Q_t}^2\right] +$$

$$+\mu_1\left[\frac{\varepsilon_3}{2}\left\|u^N(x,t)\right\|_{2,(0,l)}^2 + \frac{l}{2\varepsilon_3}\left(u^N(l,t)\right)^2\right] + \mu_1\left[\frac{1}{2}\left\|u^N(x,0)\right\|_{2,(0,l)}^2 + \frac{l}{2}\left(u^N(l,0)\right)^2\right] +$$

$$+\mu_1\left[\frac{\varepsilon_4}{2}\left\|u_t^N\right\|_{2,Q_t}^2 + \frac{l}{2\varepsilon_4}\int\limits_0^t\left(u^N(l,t)\right)^2 dt\right] + \mu_3\left[\frac{1}{2}\left\|u^N\right\|_{2,Q_t}^2 + \frac{l}{2}\int\limits_0^t\left(u^N(l,t)\right)^2 dt\right]. \quad (27)$$

Далее для оценки $\left(u^N(l,t)\right)^2$ и $\left(u^N(l,0)\right)^2$ используем неравенство (14) и приведем подобные члены. Тогда из (27) выведем неравенство

$$\left(\frac{\nu}{2} - \frac{\mu_1 l\varepsilon}{2\varepsilon_3}\right)\left\|u_x^N(x,t)\right\|_{2,(0,l)}^2 + \left(1 - \frac{\mu}{2\varepsilon_2} - \frac{1}{2\varepsilon_1} - \frac{\mu_1\varepsilon_4}{2}\right)\left\|u_t^N\right\|_{2,Q_t}^2 \le$$

$$\le\left(\frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_1 l c_\varepsilon}{2}\right)\left\|u^N(x,0)\right\|_{2,(0,l)}^2 + \left(\frac{\mu}{2} + \frac{\mu_1 l\varepsilon}{2}\right)\left\|u_x^N(x,0)\right\|_{2,(0,l)}^2 +$$

$$+\left(\frac{\mu\varepsilon_2}{2}+\frac{\mu_1 lc_\varepsilon}{2\varepsilon_4}+\frac{\mu_3}{2}+\frac{\mu_3 lc_\varepsilon}{2}\right)\left\|u^N\right\|^2_{2,Q_t}+\left(\frac{\mu_1 lc_\varepsilon}{2\varepsilon_3}+\frac{\mu_1\varepsilon_3}{2}\right)\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{2,(0,l)}+$$

$$+\left(\frac{\mu_2}{2}+\frac{\mu_1 l\varepsilon}{2\varepsilon_4}+\frac{\mu_3 l\varepsilon}{2}\right)\left\|u_x^N\right\|^2_{2,Q_t}, \qquad (28)$$

где $\varepsilon, \varepsilon_i > 0,\, i=\overline{1,4}$ - произвольное константы.

Возьмем $\varepsilon=\frac{\nu}{4},\quad \varepsilon_1=4,\ \varepsilon_2=4\mu,\ \varepsilon_3=\frac{\mu_1 l}{2},\ \varepsilon_4=\frac{1}{\mu_1}$. Тогда (28) преобразуется в следующее неравенство:

$$\nu\left\|u_x^N(x,t)\right\|^2_{2,(0,l)}+\left\|u_t^N\right\|^2_{2,Q_t}\le 2\mu_1(1+lc_\varepsilon)\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{2,(0,l)}+\left(2\mu+\frac{\mu_1 l\nu}{2}\right)\left\|u_x^N(x,0)\right\|^2_{2,(0,l)}+$$

$$+2\left(4\mu^2+\mu_1^2 lc_\varepsilon+\mu_3+\mu_3 lc_\varepsilon\right)\left\|u^N\right\|^2_{2,Q_t}+\left(2\mu_2+\frac{\mu_1^2 l\nu}{2}+\frac{\mu_3 l\nu}{2}\right)\left\|u_x^N\right\|^2_{2,Q_t}+$$

$$+\left(4c_\varepsilon+\mu_1^2 l\right)\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{2,(0,l)}+8\|f\|^2_{2,Q_t}. \qquad (29)$$

Тогда используя оценки (18) из (29) выведем оценку

$$\max_{0\le t\le T}\left\|u_x^N(x,t)\right\|^2_{2,(0,l)}+\left\|u_t^N\right\|^2_{2,Q_T}\le M_4\left[\left(\|\varphi\|^{(1)}_{2,(0,l)}\right)^2+\|f\|^2_{2,Q_T}\right]. \qquad (30)$$

Таким образом, для галеркинских приближений u^N верна оценка (30) с константой M_4, не зависящей от номера приближений. Из (30) следует, что предельная для $\{u^{N_m}\}$ функция u будет иметь производную u_t из $L_2(Q_T)$, т.е. будет элементом пространства $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$. Кроме того, в силу (12) и (30) подпоследовательность $\{u^{N_m}\}$ сходится к функции u слабо в $L_2(Q_T)$ вместе с производными $\{u_x^{N_m}\}$, $\{u_t^{N_m}\}$, а подпоследовательности $\{u^{N_m}\}$, $\{u_x^{N_m}\}$ сходятся к u, u_x слабо в $L_2(0,l)$ равномерно относительно $t\in[0,T]$. В силу известного свойства слабой сходимости для предельной функции u сохранится неравенство (30) и следовательно будет верна оценка (25). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводимости с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения, 1977, т.13, №2, с.294-304.
2. Муравей Л.А., Филиновский А.В. Об одной нелокальной краевой задаче для парабо-

лического уравнения // Мат. заметки, 1993, т.54, №4, с.98-116.
3. Иванчов Н.И Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения, 2004, т.40, №4, с.547-564.
4. Кожанов А.И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та, Сер. физико-математические науки, 2004, №30, с.63-69.
5. Данилкина О.Ю. Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та, Сер. физико-математические науки, 2007, №1(14), с.5-9.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 4-е изд. М.: Наука, 1974, 331 с.
7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
8. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976, 391 с.

İNTEQRAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ BİRÖLÇÜLÜ XƏTTİ PARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BAŞLANĞIC-SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLOLUNANLIĞI HAQQINDA

R.Q.TAĞIYEV, Ş.İ.MƏHƏRRƏMLİ

XÜLASƏ

Bu işdə axtarılan həldən asılı inteqralın daxil olduğu inteqral sərhəd şərtli birölçülü parabolik tənlik üçün başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllolunanlığı tədqiq olunur. Baxılan məsələnin yeganə ümumiləşmiş həllinin varlığı isbat edilmiş və onun hamarlığı tədqiq olunmuşdur.

Açar sözlər: parabolik tənlik, inteqral sərhəd şərti, ümumiləşmiş həll

ON SOLVABILITY OF THE INITIAL-EDGE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL LINEAR PARABOLIC EQUATION WITH AN INTEGRAL BOUNDARY CONDITION

R.K.TAGIEV, SH.I.MAGERRAMLI

SUMMARY

In this paper, we investigate the solvability of the initial-boundary value problem for a one-dimensional linear parabolic equation with an integral boundary condition containing the integral of the desired solution. The existence of a unique generalized solution of the considered problem is proved and the smoothness of solution is investigated.

Keywords: parabolic equation, integral boundary condition, generalized solution

Поступила в редакцию: 30.09.2019 г.
Подписано к печати: 16.10.2019 г.