BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2019

RİYAZİYYAT

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н.А.АЛИЕВ, Е.Ю.МУСТАФАЕВА
Бакинский Государственный Университет
yelenamustafayeva@gmail.com

Излагаемая работа посвящена исследованию решения смешанной задачи для трехмерного волнового уравнения с нелокальными граничными условиями. После преобразования Лапласа поставленная смешанная задача сводится к двухмерной граничной задаче с нелокальными граничными условиями для уравнения Гельмгольца. Устанавливаются условия Фредгольмовости полученной граничной задачи. Разрешимость поставленной задачи доказана оригинальным методом.

Ключевые слова. Трехмерное уравнение гиперболического типа, нелокальные граничные условия, преобразование Лапласа, фундаментальные решения, необходимые условия, регуляризация, фредгольмовость.

Мы исследовали фредгольмовость многих трехмерных задач с нелокальными граничными условиями как для типовых, так и нетиповых дифференциальных уравнений. В отличие от классических задач мы изучили уравнения как четного, так и нечетного порядков. Граничные условия таковы, что вся граница является носителем для каждого граничного условия.

В 1968-70-х годах мы интересовались несуществованием решений граничных задач. После большой работы с литературой было определено, что решение граничных задач может не существовать по следующим причинам:

1) из-за уравнения задачи;
2) из-за границы области;
3) из-за граничных условий задачи.

Как мы знаем, одним из главных результатов по задачам Коши для дифференциальных уравнений в частных производных является теорема Коши-Ковалевской [1]. Если все данные задачи Коши – аналитические функции, то решение этой задачи является аналитическим.

И.Г.Петровский в 1946 г. на одной из конференций высказал, «что может быть, если отказаться от аналитичности данных». Ответ на этот вопрос принадлежит H.Levi. Он в 1957 г. [2] привел пример, в котором рассматривается трехмерное линейное неоднородное уравнение первого порядка с аналитическими коэффициентами, но с бесконечно дифференцируемой, но не аналитической правой частью, где приведенное уравнение не имеет даже локального решения. Далее этим вопросом занимался Хёрмандер [3],[4] и за эти работы получил в 1962 г. медаль Филдса.

Что касается второй проблемы, А.Лебег занимался этим вопросом в 1913 г. [5]. Он показал, что задача Дирихле для яблоко-подобной области не имеет решения. Позже в 1924 году, он дал класс областей, в которых рассматриваемая краевая задача неразрешима [6]. Далее, данный вопрос был рассмотрен Н.Винером [7], Егоровым [8], А.Новрузовым [9] и И.Мамедовым [10]. Наконец, третий вопрос, поставленный выше, был рассмотрен А.В.Бицадзе [11], Бегером [12]-[14], А.А.Дезиным [15] и Н.А. Алиевым [16]. Все эти работы опираются на некоторые условия и (за исключением [16]) посвящены граничным задачам, а в [15] исследованы только краевые задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения. В [11], где рассматривается уравнение Лапласа, эти условия называются необходимыми и достаточными. Регуляризация этих условий дана только в двухмерном случае. Утверждение, что регуляризация в трехмерном случае подобна двумерному случаю, неверно.

Что касается работ [12]-[14], то полученные необходимые локальные условия не исследованы, но только предполагается, что в задаче Дирихле (которая для уравнений Коши-Римана некорректна) данная функция удовлетворяет необходимым условиям.

Следует обратить внимание, что для линейного обыкновенного дифференциального уравнения эти необходимые условия являются обычными граничными условиями, а для уравнений в частных производных эти условия имеют вид сингулярных интегральных уравнений. Эти сингулярности имеют специальный вид и не регуляризуются, как в общем случае [17], [18].

Кроме того, на основе указанных нелокальных граничных условий и регуляризованных выражений, полученные из необходимых условий, получены достаточные условия для фредгольмовости поставленных краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$lu(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_0^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}\right) = 0 \qquad (1)$$

в трехмерной области $D=\{x=(x_0,x_1,x_2),x_0>0,(x_1,x_2)=x'\in S\subset R^2\}$ с нелокальными граничными условиями:

$$l_i u\equiv\sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{ij}^{(1)}(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)}+\alpha_{ij}^{(2)}(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\right]+$$

$$\sum_{k=1}^{2}\alpha_i^{(k)}(x_1)u(x_0,x_1,\gamma_k(x_1))=0,$$

$$i=1{,}2;\ x_1\in[a,b]=pr_{Ox_1}S. \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u(0,x_1,x_2)=\varphi_0(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0}=\varphi_1(x_1,x_2). \tag{3}$$

Здесь область $S\subset Ox_1x_2$ является проекцией области D на плоскость $Ox_1x_2=Ox'$, коэффициенты $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1),i,k=1{,}2$,j=1,2, удовлетворяют условию Гельдера, $\alpha_i^{(k)}(x_1),\ i,k=1{,}2$, непрерывные функции на отрезке $[a,b]$.

Применим к уравнению (1) и граничному условию (2) преобразование Лапласа по x_0 ($\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_0^2}\to p^2\tilde{u}+pu(0,x_1,x_2)-\frac{\partial u(x)}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0}$). Тогда получим двумерное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta\tilde{u}(p,x')+k^2\tilde{u}(p,x')=f(p,x'),\ x'\in S, \tag{4}$$

где $k=\frac{p}{a}$ - константа, $f(p,x_1,x_2)=-pu(0,x_1,x_2)+\frac{\partial u(x)}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0}$,и граничные условия:

$$l_i\tilde{u}\equiv\sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{ij}^{(1)}(x_1)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)}+\alpha_{ij}^{(2)}(x_1)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\alpha_i^{(k)}(x_1)\tilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1))=0,i=1{,}2;x_1\in[a,b]. \tag{5}$$

Без ограничения общности, добавим еще одно граничное условие на множестве меры нуль:

$$\tilde{u}(p,a,\gamma_1(a))=A,\ \tilde{u}(p,b,\gamma_1(b))=B. \tag{5'}$$

Уравнение (4) имеет фундаментальное решение[19]

$$U(x'-\xi')=-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x'-\xi'|),$$

где функция Ханкеля

$$H_0^{(1)}(x) = -\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{x} + \ldots \text{ при } x \to 0.$$

Значит, фундаментальное решение уравнения (4) имеет вид:

$$U(x'-\xi') = -\frac{i}{4}\left(-\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{k|x'-\xi'|} + \ldots\right) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{k|x'-\xi'|} + \ldots = \frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'| + \ldots, \tag{6}$$

которое имеет частные производные

$$\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'| + \ldots = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{k|x'-\xi'|}\frac{k(x_i-\xi_i)}{|x'-\xi'|} + \ldots =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(x'-\xi', x_i)}{|x'-\xi'|} + \ldots,\ i = 1,2. \tag{7}$$

2. Необходимые условия.

Умножим уравнение (4) на фундаментальное решение (6) и проинтегрируем по области S:

$$\int_S (\Delta\tilde{u} + k^2\tilde{u})U(x'-\xi')dx' = \int_S f(p,x')U(x'-\xi')dx', \tag{8}$$

Проинтегрируем по частям левую часть (8):

$$\sum_{j=1}^{2}\int_S \frac{\partial^2\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j^2}U(x'-\xi')dx' + \int_S k^2\tilde{u}(p,x'))U(x'-\xi')dx' =$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\left[\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}U(x'-\xi')\cos(\nu_{x'}, x_j)dx' - \int_S \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}dx'\right] +$$

$$+ \int_S k^2\tilde{u}(p,x'))U(x'-\xi')dx' =$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\int_\Gamma\left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}U(x'-\xi') - \tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\right)\cos(\nu_{x'}, x_j)dx' +$$

$$+ \int_S \tilde{u}(p,x)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 U(x'-\xi')}{\partial x_j^2}dx' + \int_S k^2\tilde{u}(p,x'))U(x'-\xi')dx' =$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\int_\Gamma\left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}U(x'-\xi') - \tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\right)\cos(\nu_{x'}, x_j)dx' + \int_S \tilde{u}(p,x')\delta(x'-\xi')dx'. \tag{9}$$

В (9) учтем, что $U(x'-\xi')$ - фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, то есть

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 U(x'-\xi')}{\partial x_j^2}+k^2U(x'-\xi')=(\Delta_{x'}+k^2I)U(x'-\xi')=\delta(x'-\xi')$$

является функцией Дирака. Учитывая это и подставляя (9) в (8), мы имеем соотношение

$$\int_S f(p,x')U(x'-\xi')dx=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\int_\Gamma\left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}U(x'-\xi')-\tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\right)\cos(\nu_{x'},x_j)dx'+\int_S\tilde{u}(p,x')\delta(x'-\xi')dx',$$

откуда получаем первое основное соотношение

$$-\sum_{j=1}^{2}\int_\Gamma\left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}U(x'-\xi')-\tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\right)\cos(\nu_{x'},x_j)dx'-$$

$$-\int_S f(p,x')U(x'-\xi')dx'=\int_S\tilde{u}(p,x')\delta(x'-\xi')dx'=\begin{cases}\tilde{u}(p,\xi'), & \xi'\in S,\\ \dfrac{1}{2}\tilde{u}(p,\xi'), & \xi'\in\Gamma.\end{cases}\tag{10}$$

Второе из соотношений (10) называется **1-ым необходимым условием** разрешимости задачи (1)-(2):

$$\frac{1}{2}\tilde{u}(p,\xi')=-\sum_{j=1}^{2}\int_\Gamma\left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}U(x'-\xi')-\tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\right)\cos(\nu_{x'},x_j)dx'+$$

$$+\int_S f(p,x')U(x'-\xi')dx'\ ,\ \ \xi'\in\Gamma.$$

или

$$\frac{1}{2}\tilde{u}(p,\xi')=-\int_\Gamma\left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial\nu_{x'}}U(x'-\xi')-\tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial\nu_{x'}}\right)dx'$$

$$+\int_S f(p,x')U(x'-\xi')dx'\ ,\ \ \xi'\in\Gamma.\tag{11}$$

Подставляя (6) в (11), получим

$$\frac{1}{2}\tilde{u}(p,\xi')=-\int_\Gamma\left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial\nu_{x'}}\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|-\tilde{u}(p,x')\frac{\partial}{\partial\nu_{x'}}\left(\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|\right)\right)dx'+$$

$$+\int_S f(p,x')\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx'+\dots\ ,\ \ \xi'\in\Gamma.\tag{12}$$

Интегралы в (12) имеют слабую особенность, поэтому являются слабо-сингулярными.

Теорема 1. *Необходимое условие* (12) *является регулярным.*

Умножая (4) на $\dfrac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}$, $m=\overline{1,2}$, и интегрируя по области $\boldsymbol{S}$, мы получаем следующее:

$$\int_S (\Delta\tilde{u}(p,x')+k^2\tilde{u}(p,x'))\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx' = \int_S f(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx' \;. \quad (13)$$

Интегрируя (13) по частям, мы получим:

$$\int_S f(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx' = \int_S (\Delta\tilde{u}(p,x')+k^2\tilde{u}(p,x'))\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx' =$$

$$=\int_S \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j^2}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx' + \int_S k^2\tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx' =$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}\cos(\nu_{x'},x_j)-\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\cos(\nu_{x'},x_m)\right)dx' +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_m}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\cos(\nu_{x'},x_j)dx' + \int_\Gamma k^2\tilde{u}(p,x')U(x'-\xi')\cos(\nu_{x'},x_m)dx' -$$

$$-\int_S \left[\Delta U(x'-\xi')+k^2U(x'-\xi')\right]\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_m}dx',$$

откуда, в силу того, что $\Delta U(x'-\xi')+k^2U(x'-\xi')=\delta(x'-\xi')$ и $\sum_{j=1}^{2}\dfrac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\cos(\nu_{x'},x_j)=\dfrac{\partial U(x'-\xi')}{\partial \nu_{x'}}$, получим остальные два основных соотношения:

$$\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_m}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial \nu_{x'}}dx' +$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\left[\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}\cos(\nu_{x'},x_j)-\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\cos(\nu_{x'},x_m)\right]dx' +$$

$$+\int_\Gamma k^2\tilde{u}(p,x')U(x'-\xi')\cos(\nu_{x'},x_m)dx' - \int_S f(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx' =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}, & \xi'\in S,\\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}, & \xi'\in\Gamma,\end{cases}\qquad m=\overline{1,2}, \qquad (14)$$

где числа m, j образуют перестановку чисел 1,2.

Вторые выражения в (14) - это остальные два **необходимых условия(**для $\xi' \in \Gamma$**,** $i=\overline{1,2}$):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}=\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}(x)}{\partial x_m}\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial\nu_x}dx+$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}(x)}{\partial x_j}\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_m}\cos(\nu_{x'},x_j)-\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j}\cos(\nu_{x'},x_m)\right]dx+$$

$$+\int_\Gamma k^2\tilde{u}(p,x')U(x'-\xi')\cos(\nu_{x'},x_m)dx'-\int_S f(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx', \qquad (15)$$

где числа m, j образуют перестановку чисел 1,2, $m\neq j$.

Подставляя (6) и (7) в (15), получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}=\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_m}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial\nu_{x'}}dx'+$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\left[-\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(x'-\xi',x_i)}{|x'-\xi'|}\cos(\nu_{x'},x_j)+\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(x'-\xi',x_j)}{|x'-\xi'|}\cos(\nu_{x'},x_m)\right]dx'+$$

$$+\int_\Gamma k^2\tilde{u}(p,x')(-\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|)\cos(\nu_{x'},x_m)dx'-$$

$$\int_S f(p,x')\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(x'-\xi',x_m)}{|x'-\xi'|}\right)dx'+...$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}=\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_m}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial\nu_{x'}}dx'+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\left[\frac{\cos(x'-\xi',x_j)\cos(\nu_{x'},x_m)-\cos(x'-\xi',x_i)\cos(\nu_{x'},x_j)}{|x'-\xi'|}\right]dx'-$$

$$-\frac{k^2}{2\pi}\int_\Gamma \tilde{u}(p,x')(\ln k|x'-\xi'|)\cos(\nu_{x'},x_m)dx'-\frac{1}{2\pi}\int_S f(p,x')\left(\frac{\cos(x'-\xi',x_m)}{|x'-\xi'|}\right)dx'+..., \qquad (16).$$

Интеграл по нормальной производной фундаментального решения не является сингулярным. Последний интеграл в (16) сходится по Коши при условии Гельдера на функцию $f(p,x')$. А вот второй интеграл в (16) сингулярный, так как порядок сингулярности совпадает с размерностью интеграла (n=1). Эту сингулярность будем регуляризировать специальным оригинальным методом.

Вводя обозначение

$$K_{mj}(x',\xi')=\cos(x'-\xi',x_j)\cos(\nu_{x'},x_m)-\cos(x'-\xi',x_m)\cos(\nu_{x'},x_j),$$

перепишем 2-ое и 3-е необходимые условия (16) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}=\int_{\Gamma}\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_m}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial\nu_{x'}}dx'+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\frac{K_{mj}(x',\xi')}{|x'-\xi'|}dx'-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{S}f(p,x')\left(\frac{\cos(x'-\xi',x_m)}{|x'-\xi'|}\right)dx'+\ldots, \qquad (17).$$

где числа m, j образуют перестановку чисел 1,2 , $j\neq m$.

Теорема 2. ***Н**еобходимые условия* (17) *являются сингулярными.*

Выделим только сингулярные слагаемые в необходимых условиях (17) ($m=1,2$)и разложим граничные интегралы по верхней (k=1) и нижней (k=2) полуграницам $\Gamma_k=\{\xi'=(\xi_1,\xi_2):\xi_1\in[a,b],\xi_2=\gamma_k(\xi_1))\},k=1,2$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\frac{K_{mj}(x',\xi')}{|x'-\xi'|}dx'+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\frac{K_{mj}(x',\xi')}{|x'-\xi'|}dx'+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\frac{K_{mj}(x',\xi')}{|x'-\xi'|}dx'+\ldots \,. \qquad (18)$$

Учитывая, что $dx'=\dfrac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}$ на верхней полугранице (k=1)и

$dx'=-\dfrac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}$ на нижней полугранице (k=2)в (18)получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(x_1)}=$$

$$(-1)^{k+1}\sum_{s=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{\partial\tilde{u}(p,x))}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_s(x_1)}\frac{K_{mj}(x',\xi')}{|x'-\xi'|}\Big|_{\substack{x_2=\gamma_s(x_1),\\ \xi_2=\gamma_k(x_1)}}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\ldots,$$

$$i,k=1,2;\ j\neq m. \qquad (19)$$

В (19) оставим только сингулярные слагаемые ($k=s$), остальные слагаемые обозначим многоточием:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(x_1)}=$$

$$(-1)^{k+1}\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{\partial\tilde{u}(p,x'))}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{K_{mj}(x',\xi')}{|x'-\xi'|}\Big|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1),\\ \xi_2=\gamma_k(x_1)}}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\ldots, \qquad (20)$$

где $m,k=1,2;\ j\neq m$.

Введем обозначения:

$$K_{mj}^{(k)}(x_1,\xi_1) == K_{mj}(x',\xi')\Big|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1)\\ \xi_2=\gamma_k(\xi_1)}},\ k=1,2. \qquad (21)$$

Рассмотрим $|x'-\xi'|^2\Big|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1)\\ \xi_2=\gamma_k(\xi_1)}}$,k=1,2, в знаменателе подынтегральных выражений (21):

$$|x'-\xi'|^2\Big|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1)\\ \xi_2=\gamma_k(\xi_1)}} = |x_1-\xi_1|^2 + (\gamma_k(x_1)-\gamma_k(\xi_1))^2 =$$

$$= |x_1-\xi_1|^2\left[1+\left(\gamma_k'(x_1)\right)^2 + O(|x_1-\xi_1|)\right]. \qquad (22)$$

Введем обозначения:

$$P_k(x_1,\xi_1) = \sqrt{\left[1+\left(\gamma_k'(x_1)\right)^2 + O(|x_1-\xi_1|)\right]}$$

откуда мы можем переписать (22)следующим образом:

$$|x'-\xi'|\Big|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1)\\ \xi_2=\gamma_k(\xi_1)}} = |x_1-\xi_1| P_k(x_1,\xi_1). \qquad (23)$$

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что для $\xi_1 = x_1$ мы имеем:

$$P_k(x_1,x_1) = \sqrt{1+\left(\frac{d\gamma_k}{dx_1}\right)^2} \neq 0,\ k=1,2.$$

При помощи обозначений (21), (23)мы можем переписать необходимые условия (19) для $m,\ k=1,2;\ j\neq m$, следующим образом:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(x_1)} =$$

$$(-1)^{k+1}\frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\partial\tilde{u}(p,x'))}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} \frac{K_{mj}^{(k)}(x_1,\xi_1)}{|x_1-\xi_1| P_k(x_1,\xi_1)} \frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)} + \ldots. \qquad (24)$$

Чтобы выделить сингулярные слагаемые в подынтегральных выражениях в необходимых условиях (24), мы сначала разложим все коэффициенты при производных по формуле Тейлора в точке $\xi_1 = x_1$:

$$\frac{K_{mj}^{(k)}(x_1,\xi_1)}{P_k(x_1,\xi_1)} = \frac{K_{mj}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)} + \frac{d}{dx_1}\left(\frac{K_{mj}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\right)(x_1-\xi_1) + \ldots.$$

Подставляя полученное разложение для $\dfrac{K_{mj}^{(k)}(x_1,\xi_1)}{P_k(x_1,\xi_1)}$ в необходимые условия (24) и учитывая, что слагаемое $\dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{K_{mj}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\right)\dfrac{(x_1-\xi_1)}{2\pi|x_1-\xi_1|}$, имеет слабую сингулярность, мы выделим только сингулярные слагаемые. Тогда необходимые условия (24) примут окончательный вид для регуляризации:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(x_1)}=$$

$$(-1)^{k+1}\int_a^b\frac{1}{2\pi|x_1-\xi_1|}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{K_{mj}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+..., \qquad (25)$$

где многоточие обозначает несингулярные слагаемые или слагаемые со слабой сингулярностью, а числа m,j образуют перестановку чисел 1,2, $j\neq m$.

3. Регуляризациянеобходимыхусловий

Вернемся теперь к 1-ому необходимому условию (3) и раскроем каждый поверхностный интеграл по верхней и нижней полукривым $\Gamma_k=\{\xi'=(\xi_1,\xi_2):\xi_2=\gamma_k(\xi_1),\ \xi_1\in[a,b]\}$ $k=1,2$, границы Γ области S:

$$\frac{1}{2}\widetilde{u}(p,\xi')\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}=$$

$$\int_\Gamma\widetilde{u}(p,x')\frac{\partial}{\partial\nu_{x'}}\left(\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|\right)dx'-\int_\Gamma\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial\nu_{x'}}\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx'-$$

$$-\int_S f(p,x')\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx'=$$

$$=\sum_{s=1}^{2}\int_{\Gamma_s}\widetilde{u}(p,x')\Big|_{x_2=\gamma_s(x_1)}\frac{\partial}{\partial\nu_{x'}}\left(\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|\right)\Bigg|_{\substack{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)\\ x_2=\gamma_s(x_1')}}dx'-\int_\Gamma\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial\nu_{x'}}\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx'-$$

$$-\int_S f(p,x')\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx'=$$

$$=\sum_{s=1}^{2}(-1)^s\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_s}\widetilde{u}(p,x')\Big|_{x_2=\gamma_s(x_1)}\left(\frac{\cos(x'-\xi',\nu_{x'})}{|x'-\xi'|}\right)\Bigg|_{\substack{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)\\ x_2=\gamma_s(x_1')}}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+$$

$$-\int_\Gamma\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial\nu_{x'}}\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx'-\int_S f(p,x')\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx',\ \ \xi\in\Gamma_k.$$

или

$$\frac{1}{2}\widetilde{u}(p,\xi')\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}=$$

$$\sum_{s=1}^{2}(-1)^s\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_s}\widetilde{u}(p,x')\Big|_{x_2=\gamma_s(x_1)}\left(\frac{\cos(x'-\xi',\nu_{x'})}{|x'-\xi'|}\right)\Bigg|_{\substack{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)\\ x_2=\gamma_s(x_1')}}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+$$

$$-\int_{\Gamma}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial\nu_{x'}}\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx'-\int_{S}f(p,x')\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx',\ \ \xi\in\Gamma_k. \quad (26)$$

Очевидно, когда $k\neq s$ в (26), соответствующий интеграл несингулярен. Когда $k=s$ в первой сумме в (26), тогда соответствующий интеграл имеет устранимую особенность при $x\to\xi$; второй интеграл в (26) имеет слабую особенность, так как порядок особенность меньше кратности интеграла, а в третьем интеграле налагая условие Гельдера на функцию $f(p,x')$, получаем также устранимую особенность.Поэтому, обозначая несингулярные слагаемые многоточием в (23) и учитывая (18), мы получаем первое необходимое условие в виде (для k=1, 2):

$$\frac{1}{2}\widetilde{u}(p,\xi')\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}=$$

$$=(-1)^k\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_k}\widetilde{u}(p,x')\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\left(\frac{\cos(x'-\xi',\nu_{x'})}{|x'-\xi'|}\right)\Bigg|_{\substack{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)\\ x_2=\gamma_k(x_1')}}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+...=$$

$$=(-1)^k\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_k}\widetilde{u}(p,x')\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{\cos(x'-\xi',\nu_{x'})\Big|_{\substack{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)\\ x_2=\gamma_k(x_1')}}}{|x_1-\xi_1|P_k(x_1,\xi_1)}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+... \quad (27)$$

Построим теперь линейную комбинацию необходимых условий (25) (i,j =1,2; k=1,2):

$$\beta_{ij}^{(1)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)(-1)^{k+1}\int_a^b\frac{1}{2\pi|x_1-\xi_1|}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{K_{jm}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+...=$$

$$=\int_a^b\frac{1}{2\pi|x_1-\xi_1|}\left[\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{K_{jm}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\right]\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+..., \quad (28)$$

где $m\neq j$.

Прибавляя и вычитая $\beta_{ij}^{(k)}(x_1)$ из $\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)$, $k=1,2$, в (28), мы получаем:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\int_a^b\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi|x_1-\xi_1|}\left[\sum_{k=1}^{2}\beta_{ij}^{(k)}(x_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{K_{jm}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\right]\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)-\beta_{ij}^{(k)}(x_1)}{|x_1-\xi_1|}\frac{\partial\tilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{K_{jm}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\right]\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\dots \quad (29)$$

Предполагая, что функции $\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)$ удовлетворяют условию Гёльдера, мы получаем слабые особенности в интегралах с $\dfrac{\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)-\beta_{ij}^{(k)}(x_1)}{|x_1-\xi_1|}$. Отбросив слагаемые со слабыми особенностями в (29), получим:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi_1)\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi_1)\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)=$$

$$=\int_a^b\frac{1}{2\pi|x_1-\xi_1|}\left[\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\beta_{ij}^{(k)}(x_1)\frac{\partial\tilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Bigg|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1)\\ m\neq j}}\frac{K_{jm}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\right]\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\dots=$$

$$=\int_a^b\frac{1}{2\pi|x_1-\xi_1|}\left[\sum_{j=1}^{2}\beta_{ij}^{(1)}(x_1)\frac{\partial\tilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Bigg|_{\substack{x_2=\gamma_1(x_1)\\ m\neq j}}\frac{K_{jm}^{(1)}(x_1,x_1)}{P_1(x_1,x_1)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{2}\beta_{ij}^{(2)}(x_1)\frac{\partial\tilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Bigg|_{\substack{x_2=\gamma_2(x_1)\\ m\neq j}}\frac{K_{jm}^{(2)}(x_1,x_1)}{P_2(x_1,x_1)}\right]\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\dots=$$

$$=\int_a^b\frac{dx_1}{2\pi|x_1-\xi_1|\cos(\nu_{x'},x_2)}\times$$

$$\times\left[\beta_{i2}^{(1)}(x_1)\frac{K_{21}^{(1)}(x_1,x_1)}{P_1(x_1,x_1)}\frac{\partial\tilde{u}(p,x'))}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)}-\beta_{i2}^{(2)}(x_1)\frac{K_{21}^{(2)}(x_1,x_1)}{P_2(x_1,x_1)}\frac{\partial\tilde{u}(p,x'))}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)}+\right.$$

$$\left.+\beta_{i1}^{(1)}(x_1)\frac{K_{12}^{(1)}(x_1,x_1)}{P_1(x_1,x_1)}\frac{\partial\tilde{u}(p,x'))}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)}-\beta_{i1}^{(2)}(x_1)\frac{K_{12}^{(2)}(x_1,x_1)}{P_2(x_1,x_1)}\frac{\partial\tilde{u}(p,x'))}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\right]+\dots \quad (30)$$

Для регуляризации интеграла в правой части (30) поставим условия на коэффициенты $\beta_{ij}^{(k)}(x')$: приравняем коэффициенты при производных под знаком интеграла (30) к коэффициентам $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1)$ из граничных условий (2). Тогда мы получим систему уравнений для неизвестных $\beta_{ij}^{(k)}(x_1),\ i,j=1,2$, каждого $k=1,2$:

$$(-1)^{k+1}\beta_{im}^{(k)}(x_1)\frac{K_{mj}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}=\alpha_{ij}^{(k)}(x_1),\quad i,j,k=1,2;\ m\neq j. \quad (31)$$

Предположим, что неоднородная система (31) имеет единственное решение $\beta_{11}^{(k)}(x_1)$, $\beta_{12}^{(k)}(x_1)$, $\beta_{21}^{(k)}(x_1)$, $\beta_{22}^{(k)}(x_1)$, для каждого k=1,2. Тогда подставляя граничные условия (2) в (29), получаем:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi_1)\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi_1)\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)=$$

$$=-\int_a^b \frac{1}{2\pi|x_1-\xi_1|}\left[\sum_{m=1}^{2}\alpha_i^{(m)}(x_1)\widetilde{u}(p,x_1,\gamma_m(x_1))\right]\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\ldots, i=1,2. \quad (32)$$

Подставляя 1-ое необходимое условие (26) для $\widetilde{u}(p,\xi')$ на Γ_k, $k=1,2$, в (32), мы имеем:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)=$$

$$=-\int_a^b \frac{dx_1}{2\pi\cos(\nu_{x'},x_2)|x_1-\xi_1|}\left[\sum_{m=1}^{2}\alpha_i^{(m)}(x_1)\times\right.$$

$$\left.\times(-1)^m\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_m}\widetilde{u}(p,\zeta')\Big|_{\zeta_2=\gamma_m(\zeta_1)}\frac{\cos(\zeta'-x',\nu_{\zeta'})\Big|_{\substack{x_2=\gamma_m(x_1)\\ \zeta_2=\gamma_m(\zeta_1')}}}{|\zeta_1-x_1|P_m(x_1,\zeta_1)}\frac{d\zeta_1}{\cos(\nu_{\zeta'},\zeta_2)}\right]+\ldots \quad (33)$$

Меняя порядок интегрирования в (33), получаем два регулярных соотношения ($i=1,2$):

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)=$$

$$=\int_a^b\frac{\widetilde{u}(p,\zeta')\Big|_{\zeta_2=\gamma_k(\zeta_1)}d\zeta_1}{2\pi\cos(\nu_{\zeta'},\zeta_2)}\int_a^b\sum_{m=1}^{2}\left(\alpha_i^{(m)}(x_1)\frac{\left(\cos(\zeta'-x',\nu_{\zeta'})\right)\Big|_{\substack{\zeta_2=\gamma_m(\zeta')\\ x_2=\gamma_m(x')}}}{2\pi|x_1-\zeta_1||x_1-\xi_1|P_m(x_1,\zeta_1)}\right)\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\ldots \quad (34)$$

Внутренние интегралы в правой части (34) являются сингулярными, но они не содержат неизвестную функцию $\widetilde{u}(p,\xi')$ и сходятся в смысле Коши. Таким образом, мы регуляризировали соотношения (30) и, следовательно, нами установлена следующая

Теорема 3. *Если система* (31) *имеет единственное решение* $\beta_{11}^{(k)}(x'),\beta_{12}^{(k)}(x'),\ \beta_{21}^{(k)}(x'),\beta_{22}^{(k)}(x')$, *для каждого* k=1,2, *и функции* $\beta_{ij}^{(k)}(x_1)$, $i,k=1,2;$ $j=\overline{1,2}$, *удовлетворяют условию Гельдера, то соотношения* (30) *являются регулярными.*

4. Фредгольмовость

Из курса математического анализа известно, что

$$\frac{d}{dx_1}\widetilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1))=\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}+\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x')}\frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1},\ k=1,2,$$

откуда мы имеем

$$\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} = \frac{d\tilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1))}{dx_1} - \frac{\partial\tilde{u}(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x')}\frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1}, k=1,2. \quad (35)$$

Так что производная $\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}$ определяется через производную $\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}$. Тогда мы имеем только две неизвестные: граничные значения искомой функции $u(x',\gamma_1(x'))$ и $u(x',\gamma_2(x'))$.

Подставим теперь выражения для $\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}$ из (35) в левые части граничных условий (5):

$$l_i\tilde{u} \equiv \sum_{k=1}^{2}\alpha_{i1}^{(k)}(x_1)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} + \sum_{k=1}^{2}\alpha_{i2}^{(k)}(x_1)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} +$$

$$\sum_{k=1}^{2}\alpha_i^{(k)}(x_1)\tilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\alpha_{i1}^{(k)}(x_1)\left\{\frac{d\tilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1))}{dx_1} - \frac{\partial\tilde{u}(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x')}\frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1},\right\} + \sum_{k=1}^{2}\alpha_{i2}^{(k)}(x_1)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\alpha_i^{(k)}(x_1)\tilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\alpha_{i1}^{(k)}(x_1)\frac{d\tilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1))}{dx_1} + \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\left[\alpha_{i2}^{(k)}(x_1) - \alpha_{i1}^{(k)}(x_1)\frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1}\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\alpha_i^{(k)}(x_1)\tilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1)) = 0,\ x_1 \in [a,b],\ i=1,2. \quad (36)$$

Введем обозначения:

$$A_{ik}(x_1) = \alpha_{i2}^{(k)}(x_1) - \alpha_{i1}^{(k)}(x_1)\frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1},\ i,k=1,2.$$

Тогда система (36) будет переписана в виде:

$$A_{i1}(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} + A_{i2}(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)} = F_i(x_1), i=1,2, \quad (37)$$

где правые части системы (37) имеют вид:

$$\mathrm{F_i}(x_1) = -\sum_{k=1}^{2}\alpha_{i1}^{(k)}(x_1)\frac{d\tilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1))}{dx_1} +$$

$$-\alpha_i^{(1)}(x_1)\tilde{u}(p,x_1,\gamma_1(x')) - \alpha_i^{(2)}(x_1)\tilde{u}(p,x_1,\gamma_2(x_1)), \quad (38)$$

$$x_1 \in [a,b],\ i=1,2.$$

Мы приведем систему (37) к нормальному виду. Для этого мы требуем, чтобы определитель системы был не равен нулю:

$$\Delta(x_1)=\begin{vmatrix} A_{11}(x_1) & A_{12}(x_1) \\ A_{21}(x_1) & A_{22}(x_1)\end{vmatrix}\neq 0\,. \qquad (39)$$

Если коэффициенты $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1), i, j, k=1,2$, и уравнения границ $\gamma_1(x_1)$ и $\gamma_2(x_1)$ удовлетворяют условию (39) , тогда по формулам Крамера имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} &= \frac{1}{\Delta(x_1)}\begin{vmatrix} F_1(x_1) & A_{12}(x_1) \\ F_2(x_1) & A_{22}(x_1)\end{vmatrix}, \\ \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)} &= \frac{1}{\Delta(x_1)}\begin{vmatrix} A_{11}(x_1) & F_1(x_1) \\ A_{21}(x_1) & F_2(x_1)\end{vmatrix}. \end{aligned} \qquad (40)$$

Так как определитель $\Delta(x_1)$ не зависит от неизвестной функции и ее производных, а $F_i(x_1)$ лишь от граничных значений неизвестной функции $\tilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1))=\tilde{u}\big|_{\Gamma_k}$, $k=1,2$, и их производных $\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_k}}{dx_1}$ (k=1,2), то решение (40) линейной системы (37) имеет форму линейного функционала:

$$\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} = \Phi_k\Big(\tilde{u}\big|_{\Gamma_1}, \tilde{u}\big|_{\Gamma_2}, \frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_1}}{dx_1}, \frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_2}}{dx_1}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{2} a_i^{(k)}(x_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^{2} b_i^{(k)}(x_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{dx_1} + \sum_{i=1}^{2}\int_a^b c_i^{(k)}(\zeta_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}\, d\zeta_1 +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_S d_i^{(k)}(\zeta_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1}d\zeta_1,\; k=1,2. \qquad (41)$$

Вернемся к регуляризированным граничным условиям (34) и подставим в них выражения (35) для производных $\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}, k=1,2$:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + \beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\beta_{i1}^{(k)}(\xi')\left[\frac{d\tilde{u}(p,\xi_1,\gamma_k(\xi_1))}{d\xi_1} - \frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}\frac{d\gamma_k(\xi_1)}{d\xi_1}\right]+$$

$$\sum_{k=1}^{2}\beta_{i2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)} =$$

$$= \int_a^b \frac{\widetilde{u}(p,\zeta')\Big|_{\zeta_2=\gamma_k(\zeta_1)} d\zeta_1}{2\pi\cos(\nu_{\zeta'},\zeta_2)} \int_a^b \sum_{m=1}^{2} \left(\alpha_i^{(m)}(x_1) \frac{\left(\cos(\zeta'-x',\nu_{\zeta'})\right)\Big|_{\substack{\zeta_2=\gamma_m(\zeta')\\ x_2=\gamma_m(x')}}}{2\pi|x_1-\zeta_1||x_1-\xi_1|P_m(x_1,\zeta_1)} \right) \frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)} + \ldots$$

$$i = 1,2. \qquad (42)$$

Сгруппируем слагаемые и приведем соотношения (42) к виду:

$$\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} \left[\beta_{i1}^{(1)}(\xi_1)\frac{d\gamma_1(\xi_1)}{d\xi_1} - \beta_{i2}^{(1)}(\xi_1) \right] +$$

$$+ \frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} \left[\beta_{i1}^{(2)}(\xi_1)\frac{d\gamma_2(\xi_1)}{d\xi_1} - \beta_{i2}^{(2)}(\xi_1) \right] =$$

$$= \beta_{i1}^{(1)}(\xi_1)\frac{d\widetilde{u}(p,\xi_1,\gamma_1(\xi_1))}{d\xi_1} + \beta_{i1}^{(2)}(\xi_1)\frac{d\widetilde{u}(p,\xi_1,\gamma_2(\xi_1))}{d\xi_1} +$$

$$+ \int_a^b \frac{\widetilde{u}(p,\zeta')\Big|_{\zeta_2=\gamma_k(\zeta_1)} d\zeta_1}{2\pi\cos(\nu_{\zeta'},\zeta_2)} \int_a^b \sum_{m=1}^{2} \left(\alpha_i^{(m)}(x_1) \frac{\left(\cos(\zeta'-x',\nu_{\zeta'})\right)\Big|_{\substack{\zeta_2=\gamma_m(\zeta')\\ x_2=\gamma_m(x')}}}{2\pi|x_1-\zeta_1||x_1-\xi_1|P_m(x_1,\zeta_1)} \right) \frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)} + \ldots$$

$$\xi' \in S,\ i = 1,2. \qquad (43)$$

Слагаемые в (43) - либо со слабо сингулярным либо с регулярным ядром.

Тогда получаем систему

$$C_{i1}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + C_{i2}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} = B_i(\xi_1),\ i = 1,2, \qquad (44)$$

где

$$C_{ij}(\xi_1) = \beta_{ij}^{(1)}(\xi_1)\frac{d\gamma_1(\xi_1)}{d\xi_1} - \beta_{ij}^{(1)}(\xi_1),\ i,j = 1,2,$$

$$B_i(\xi_1) = \sum_{k=1}^{2} \beta_{i1}^{(k)}(\xi_1)\frac{d\widetilde{u}(p,\xi_1,\gamma_k(\xi_1))}{d\xi_1} +$$

$$+ \int_a^b \frac{\widetilde{u}(p,\zeta')\Big|_{\zeta_2=\gamma_k(\zeta_1)} d\zeta_1}{2\pi\cos(\nu_{\zeta'},\zeta_2)} \int_a^b \sum_{m=1}^{2} \left(\alpha_i^{(m)}(x_1) \frac{\left(\cos(\zeta'-x',\nu_{\zeta'})\right)\Big|_{\substack{\zeta_2=\gamma_m(\zeta')\\ x_2=\gamma_m(x')}}}{2\pi|x_1-\zeta_1||x_1-\xi_1|P_m(x_1,\zeta_1)} \right) \frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)} + \ldots \qquad (45)$$

Так как в многоточие в (45) входят слагаемые интегралы, содержащие производные $\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi_1)}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}$, $k = 1,2$, под интегралом, а также границные значения $\tilde{u}\big|_{\Gamma_k} = \tilde{u}(p,\xi_1,\gamma_k(\xi_1))$ искомого решения $\tilde{u}(p,\xi')$ на поверхностях $\Gamma_k, k=1,2$, и производные граничных значений $\dfrac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_k}}{d\xi_1} = \dfrac{d\tilde{u}(p,\xi_1,\gamma_k(\xi_1))}{d\xi_1}$, $k=1,2$, то правые части B_k, $k=1,2$, (45) являются линейными функционалами от этих функций и, учитывая (41) имеют вид:

$$B_k = B_k\left(\tilde{u}\big|_{\Gamma_1}, \tilde{u}\big|_{\Gamma_2}, \frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_1}}{dx_1}, \frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_2}}{dx_1}, \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_2}\Big|_{\Gamma_1}, \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_2}\Big|_{\Gamma_2}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} a_i^{(l)}(\xi_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^{2} b_i^{(l)}(\xi_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\xi_1} + \sum_{i=1}^{2}\int_a^b c_i^{(l)}(\zeta_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2}\int_a^b d_i^{(l)}(\zeta_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1} d\zeta_1 + \varphi_l(\xi_1),\ l = 3,4\,. \tag{46}$$

Подставляя выражения (41) для $\dfrac{\partial\tilde{u}(p,\xi_1)}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}$, $k=1,2$, и (46) в систему (44), мы пришли к 2-мерной системе линейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{2} A_i^{(k)}(\xi_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^{2} B_i^{(k)}(\xi_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\xi_1} + \sum_{i=1}^{2}\int_a^b C_i^{(k)}(\zeta_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2}\int_a^b D_i^{(k)}(\zeta_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1} d\zeta_1 + g_k(\xi_1) = 0,\ \ k = 1,2. \tag{47}$$

Приведем систему (47) к нормальному виду:

$$\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_k}}{d\xi_1} = \sum_{i=1}^{2} P_i^{(k)}(\xi_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^{2}\int_a^b R_i^{(k)}(\zeta_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2}\int_a^b T_i^{(k)}(\zeta_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1} d\zeta_1 + G_k(\xi_1) = 0,\ \ k = 1,2, \tag{48}$$

при условии, что

$$\begin{vmatrix} B_1^{(1)}(\xi_1) & B_2^{(1)}(\xi_1) \\ B_1^{(2)}(\xi_1) & B_2^{(2)}(\xi_1) \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{49}$$

Проинтегрируем по частям интеграл от $\dfrac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1}$ в левой части (48), учитывая граничное значение (5’):

$$\frac{d\widetilde{u}\big|_{\Gamma_k}}{d\xi_1} = \sum_{i=1}^{2} P_i^{(k)}(\xi_1)\widetilde{u}\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^{2}\int_a^b \left[R_i^{(k)}(\zeta_1) - \frac{dT_i^{(k)}(\zeta_1)}{d\zeta_1} \right] \widetilde{u}\big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} T_i^{(k)}(t)\widetilde{u}(t,\gamma_i(t),p)\big|_a^b + G_k(\xi_1) = 0, \;\; k = 1,2, \qquad (50)$$

Проинтегрируем (50) от a до ξ_1, учитывая граничное значение (5'):

$$\widetilde{u}(\xi_1,\gamma_k(\xi_1),p) = \widetilde{u}(a,\gamma_k(a),p) + \sum_{i=1}^{2}\int_a^{\xi_1} P_i^{(k)}(t)\widetilde{u}\big|_{\Gamma_i} dt + \sum_{i=1}^{2}\int_a^{\xi_1}\int_a^{b} \left[R_i^{(k)}(\zeta_1) - \frac{dT_i^{(k)}(\zeta_1)}{d\zeta_1} \right] \widetilde{u}\big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 dt +$$

$$+ E_k(\xi_1) = 0, \;\; k = 1,2,$$

или

$$\widetilde{u}\big|_{\Gamma_k} = \sum_{i=1}^{2}\int_a^{\xi_1} P_i^{(k)}(t)\widetilde{u}\big|_{\Gamma_i} dt + \sum_{i=1}^{2}\int_a^{\xi_1}\int_a^{b} V(\zeta_1)\widetilde{u}\big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 dt + \; H_k(\xi_1) = 0, \;\; k = 1,2. \qquad (51)$$

Преобразуем (51) к виду:

$$\widetilde{u}(\xi_1,\gamma_k(\xi_1),p) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\int_a^{b} \theta(\xi_1 - t)P_i^{(k)}(t)\widetilde{u}(t,\gamma_k(t),p)dt + \sum_{i=1}^{2}\int_a^{b} \widetilde{u}(t,\gamma_k(t),p)V_i^{(k)}(t)(\xi_1 - a)dt + H_k(\xi_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\int_a^{b} \left\{ \theta(\xi_1 - t)P_i^{(k)}(t) + V_i^{(k)}(t)(\xi_1 - a) \right\} \widetilde{u}(t,\gamma_k(t),p)dt, \; \xi_1 \in [a,b], \;\; k = 1,2, \; (52)$$

Итак, мы пришли к 2-мерной системе линейных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода (52) с граничными условиями Дирихле (5') на границе одномерной области $[a,b]$. Так как эта граница меры нуль, то это условие Дирихле не ограничивает общности.

Таким образом, нами установлена

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы*3, *если справедливы условия* (39)*и* (49), *то краевая задача* (4)-(5) *сводится к двумерной системе линейных интегральных уравнений Фредгольма* 2-*го рода* (50), *к которой примыкает условие Дирихле* (5').

Таким образом, установлена следующая

Теорема 5.*При условиях теоремы*4*с учетом ограничения* (5') *краевая задача* (4), (5) *является Фредгольмовой*.

Путем обратного преобразования Лапласа получаем решение $u(x)$ исходной задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалевская С.В. К теории уравнений в частных производных. Научные статьи. М.-Л.: АН СССР, 1948, 380 с.
2. Levi H. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. Ann.Math., 1957, vol.66, №2, pp.155-158.
3. Hörmander L. Differential operators of principal type, Math.Ann., 140,124-146, 1960.

4. Hörmander L. Differential equations without solution, Math.Ann., 140,169-173, 1960.
5. Lebesgue H. Sur des casdimpossibilite du problem de Dirichlet. Bull.Soc.Math.17, 913, pp.48-50.
6. Lebesgue H. Observation ansujetdela note de N.Wiener-Conditlons de regularite, conditions dirregularite condtions dimpossibilitedand, le problem Dirichlet-Compt. Remd. De 1 Acad., des, de Pris, 178, 1924, pp.349-354.
7. Wiener N. The Dirichlet problem, J. Math. And Phys., 1924, №3, pp.123-146.
8. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа.М., 1984, Наука, 359 с.
9. Новрузов А.А. Об одном критерии регулярности граничных точек для линейных и квазилинейных параболических уравнений, Докл.АН СССР, т. 209, № 4, 1973, сс.785-787.
10. Мамедов И.Г. О регулярности граничных точек для линейных параболических уравнений. Мат. заметки, т. 20, № 5, 1976, сс.717-723.
11. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966, 203 с.
12. Monika-Ramona Costache (Supervisal Prof. Dr.Heinrich Begehr) Basic Boundary Value Problems for the Cauchy-Riemann and the Poisson Equation in a Quarter Diss (Master thesis) June 19, 2009.
13. Begehr H. and Gaertner E. A Dirichlet problem for the inhomogeneous polyharmonic equation in the upper half plane, Georg.Math. J., 2007, vol.14, N 1, p.33-51.
14. Begehr H. Boundary value problems in complex analysis I. Boletin de la Asociacion MatematicaVenezolana. Vol.XII, N1, 2005, pp.65-85.
15. Дезин А.А. Общие вопросы краевых задач. М.: Наука, 1980, 207 с.
16. Алиев Н.А. Исследование решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с общими линейными граничными условиями. Докт.диссерт., Баку, 2011, 270 с.
17. Aliev N.A. and Hosseini S.M. A regularization of Fredholm type singular integral equations, I.J. of Math. and Math Sciences, 26 (2001) №2, p.123-128.
18. Aliev N.A. and Hosseini S.M. Multidimensional singular Fredholm integral equations in a finite domain and their regularization, South East Asian Bulletin Mathematics, 27, 2003, №3, 395-408.
19. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука,1976, 480 с.

QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ OLAN ÜÇÖLÇÜLÜ HİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN QOYULMUŞ MƏSƏLƏNİN HƏLLİ

N.Ə.ƏLİYEV, Y.Yu.MUSTAFAYEVA

XÜLASƏ

Təqdim olunan məqalə qeyri-lokal sərhəd şərtləri olan üçölçülü dalğa tənliyi üçün qarışıq məsələnin həllinin araşdırılmasına həsr olunmuşdur. Laplas çevrilməsindən sonra, yaranan qarışıq məsələ Helmholtz tənliyi üçün qeyri-lokal sərhəd şərtləri ilə ikiölçülü bir sərhəd dəyər məsələsinə çevrilir. Alınan sərhəd məsələsinin Fredholm xassəsinin şərtləri müəyyənləşdirilir. Məsələsinin həll olunması orijinal üsulla təsdiqlənir.

Açar sözlər Üçölçülü hiperbolik tənlik, qeyri-lokal sərhəd şərtləri, Laplas çevrilməsi, fundamental həllər, zəruri şərtlər, requlyarizasiya, Fredholm xassəsi.

SOLVABILITY OF NONLOCAL BOUNDARY PROBLEM FOR THREE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION

N.A.ALIEV, Y.Yu.MUSTAFAYEVA

SUMMARY

The present paper is devoted to the study of the solution of a mixed problem for a three-dimensional wave equation with nonlocal boundary conditions. After the Laplace transform, the posed mixed problem reduces to a two-dimensional boundary-value problem with non-local boundary conditions for the Helmholtz equation. The conditions of the Fredholm property of the obtained boundary problem are established. The solvability of the problem is proved by the original method.

Keywords. Three-dimensional hyperbolic equation, nonlocal boundary conditions, Laplace transform, fundamental solutions, necessary conditions, regularization, Fredholm property.

Поступила в редакцию: 16.04.2019 г.
Подписано к печати: 28.12.2019 г.