BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2019

УДК 65H04

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э.А.ГАСЫМОВ

Бакинский Государственный Университет

gasymov-elmagha@rambler.ru

В настоящей работе получаются асимптотические представления корней некоторых трансцендентных уравнений и указываются некоторые оценки. Строятся последовательность расширяющихся замкнутых гладких контуров типа окружности, включенных друг в друга и по этим контуром получаются подходящие равномерные оценки снизу для модулей функции, входящие в рассматриваемое трансцендентное уравнение. Результаты работы могут быть использованы при решении некоторых смешанных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с нерегулярными граничными условиями [3].

Ключевые слова. Трансцендентные уравнения, асимптотические решение, оценка снизу**.**

Постановка задачи. Найти асимптотические представления корней уравнений

$$\Delta_1(\lambda) \equiv e^{i\lambda a} + q_1(\lambda) = 0, \quad |\lambda| \ge R, \tag{1.1}$$

и

$$\Delta_2(\lambda) \equiv e^{a\lambda} + \frac{1}{q_2(\lambda)} = 0, \quad |\lambda| \ge R, \tag{1.2}$$

где $q_1(\lambda) = \beta\lambda + \gamma + \frac{E(\lambda)}{\lambda}$, $q_2(\lambda) = i\beta\lambda + \gamma + \frac{E(\lambda)}{\lambda}$; $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $a(a>0), \beta_k, \gamma_k$ R-некоторые вещественные числа, $i = \sqrt{-1}$, $\lambda -$ комплексное число. Здесь и в дальнейшем через $E(\lambda)$ обозначаются различные функции (конкретные выражения которых не важны) определенные в области $|\lambda| \ge R,$ для которых $|E(\lambda)| \le const,$ при $|\lambda| \ge R,$ где R-достаточно большое положительное число.

1^0. Пусть $a > 0$ и $\beta \ne 0$.

Положим

$$x_{1m}^{0}=(2m+1)\frac{\pi}{a}+\frac{\theta}{a}-\frac{1}{(2m+1)a\pi}\ln\left(\frac{|\beta|}{a}(2m+1)\pi\right)+\frac{\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1}{|\beta|^2(2m+1)\pi};$$

$$y_{1m}^{0}=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{|\beta|}{a}(2m+1)\pi\right)-\frac{1}{(2m+1)\pi}\left[\frac{\theta}{a}+\frac{\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2}{|\beta|^2}\right];$$

$$x_{2m}^{0}=-\frac{2m\pi}{a}+\frac{\theta}{a}+\frac{1}{2ma\pi}\ln\left(\frac{2|\beta|m\pi}{a}\right)-\frac{1}{2\pi m}\frac{\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1}{|\beta|^2};$$

$$y_{2m}^{0}=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{2|\beta|\pi m}{a}\right)+\frac{1}{2\pi m}\cdot\left[\frac{\theta}{a}+\frac{\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2}{|\beta|^2}\right];$$

$$\theta=\arg\beta,\quad \text{т.е. } \cos\theta=\frac{\beta_1}{|\beta|},\ \sin\theta=\frac{\beta_2}{|\beta|},$$

$$\lambda_{jm}^{(1.0)}=x_{jm}^{0}+iy_{jm}^{0},$$

$$\lambda_{jm}^{(2.0)}=y_{jm}^{0}-ix_{jm}^{0}. \tag{2}$$

Пользуясь [1], [2] доказывается следующая

Теорема 1. *При ограничениях 1^0, уравнения (1.к)* $(k=1,2)$ *в комплексной плоскости имеют, соответственно, две группы счетных множеств нулей* $\left\{\lambda_{jm}^{(k)}\right\}_{m=1}^{\infty},(j=1,2)$, *для которых единственной предельной точкой является* $\lambda=\infty$. *Эти корни при достаточно больших* m *допускают асимптотические представления*

$$\lambda_{jm}^{(k)}=\lambda_{jm}^{(k.0)}+0\left(\frac{1}{m\ln m}\right),(m\to+\infty),\ j=1,2, \tag{3}$$

где $\lambda_{jm}^{(k.0)}$ из (2).

Положим

$$\Omega_{Rh}^{(1.j)}=\left\{\lambda:(-1)^j\operatorname{Re}\lambda<0,\operatorname{Im}\lambda<0,\left|\operatorname{Im}\lambda+\frac{1}{a}\ln|\beta\lambda|\right|\le h,\ |\lambda|\ge R\right\},$$

$$\Omega_{Rh}^{(2.j)}=\left\{\lambda:(-1)^j\operatorname{Im}\lambda<0,\operatorname{Re}\lambda<0,\left|\operatorname{Re}\lambda+\frac{1}{a}\ln|\beta\lambda|\right|\le h,\ |\lambda|\ge R\right\},$$

$$\Omega_{Rh}^{(k)}=\bigcup_{j=1}^{2}\Omega_{Rh}^{(k.j)}.$$

Прямые

$$l_m^{(1.1)}=\left\{\lambda:\operatorname{Re}\lambda=\frac{2\pi m}{a}+\frac{\theta}{a}\right\},$$

$$l_m^{(1.2)} = \left\{ \lambda : \operatorname{Re}\lambda = -\frac{2\pi m}{a} + \frac{\theta}{a} + \frac{\pi}{a} \right\},$$

$$m = N_0, \;\; N_0 + 1, \ldots,$$

($N_0 -$ достаточно большое натуральное число), разбивают область $\Omega_{Rh}^{(1j)}$ на криволинейные четырехугольники $T_m^{(1.j)} = T_m^{(1.j)}(R,h)$ с боковыми границами, лежащими на прямых $l_m^{(1.j)}$ и $l_{m+1}^{(1.j)}$ основаниями

$$\operatorname{Im}\lambda = -\frac{1}{a}\ln|\beta\lambda| + h,$$

$$\operatorname{Im}\lambda = -\frac{1}{a}\ln|\beta\lambda| - h,$$

а прямые

$$l_m^{(2.1)} = \left\{ \lambda : \operatorname{Im}\lambda = -\frac{2m\pi}{a} - \frac{\theta}{a} \right\},$$

$$l_m^{(2.2)} = \left\{ \lambda : \operatorname{Im}\lambda = \frac{2m\pi}{a} - \frac{\theta}{a} + \frac{\pi}{a} \right\},$$

разбивают области $\Omega_{Rh}^{(2.j)}$ на криволинейные четырехугольники $T_m^{(2.j)} = T_m^{(2.j)}(R,h)$ с основаниями. лежащими на прямых $l_m^{(2.j)}$ и $l_{m+1}^{(2.j)}$ и боковыми границами

$$\operatorname{Re}\lambda = -\frac{1}{a}\ln|\beta\lambda| + h,$$

$$\operatorname{Re}\lambda = -\frac{1}{a}\ln|\beta\lambda| - h.$$

Длину диагонали четырехугольника $T_m^{(k.j)}$ обозначим через $d_m^{(k.j)}$:

$$d_m^{(k.j)} = \sup_{\lambda, z \in T_m^{(k.j)}} |\lambda - z|.$$

Имеет место

Лемма 1. *При ограничениях 1^0, при фиксированным R и h последовательность $d_m^{(k.j)}$ ограничена, т.е.*

$$d_m^{(k.j)} \le d, \; (j = 1,2), \; (k = 1,2), \; m = N_0, \, N_0 + 1, \ldots,$$

где $d = d(R,h)$, некоторое положительное число.

Положим ($[*]-$ целый часть $*$),

$$S_0 = 1 + \left[\frac{ad}{2\pi} \right],$$

$$z_{1\nu} = \frac{2\nu\pi}{a}, \quad z_{2\nu} = \frac{2\nu\pi}{a} i,$$

$$\eta_{mj}^{(k.\nu)} = \lambda_{jm}^{(k.0)} + z_{k\nu},$$
$$T_m^{(k.j,\delta)} = T_m^{(k.j)} \setminus \bigcup_{|\nu|\le s_0} S_\delta\left(\eta_{mj}^{(k.\nu)}\right),$$
$$S_\delta(z_0) = \{\lambda : |\lambda - z_0| < \delta\},$$
$$\Omega_{1Rh} = \left\{\lambda : |\lambda| \ge R, \operatorname{Im}\lambda \le -h - \frac{1}{a}\ln|\beta\lambda|\right\} \cup \left\{\lambda : |\lambda| \ge R, \operatorname{Im}\lambda \ge h - \frac{1}{a}\ln|\beta\lambda|\right\},$$
$$\Omega_{2Rh} = \left\{\lambda : |\lambda| \ge R, \operatorname{Re}\lambda \le -h - \frac{1}{a}\ln|\beta\lambda|\right\} \cup \left\{\lambda : |\lambda| \ge R, \operatorname{Re}\lambda \ge h - \frac{1}{a}\ln|\beta\lambda|\right\}.$$
$$\Omega_{k\delta} = \left\{\lambda : [|\lambda| \le d] \setminus \bigcup_{|\nu|\le s_0} S_\delta(z_{k\nu})\right\},$$
$$\varphi_1(\lambda) = e^{ia\lambda} - 1, \quad \varphi_2(\lambda) = e^{-a\lambda} - 1.$$
Обозначим через $\chi_{k\delta}$ и $M_{k\delta}$ минимум и максимум функции $|\varphi_k(\lambda)|$ в области $\Omega_{k\delta}$ соответственно.

Пользуясь результатами леммы 1доказывается следующая

Лемма 2. *При ограничениях* 1^0, *существуют такие достаточно большие числа* R, h, N_0 *и достаточно малое число* $\delta(\delta > 0)$ *и такое положительное число* α_0 *что при* $k = 1,2$ *имеют место следующие утверждения:*
$$\left|\lambda_{jm}^{(k)}\right| < \left|\lambda_{jm+1}^{(k)}\right| < \ldots, \qquad \lim_{m\to\infty}\left|\lambda_{jm}^{(k)}\right| = \infty;$$
$$\left|\lambda_{jm}^{(k)} - \lambda_{jm}^{(k.0)}\right| < \delta/2; \left|\lambda_{jm}^{(k)} - \lambda_{jl}^{(k)}\right| > \frac{2\pi}{a} - \alpha_0, \left|\lambda_{jm}^{(k.0)} - \lambda_{jl}^{(k.0)}\right| > \frac{2\pi}{a} - \alpha_0,$$
при $m \ne l, m, l \ge N_0$;
$$\overline{S}_\delta\left(\lambda_{jm}^{(k)}\right), \quad \overline{S}_\delta\left(\lambda_{jm}^{(k.0)}\right) \subset \Omega_{Rh}^{(k.j)};$$
$$\overline{S}_\delta\left(\lambda_{jm}^{(k.0)}\right) \cap \overline{S}_\delta\left(\lambda_{jl}^{(k.0)}\right) = \phi, \ (\phi\text{-пустое множество}),$$
$$\overline{S}_\delta\left(\lambda_{jm}^{(k)}\right) \cap \overline{S}_\delta\left(\lambda_{jl}^{(k)}\right) = \phi, \ \text{при} \quad m \ne l;$$
$$S_\delta\left(\lambda_{jm}^{(k.0)}\right) \subset T_m^{(k.j)}, \quad S_\delta\left(\lambda_{jm}^{(k)}\right) \subset T_m^{(k.j)};$$
$$\overline{S}_\delta\left(\lambda_{jl}^{(k.0)}\right) \cap T_m^{(k.j)} = \phi$$
$$\overline{S}_\delta\left(\lambda_{jl}^{(k)}\right) \cap T_m^{(k.j)} = \phi, \ \text{при} \quad m \ne l.$$

Используясь утверждениями теоремы и леммами 1 и 2 доказывается следующая

Теорема 2. *При ограничениях* 1^0, *существуют достаточно большие числа* R, h, N_0 *и достаточно малое число* $\delta(\delta > 0)$ *и некоторое положительное число* $\alpha_0(\alpha_0 > 0)$, *что*

$i)$ при $m \ge N_0$ множества $T_m^{(k.j.\delta)}$ непустые, односвязные, замкнутые, ограниченные области;

$ii)$ имеют место неравенства

$$2M_{1\delta} \ge \left| \frac{1}{q_1(x)} \Delta_1(\lambda) \right| \ge \frac{1}{2} \chi_{1\delta} > 0,$$

$$2M_{1\delta} \ge \left| \overline{e}^{i\lambda a} \Delta_1(\lambda) \right| \ge \frac{1}{2} \chi_{1\delta}, \ \text{при} \ \lambda \in T_m^{(1.j.\delta)};$$

$$\left| \frac{1}{q_1(\lambda)} \Delta_1(\lambda) \right| \ge \alpha_0,$$

$$\left| \overline{e}^{i\lambda a} \Delta_1(\lambda) \right| \ge \alpha_0, \ \text{при} \ \lambda \in \Omega_{1Rh};$$

$$2M_{2\delta} \ge \left| \overline{e}^{a\lambda} \Delta_2(\lambda) \right| \ge \frac{1}{2} \chi_{2\delta} > 0,$$

$$2M_{2\delta} \ge \left| q_2(\lambda) \Delta_2(\lambda) \right| \ge \frac{1}{2} \chi_{2\delta}, \ \text{при} \ \lambda \in T_m^{(2.j.\delta)};$$

$$\left| \overline{e}^{a\lambda} \Delta_2(\lambda) \right| \ge \alpha_0,$$

$$\left| q_2(\lambda) \Delta_2(\lambda) \right| \ge \alpha_0, \ \text{при} \ \lambda \in \Omega_{2Rh}.$$

Существуют последовательности типа окружности замкнутых расширяющихся контуров $\Gamma_\nu^{(k)}$ (включенные друг в друга) с радиусами $R_\nu^{(k)}$ и центрами в начале координат что

$i)$ $R < R_1^{(k)} < R_2^{(k)} < \cdots, \quad \lim\limits_{\nu \to \infty} R_\nu^{(k)} = \infty,$

$ii)$ имеют место неравенства

$$\left| \frac{1}{q_1(\lambda)} \Delta_1(\lambda) \right| \ge \alpha_0,$$

$$\left| \overline{e}^{i\lambda a} \Delta_1(\lambda) \right| \ge \alpha_0, \ \text{при} \ \lambda \in \Gamma_\nu^{(1)};$$

$$\left| q_2(\lambda) \Delta_2(\lambda) \right| \ge \alpha_0,$$

$$\left| \overline{e}^{a\lambda} \Delta_2(\lambda) \right| \ge \alpha_0, \ \text{при} \ \lambda \in \Gamma_\nu^{(2)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Гостехиздат, 1951.
2. Qasımov E.A. Elementar riyaziyyat kursunun elmi əsasları. Bakı: Elm, 2016, 498 s.
3. Гасымов Э.А. Метод конечного интегрального преобразования и его приложения. Баку: Элм, 2009, 432 с.

BƏZİ TRANSENDENT TƏNLİKLƏRİN ASİMPTOTİK HƏLL ÜSULLARI

E.A.QASIMOV

XÜLASƏ

Məqalədə bəzi transendent tənliklərin köklərinin asimptotik ifadələri alınır və müəyyən qiymətləndirmələr göstərilir. Bir-birinə daxil olan genişlənən qapalı çevrəvari hamar konturlar ardıcıllığı qurulur və bu konturlar üzrə baxılan tənliklərə daxil olan transendent funksiyaların mütləq qiymətləri üçün aşağıdan müntəzəm qiymətləndirmələr alınır. Alınmış nəticələrdən xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün qeyri-requlyar sərhəd şərtli qarışıq məsələlərin həllində istifadə etmək olar [3].

Açar sözlər: transendent tənliklər, asimptotik həll, aşağıdan qiymətləndirmə.

ASYMPTOTIK METHODS FOR SOLVING SOME TRANSCENDENTAL EQUATIONS

E.A.GASYMOV

SUMMARY

In the paper we obtain asymptotic representations of the roots of some transcendental equations and give some estimations. We constant a sequense of examding cricle type closed smooth contours of included to each other and obtain along these contous approriate uniform lower bounds for the modulus of functions included in the considered transcendental eqution. The results of the paper may be used when solving some mixed problems for partial differential equations with irregular boundary conditions [3].

Keywords: transcendental equations, asymptotic solution, lower bounds.

Поступила в редакцию: 14.10.2019 г.
Подписано к печати: 28.12.2019 г.