

## MEXANİKA

UOT 539.21

İDEAL SIXILMAYAN MAYENİN  
ELASTİKİ BORUDA PULSASIYALI HƏRƏKƏTİ

A.B.ƏLİYEV, K.R.RƏHİMOVA, T.M.MAHMUDZADƏ

*Bakı Dövlət Universiteti*  
*alialiev.b@gmail.com*

*Bu işdə boru və ətraf mühiti ayıran sərhəddə elastiki sürtünmənin ox boyu koordinatlardan asılı olan ideal sıxılmayan mayenin pulsasiyalı axını haqqında məsələyə baxılır. Xüsusi hallarda ölçüsüz sərtlik parametrlərinin dalğa xüsusiyyətlərinə (xarakteristikalarına) təsiri müəyyənləşdirilir.*

**Açar sözlər:** xarici sərtlik, müntəzəm Şturm-Luivill məsələsi, Veyerştras xüsusiyyəti, dalğa sürəti, sönmə.

Deformasiya olunan borularda axıdılan mayedə dalğaların yayılması məsələsi bir çox cəhətdən maraqlıdır. Nəzəri cəhətdən bu riyazi-fizikanın məsələsi, tətbiqi cəhətdən isə dinamik təsirə məruz qalan bir sistemin hesablamalı olduğu məsələdir. Bu günə qədər L.Eyler, İ.Qromeki, N.Jukovskinin əsas əsərlərində tədqiq olunmuş belə məsələlər hidroelastikliyin geniş yayılmış sahəsini təşkil edir. [1],[2],[3],[4]. Lakin ətraf mühitin sərtliyini nəzərə alaraq bir sıra xüsusiyyətlər kifayət qədər öyrənilməmişdir. Bu baxımdan hazırkı iş xarici sərtlik ox boyu koordinatların funksiyası olduqda sabit dairəvi kəsikli elastiki boruda axan ideal mayedə kiçik amplitudlu dalğaların yayılmasının birölçülü məsələsinin formalaşdırılması və riyazi əsaslandırılmasına həsr olunmuşdur. Məsələ Şturm-Luivill müntəzəm sərhəd məsələsinin həllinə gətirilir. Xüsusi halda, sərtlik sabit olduqda dalğa sürəti və sönmənin müəyyən edilməsi üçün formullar əldə edilir.

1. Mexanikanın bir çox məsələlərində deformasiyalanan sistemin xüsusiyyətlərini əhatə olunduğu mühitlə-maye ilə qarşılıqlı təsirdə öyrənmək lazım gəlir. Bu məsələdə sistemin xarakteristik xüsusiyyətlərini nəzərə alaraq, özlü maye və boru kimi sadə modeli təhlil etmək lazımdır. Buna görə də burada radiusu  $R$ , uzunluğu  $l$  və qalınlığı  $h$  olan nazik divarlı elastiki boruda ideal sı-

xılmayan mayenin axınıni təsvir edən tənliklər quraq. Hərəkətin hidrodinamik və kəsilməzlik tənliyi aşağıdakı kimi olacaq: [1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

Burada  $p(x,t)$ -hidrodinamik təzyiq,  $u(x,t)$ -maye axınının ox boyu sürəti,  $\rho$  - sıxlıq,  $w(x,t)$ -divarın radial yerdəyişməsi,  $x \in [0,l]$ -ox boyu koordinatdır. Bu yanaşmada  $R \ll l$  bərabərsizliyi nəzərə alınır. Divarın ətalətinə baxmayaraq, yaza bilərik: [4]

$$\sigma = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2} w$$

Burada  $E$  -elastiklik modulu,  $\nu$ -Puasson əmsalıdır. Daha sonra nəzərə alırıq ki,  $\sigma$  kəmiyyəti 2 növ gərginlikdən ibarətdir:  $p$  – hidrodinamik və  $-G \frac{\partial w}{\partial t}$  - xarici mühit sərtliyinin yaratdığı gərginlik;

$$\sigma = p - G \frac{\partial w}{\partial t}$$

Əgər burada  $G = G(x) = G_0 g(x) \frac{\partial w}{\partial t}$  qəbul etsək, onda alırıq:

$$p = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} w + G_0 g(x) \frac{\partial w}{\partial t}\quad (2)$$

Beləliklə, qapalı hidroelastiki tənliklər sistemi (1) və (2) ilə təsvir olunur. Sonrakı mülahizələrdə tənliklərdəki funksiyaların hamarlıq şərtlərini ödədiklərini qəbul edəcəyik. Əgər (1) və (2) tənliklərini birləşdirsək və

$$c_0^2 = \frac{E}{2\rho}, \quad \eta = \frac{h}{R} (1-\nu^2)^{-1}$$

işarələməsini daxil etsək,  $w$  ilə bağlı alırıq:

$$c_0^2 \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{RG_0}{2\rho} g''(x) \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{RG_0}{\rho} g'(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{RG_0}{2\rho} g(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\quad (3)$$

Burada  $g(x) = 1$  qiyməti bircins xarici sərtlik halına uyğundur.

**2.** Dəyişənlərinə ayırma üsulunu tətbiq edərək (3) tənliyini adi diferensial tənlik kimi həll edirik.  $w$  funksiyasının zamanla artan  $\exp(i\omega t)$  ilə mütənasib olduğunu fərz etsək, yaza bilərik:

$$w = w_1(x) \exp(i\omega t)\quad (4)$$

Burada  $\omega$  – bucaq tezliyinin həqiqi qiyməti,  $w_1$  – istənilən funksiyadır. (4)-ü (3)-də yerinə yazsaq, aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$w_1'' + \mu_1(x)w_1' + \mu_2(x)w_1 = 0 \quad (5)$$

Burada

$$\mu_1(x) = \frac{2ig_0g'(x)}{\eta + ig_0g(x)}$$

$$\mu_2(x) = \frac{\omega^2/c_0^2 + ig_0g''(x)}{\eta + ig_0g(x)},$$

$g_0 = \omega R \frac{G_0}{E}$  – ölçüsüz sərtlik parametridir. Ştrixlər isə  $x$ -ə nəzərən diferensiallamayı göstərir. Luivill əvəzləməsindən istifadə edərək, [5]

$$y = w_1 \exp \frac{1}{2} \int \mu_1(x) dx = \lambda(x)w_1 \quad (6)$$

dalğa tənliyini aşağıdakı formada alırıq:

$$y'' + I(x)y = 0 \quad (7)$$

Burada  $I(x)$  – invariant olub

$$I(x) = \mu_2(x) - \frac{1}{4}\mu_1^2(x) - \frac{1}{2}\mu_1'(x) \quad (8)$$

kimi təyin edilir. (7) tənliyini

$$q(x) = 1 - \frac{I(x)}{\delta^2}$$

əvəzləməsinin köməyi ilə çevirsək, qoyulmuş məsələnin tənliyini aşağıdakı kimi alırıq:

$$y'' + \delta^2 y = \delta^2 q(x)y \quad (9)$$

$q(x)$  potensialı üçün inteqrallama şərtini yazaq:

$$\int_0^l |q(x) dx| < +\infty \quad (10)$$

$g(x)=1$  olduqda (9) tənliyində  $I(x)$  – in qiyməti  $\delta^2$  ilə ifadə olunur. Buna görə də (8)-ə uyğun olaraq

$$\delta^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} (\eta + ig_0)^{-1}$$

Burada ifadəni kvadrat kökdən azad etsək,  $\delta = \delta_0 - i\delta_1$  alırıq. Bu ifadədə

$$\delta_0 = \frac{\omega/c_0\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta^2 + g_0^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + g_0^2/\eta^2} + 1}{2}}$$

$$\delta_1 = \frac{\omega/c_0\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta^2 + g_0^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + g_0^2/\eta^2} - 1}{2}} \quad (11)$$

(9) tənliyinə  $x = 0$  və  $x = l$  olduqda sərhəd şərtləri də əlavə olunmalıdır.

Beləliklə, məsələnin həlli müntəzəm Şturm-Luivill sərhəd məsələsinin həllinə gətirildi.

3. Baxılan (9) tənliyi sağ tərəfi qeyri-bircins tənlik olduğundan sabitlərin varyasiyası metodunu tətbiq edərək onu inteqral tənliyin həllinə gətiririk:

$$y = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \delta \int_x^l \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y(\xi) d\xi \quad (12)$$

Burada  $\alpha_1, \alpha_2$  – müvafiq sərhəd şərtləri əsasında müəyyən olunacaq inteqral sabitləridir. (12) tənliyi Volterin inteqral tənliyi olub, ardıcıl yaxınlaşma metodu ilə həll edilir. Əgər

$$y_0 = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x}$$

işarələməsini qəbul etsək, onda  $n \geq 1$  üçün alarıq:

$$y_n = y_0 + \delta \int_x^l \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y_{n-1}(\xi) d\xi$$

(10) bərabərsizliyinə əsasən Veyerştras xüsusiyyətini nəzərə alaraq [6], [7] (12) ilə ifadə edilən inteqral tənliyin yeganə həlli aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$y(x, \delta) = y_0(x, \delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{y_n(x, \delta) - y_{n-1}(x, \delta)\}$$

Əgər

$$y_n(x, \delta) - y_{n-1}(x, \delta) = \delta^n f_n(x, \delta)$$

işarələməsini qəbul etsək, həmin tənliyi başqa formada aşağıdakı kimi yazıb bəzək:

$$y(x, \delta) = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta) \quad (13)$$

(13) formulunda aşağıdakı rekürrent əlaqələr var:

$$f_1(x, \delta) = \int_x^l \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y_0(\xi) d\xi, \dots, \quad (14)$$

$$f_n(x, \delta) = \int_x^l \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y_{n-1}(\xi) d\xi$$

Beləliklə, yuxarıda göstərilən məlumatlara əsasən (9) tənliklərinin həlli  $\alpha_1$  və  $\alpha_2$ -nin istənilən qiymətlərində (12) tənliyini ödəyir. (13) sırası hissə-hissə diferensiallamaqla müntəzəm yığılar və (4) ilə əlaqədar olaraq (13) ifadəsinin əvəzinə aşağıdakı kimi göstərilə bilər:

$$w(x, t) = \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta) \right\} \exp(i\omega t) \quad (15)$$

Bu ifadəni (2) bərabərliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$p(x,t) = \frac{E}{R} \{ \eta + i g_0 g(x) \} \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta) \right\} \exp(i\omega t) \quad (16)$$

$\alpha_1$  və  $\alpha_2$  ilə əlaqədar olan təzyiqin, maye sürətinin və yerdəyişmənin sonrakı təsviri üçün  $x=0$  və  $x=l$  olduqda müxtəlif sərhəd şərtləri qəbul edilə bilər. Eyni bir vəziyyət borunun ucunda pulsasiya təzyiqinin təyin olunduğu vəziyyətdə də mövcuddur.

$$p(0,t) = p_0 \exp(i\omega t), \quad p(l,t) = p_l \exp(i\omega t) \quad (17)$$

Burada  $p_0, p_l$  – empirik sabitlərdir. İndi isə biz  $\alpha_1$  və  $\alpha_2$  -nin təyin olunmasına keçək. Bunun üçün (16) və (17) ifadələrinin birbaşa müqayisəsindən aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= a \\ \alpha_1 e^{i\delta l} + \alpha_2 e^{-i\delta l} &= b \end{aligned}$$

Bu qiymətlərdən istifadə edərək alırıq:

$$\begin{aligned} a &= \frac{R\lambda(0)}{E(\eta + i g_0 g(0))} p_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(0) \\ b &= \frac{R\lambda(l)}{E(\eta + i g_0 g(l))} p_l - \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(l) \end{aligned} \quad (18)$$

İndi  $\alpha_1$  və  $\alpha_2$  – nin qiymətlərini təyin etdikdən sonra və Eylər formulundan istifadə edərək (15) və (16)-da mürəkkəb hesablamalar aparsaq alırıq:

$$p(x,t) = \frac{E}{R} \{ \eta + i g_0 g(x) \} \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \frac{a \sin \delta(l-x) + b \sin \delta x}{\sin \delta l} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta) \right\} \exp(i\omega t) \quad (19)$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \frac{a \sin \delta(l-x) + b \sin \delta x}{\sin \delta l} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta) \right\} \exp(i\omega t) \quad (20)$$

Sürəti təyin etmək üçün növbəti mülahizələrə keçək. Yuxarıdakı kimi dəyişənlərinə ayırma üsulundan istifadə edərək alırıq:

$$u(x,t) = U(x) \exp(i\omega t)$$

Həmçinin  $\Phi(x)$  funksiyasını daxil etsək,

$$\Phi(x) = \{ \eta + i g_0 g(x) \} \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \frac{a \sin \delta(l-x) + b \sin \delta x}{\sin \delta l} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta) \right\}$$

onda (1) tənliklər sisteminin birinci tənliyindən asanlıqla sürətin paylanması aşağıdakı kimi tapmaq olar:

$$u(x,t) = 2i \frac{c_0^2}{\omega R} \Phi'(x) \exp(i\omega t) \quad (21)$$

Alınan (19)-(21) formulları qoyulan məsələnin həlli hesab edilə bilər. Beləliklə, (13) və (14) ifadələri istənilən həllin konstruktiv şəkildə təqdim edilməsini təmin edir.

4. Ətraf mühitin sərtliyi sabit olduqda (yəni  $g(x)=1$  olduqda) borunun sağ ucunda olan təzyiq sıfır olur. ( $p_l = 0$ ) Həmçinin

$$b = 0, \quad a = \frac{p_0}{E} \frac{R}{\eta + ig_0}, \quad \Phi(x) = \frac{p_0}{E} \frac{\sin \delta(l-x)}{\sin \delta}$$

olduqda  $\lambda(x)=1$  və  $q(x)=0$  olur. Onda məlum ifadələri aşağıdakı kimi yazma bilirik:

$$p(x,t) = p_0 \frac{\sin \delta(l-x)}{\sin \delta} \exp(i\omega t), \quad w(x,t) = \frac{p_0}{E} \frac{R}{\eta - ig_0} \frac{\sin \delta(l-x)}{\sin \delta} \exp(i\omega t), \quad (22)$$

$$u(x,t) = -2i \frac{p_0}{E} \delta \frac{c_0^2}{\omega} \frac{\cos \delta(l-x)}{\sin \delta} \exp(i\omega t)$$

Mühitin sərtliyinin təsirini nəzərə almadıqda  $c = \omega / \delta_0$  -dalğa sürəti ilə  $\delta_1$  sönmənin (11) asılılıqlarını yenidən aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\frac{c}{c_0} = \sqrt{\eta \left(1 + \frac{g_0^2}{\eta^2}\right)} \left\{ \sqrt{\frac{1 + g_0^2 / \eta^2 + 1}{2}} \right\}^{-1} \quad (23)$$

$$\delta_1 \frac{c_0}{\omega} = \sqrt{\frac{1}{\eta(1 + g_0^2 / \eta^2)}} \sqrt{\frac{1 + g_0^2 / \eta^2 - 1}{2}}$$

Burada  $g_0 / \eta \ll 1$  olduqda

$$\frac{c}{c_0} \approx \sqrt{\eta}, \quad \delta_1 \frac{c_0}{\omega} \approx 0,$$

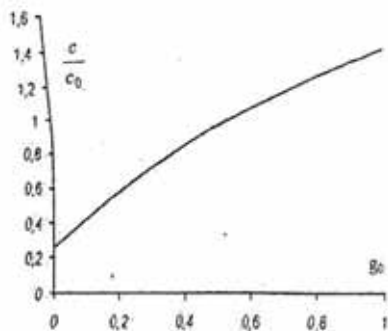
$g_0 / \eta \gg 1$  olduqda isə

$$\frac{c}{c_0} \approx \sqrt{2g_0}, \quad \delta_1 \frac{c_0}{\omega} \sim \frac{1}{\sqrt{2g_0}}$$

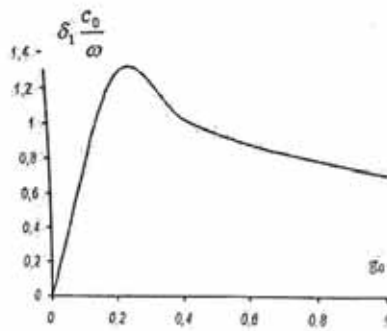
şəklində qəbul edilir. Qeyd edək ki, sonrakı rəqəmsal hesablamaların nəticələri yuxarıda göstərilən ifadələrlə uyğundur.

İndi (23) formuluna əsasən  $\eta \approx 0,67$  qiymətinə uyğun olan  $h/R = 5 \cdot 10^{-2}, \nu = 0,5$

qəbul edərək,  $g_0 \in [0,1]$  olduqda  $\frac{c}{c_0}$  və  $\delta_1 \frac{c_0}{\omega}$  kəmiyyətlərinin  $g_0$  -dan ədədi asılılıqları şəkil 1 və 2-də göstərilmişdir.



Şəк. 1.



Şəк. 2.

Birinci şəkilə əsasən, sərtlik parametrinin artması ilə sistemdə dalğanın yayılma sürəti artır və təyin edilmiş aralıqda  $g_0 \approx 1,37$  qiymətinə yaxınlaşır. İkinci şəkilin məlumatına görə qəbul edilən  $\eta$  üçün sönmə zamanı  $g_0 \approx 0,25$  olduğunu düşünə bilərik.

Beləliklə, bu məqalədə elastiki boru içərisində ideal sıxılmayan mayenin dalğa axını probleminin analitik həlli əldə edilmişdir. Xüsusi halda, birincis vəziyyətdə sərtlik parametrinin sistemin dalğa xüsusiyyətlərinə təsiri təhlil edilir. Göstəriləyi kimi, burada  $g_0$  – dan asılı olaraq sönmə halı mümkündür.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задача упругости. М.: Наука, 1979, 320 с.
2. Гидродинамика кровообращения: сборник переводов / под ред. С.А.Регирера. М.: Мир, 1971, 269 с.
3. Педли Т.Ж. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983, 400 с.
4. Лайтфут Э. Явление переноса в живых системах. М.: Мир, 1977, 520 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971, 576 с.
6. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.
7. Амензаде Р.Ю. Волны в неоднородной трубке с протекающей двухфазной жидкостью // Механика композитных материалов, 2003, т.39, №4, с.555-566.

#### ИМПУЛЬСНОЕ ТЕЧЕНИЕ В УПРУГОЙ ТРУБЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖАТОЙ ЖИДКОСТИ

Ф.Б.АЛИЕВ, К.Р.РАГИМОВА, Т.М.МАХМУДЗАДЕ

#### РЕЗЮМЕ

В этом случае рассматривается вопрос об импульсном течении идеальной несжатой жидкости, зависящей от координаты упругого трения на границе, разделяющей трубу и окружающую среду. В особых случаях определяется влияние параметров нестационарной жесткости на волновые характеристики.

**Ключевые слова:** внешняя жесткость, регулярная проблема Штурма-Луивилла, характеристика Вейерштрассе, скорость волны, затухание.

# PULSE FLOW IN ELASTIC PIPE OF IDEAL NON-SQUEEZED LIQUID

A.B.ALIYEV, K.R.RAHIMOVA, T.M.MAHMUDZADE

## SUMMARY

In this case, the question of the pulse flow of the ideal non-squeezed fluid, which depends on the coordinate of the elastic friction at the boundary separating the pipe and the environment, is considered. In special cases, the effect of the unsteady rigidity parameters on the wave characteristics determined.

**Key words:** external hardness, regular Sturm-Luivill issue, Veyerstrasse feature, wave velocity, switches.

*Redaksiyaya daxil oldu: 23.09.2019-cu il*

*Çapa imzalanıb: 28.12.2019-cu il*