BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

УДК 517.977

УРАВНЕНИЕ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Т.М.ГАСЫМОВ, Х.Т.ГУСЕЙНОВА
Бакинский Государственный Университет
telman@box.az

При исследовании ряда задач, описывающих процесс гашения пульсаций потоков газа или жидкости в длинных трубопроводах, в процессах гашения отклонения в некоторой колебательной среде, возникает задача оптимального управления для одномерной краевой задачи с нелокальными граничными условиями для гиперболического уравнения.

В данной работе исследуется управление с минимальной энергией для уравнения колебания струны с неклассическими краевыми условиями.

Ключевые слова: оптимальное управление, процесс гашения, краевая задача, гиперболическое уравнение.

Пусть управляемый процесс описывается функцией $z(x,t)$, которая внутри области $Q=[0\le x\le 1,\ 0\le t\le T]$ удовлетворяет уравнению

$$z_{tt}=a^2 z_{xx}+b(t)\,p(x)\,, \tag{1}$$

а на границе Q удовлетворяет начальному и граничному условиям

$$z(x,0)=\varphi(x),\ \ z_t(x,0)=\psi(x)\,, \tag{2}$$

$$z(0,t)=0,\quad z_x(0,t)=z_x(1,t)\,, \tag{3}$$

где $b(t)\in L_2(0,T),\ \varphi(x)\in W_2^1(0,1),\ \varphi(0)=0, \psi(x)\in L_2(0,1)$ - заданная функция, а $p(x)$ - управляющая функция.

В дальнейшем, в качестве допустимого управления $p(x)$ будем рассматривать функции из пространства $L_2(0,1)$.

При заданных допустимых управлениях $z(x,t)$ и функций $\varphi(x)\in W_2^1(0,1)$, $\varphi(0)=0, \psi(x)\in L_2(0,1)$, $b(t)\in L_2(0,T)$, под обобщенным решением задачи (1)-(3) понимается функция $z(x,t)\in W_2^1(Q)$, $z(x,0)=\varphi(x)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству [3]:

$$\iint_Q [z_t(x,t)\Phi_t(x,t) - z_x(x,t)\Phi_x(x,t) + b(t)p(x)\Phi(x,t)]dxdt +$$

$$+\int_0^1 \psi(x)\Phi(x,0)dx = 0 \tag{4}$$

при любой $\Phi(x,t)\in W_2^1(Q)$, $\Phi(1,t)=\Phi(0,t)$, $\Phi(x,T)=0$.

Для нахождения обобщенного решения задачи (1)-(3) применим метод, используемый в работе $[2]$. Тогда будем иметь:

$$z(x,t) = \int_0^1 G_t(x,s,t)\varphi(s)ds + \int_0^1 G(x,s,t)\psi(s)ds +$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G(x,s,t-\tau)b(\tau)p(s)\varphi(s)dsd\tau, \tag{5}$$

$$G(x,s,t) = tY_0(s)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k} + Y_{2k}(s) +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}t\cos\sqrt{\lambda_k}t - \frac{1}{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right)Y_{2k-1}(s)\right]X_{2k}(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}tY_{2k-1}(s)X_{2k-1}(x),\ \lambda_k=(2\pi k)^2,\ k=1,2,3,..., \tag{6}$$

где системы

$$X_0(x)=x,\ X_{2k-1}(x)=x\cos\sqrt{\lambda_k}x,\ X_{2k}(x)=\sin\sqrt{\lambda_k}x$$

являются собственными и присоединенным и функциями краевой задачи $[2]$:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ X(0)=0,\ X'(0)=X'(1).$$

Система

$$Y_0(x)=2,\ Y_{2k-1}(x)=4\cos\sqrt{\lambda_k}x,\ Y_{2k}(x)=4(1-x)\sin\sqrt{\lambda_k}x$$

являются собственными и присоединенным и функциями краевой задачи.

Пусть $a(x)$ - заданная функция из $L_2(0,1)$. В выбранном классе допустимых управлений требуется указать уравнение $P_0(x)$ такое, чтобы соответствующее ему решение $z(x,t)$ задачи (1)-(3), представленное в форме (5), удовлетворяло условию

$$z(x,T)=a(x), \tag{7}$$

и при этом функционал

$$J(p)=\|p\|^2_{L_2(0,1)}=\int_0^1 p^2(x)dx = p_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}p_{2k}^2+\sum_{k=1}^{\infty}p_{2k-1}^2, \tag{8}$$

принимал наименьшее возможное значение, где

$$P_k = \int_0^1 p(x) Y_k(x) dx, \quad k = 0,1,2,\ldots \,. \tag{9}$$

Так как, по предположению, $a(x) \in L_2(0,1)$, то в самом общем случае, условие (7) нужно понимать в том смысле, что

$$\lim \int_0^1 [z(x, T - \Delta t) - a(x)]^2 dx = 0 \,.$$

Возьмем произвольное допустимое управление. Соответствующее ему решение задачи (1)-(3) представим в виде (5). Тогда условие(7) можно записать в виде

$$\int_0^T \int_0^1 G(x, s, T - \tau) b(\tau) p(s) ds d\tau = A(x), \tag{10}$$

где

$$A(x) = a(x) - \int_0^1 G_t(x, s, T) \varphi(s) ds + \int_0^1 G(x, s, T) \psi(s) ds \,.$$

Так как последовательность функций $X_0(x) = x,\ X_{2k-1}(x) = x \cos\sqrt{\lambda_k}\, x,$ $X_{2k}(x) = \sin\sqrt{\lambda_k}\, x$, $k = 1,2,3,\ldots$ образует базис в пространстве функций $L_2(0,1)$ $[2]$; то

$$A(x) = A_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{2k} X_{2k}(x) + A_{2k-1} X_{2k-1}(x)), \tag{11}$$

где

$$A_k = \int_0^1 A(x) Y_k(x) dx, \quad k = 1,2,3,\ldots \,. \tag{12}$$

Подставляя функцию (1) в уравнение (10) и учитывая (6), получаем

$$p_0 \int_0^T (T - \tau) b(\tau) d\tau = A_0, \tag{13}$$

$$p_{2k-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T \sin\sqrt{\lambda_k} (T - \tau) b(\tau) d\tau = A_{2k-1}, \tag{14}$$

$$p_{2k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T \sin\sqrt{\lambda_k} (T - \tau) b(\tau) d\tau + p_{2k-1} \int_0^T \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (T - \tau) \sqrt{\lambda_k} \cos(T - \tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_k} \sin\sqrt{\lambda_k} (T - \tau) \right] b(\tau) d\tau = A_{2k}, \quad k = 1,2,3,\ldots \,. \tag{15}$$

Теперь обозначим:

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T \sin\sqrt{\lambda_k}(T-\tau) b(\tau) d\tau, \ k = 1,2,3,...,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T (T-\tau) \cos\sqrt{\lambda_k}(T-\tau) b(\tau) d\tau, \ k = 1,2,3,.... \qquad (17)$$

Подставляя (16),(17) в соотношение (14),(15) из (13)-(15), получаем:

$$p_0 = \frac{A_0}{\int_0^T (T-\tau) b(\tau) d\tau}, \ p_{2k-1} = \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k},$$

$$p_{2k} = \frac{A_{2k}}{\alpha_k} + \frac{A_{2k-1}\beta_k}{\alpha_k^2} + \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k\sqrt{\lambda_k}}, \quad k = 1,2,3,... \ .$$

Теорема 1. Пусть управляемый процесс описывается задачей (1)-(3) и $b(t) \in L_2(),T)$, $\varphi(x) \in W_2^1(0,1), \varphi(0) = 0, \psi(x) \in L_2(0,1), a(x) \in L_2(0,1)$. Тогда задача об управлении с минимальной энергией имеет единственное решение, и оптимальное управление представимо в виде:

$$p(x) = p_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k}^2 X_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k-1}^2 X_{2k-1}(x) = \frac{A_0}{\int_0^T (T-\tau) b(\tau) d\tau} X_0(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k} X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_{2k}}{\alpha_k} - \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k^2}\beta_k + \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k\sqrt{\lambda_k}} \right] X_{2k}(x).$$

Соответствующее минимальное значение функционала вычисляется по формуле [1]:

$$J = p_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k-1}^2 = \left[\frac{A_0}{\int_0^T (T-\tau) b(\tau) d\tau} \right]^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_{2k}}{\alpha_k} - \frac{A_{2k-1}\beta_k}{\alpha_k^2} + \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k\sqrt{\lambda_k}} \right]^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978, 464 с.
2. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // ДУ, 1977, т.13, №2, с.294-304.
3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 279 с.
4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 416 с.

KLASSİK OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ SİMİN QEYRİ-BİRCİNS RƏQS TƏNLİYİ ÜÇÜN MİNİMAL ENERJİLİ İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ

T.M.QASIMOV, X.T.HÜSEYNOVA

XÜLASƏ

Uzun borukeçiricilərdə qaz və maye oxunun pulsasiyasının söndürülməsi prosesində, müəyyən rəqs edən mühitlərdə kənara çıxmaların söndürülməsi proseslərində qeyri-lokal sərhəd şərtli hiperbolik tip tənliklər üçün idarəetmə məsələləri meydana çıxır.

İşdə bir hiperbolik tip tənlik üçün minimal enerjili idarəetmə məsələsinə baxılır.

Açar sözləri: optimal idarəetmə, söndürülmə prosesi, sərhəd məsələsi, hiperbolik tənliklər.

A CONTROL PROBLEM WITH A MINIMAL ENERGY FOR NONHOMOGENEOUS STRING VIBRATION WITH NONCLASSICAL BOUNDARY CONDITION

T.M.GASIMOV, Kh.T.GUSEYNOVA

SUMMARY

While investigating a series of problems describing the dampening process of gas or liquid flow pulsations in long pipelines, in the process of deviation dampening in some vibrating medium there arises a control problem for non-local boundary conditions for a hyperbolic equation.

In this paper we study the controllability problem for the hyperbolic type equation.

Key words: optimal control, quenching process, boundary problem, hyperbolic equation.

Поступила в редакцию: 18.03.2019 г.
Подписано к печати: 16.10.2019 г.