

УДК 517.958

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
К ЧИСЛЕННОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ
ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА НА РЕШЕТКЕ ПРОЗРАЧНЫХ
КРУГОВЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ**

Ф.М.ГАСАНОВ

Бакинский Государственный Университет
feyruz.hasanov@inbox.ru

В работе с применением метода интегральных уравнений численно исследуются задачи дифракции точечного источника в дальней зоне на структуре прозрачных периодических цилиндров, поперечные сечения которых есть круг и эллипс.

Ключевые слова: Уравнения Гельмгольца, дискретное преобразование Фурье, интегральное уравнение, формула Грина, задача дифракции, диаграмма направленности.

Решение задачи дифракции электромагнитной волны на периодической прозрачной решетке имеет важное значение для расчета многих устройств, применяемых на практике.

Нас будет интересовать “резонансный” случай, когда длина волны по величине сравнима с периодом решетки, а также сравнима с толщиной неоднородного слоя. В этом случае, решение может быть получено, как правило, только численными методами. Более сложной является задача о возбуждении периодической решетки точечного источника (к такой задаче очевидным образом приводится задача о возбуждении распределенным источником с финитной плотностью).

Здесь необходимо рассматривать уже поле во всем пространстве. Метод решения таких задач с применением метода интегральных уравнений был предложен в [1]. Метод интегральных уравнений позволяет получить исчерпывающую информацию о дифракционном поле. Она позволяет исследовать поле на поверхности тела (токи), поля в ближней зоне и интегральные характеристики полей в дальней зоне.

Рассмотрим задачу о дифракции поля точечного источника на бесконечной прозрачной периодической структуре с периодом a , образованной параллельным переносом цилиндра сечениями D_i , ограниченного контуром Σ , вдоль оси Ox . Для определенности рассмотрим электромаг-

нитное поле, имеющее компоненты E_y, H_x и H_z , т.е. E- поляризации.

Задача о дифракции на бесконечной прозрачной структуре, возбужденной точечным источником, сводится к отысканию решения уравнения Гельмгольца

$$\Delta_{x,z}u(x, z) + K^2(M)u(x, z) = -2\pi\delta(M_0, M_0) \quad (1)$$

во всем пространстве $D_i - D_e$ с условиями непрерывности на Σ

$$u_i = u_e, \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e \quad (2)$$

и условиями излучения, исключающими волны, приходящие из бесконечности.

Здесь $u = E_y, D_e$ - дополняет D_i до полного пространства, а

$$K^2(M) = \begin{cases} k_i^2, M \in D_i \\ k_e^2, M \in D_e, k_i^2 \neq k_e^2 \end{cases}$$

и \bar{n} - внутренняя нормаль к области D_i .

Как показано в [1], в силу дискретного преобразования Фурье

$$V(t, x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(x + na, z)e^{-int}$$

математическая задача дифракции в данном случае сводится к определению в полосе

$$D: \left\{ -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\infty < z < +\infty \right\}$$

решения уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_{x,z}V(t, M) + K^2(M)V(t, M) = \\ = -2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0 + na)\delta(z - z_0)e^{-int} \end{aligned} \quad (3)$$

с условиями непрерывности на контуре Σ

$$V_i = V_e, \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e \quad (4)$$

и условиями излучения на бесконечности. Функция $V(t, x, z)$ удовлетворяет условию Флоке с параметром t при $x = 0, a$:

$$V(t, x + a, z) = e^t V(t, x, z). \quad (5)$$

Решение исходной задачи $u(x, z)$ выражается через функцию $V(t, x, z)$ с помощью обратного преобразования

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(t, x, z) dt. \quad (6)$$

Таким образом, задача дифракции точечного источника на прозрачных периодических структурах сводится к определению решения уравнения (3) с условиями (4) и условиями излучения в полосе

$$D: \left\{ -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\infty < z < +\infty \right\}.$$

Условия излучения для данной задачи сформулируем следующим образом [2]: рассмотрим сечения полосы z_1 и z_2 , выделяющие область, содержащую точечный источник и тело D_i . Учитывая, что точечный источник находится справа от решетки, при $z \leq z_1$ и $z \geq z_2$ можно записать

$$V(t, x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(t) e^{-i\gamma_n^e z} \Psi_n(t, x), \quad z \leq z_1, \quad (7)$$

$$V(t, x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(t) e^{i\gamma_n^e z} \Psi_n(t, x) + G_e(t, M, M_0), \quad z \geq z_2, \quad (8)$$

$$\Psi_n(t, x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i\lambda_n x}, \lambda_n = \frac{t + 2n\pi}{a}, \gamma_n^e = \sqrt{k_e^2 - \lambda_n^2},$$

$$\text{Im}\gamma_n^e > 0; \quad \text{Im}\gamma_n^e = 0, \text{ то } \text{Re}\gamma_n^e > 0.$$

$G_e(t, M, M_0)$ - решение уравнения (3) в полосе D при $k_i^2 = k_e^2 = \text{const}$ с условиями излучения на бесконечности, которое может быть представлено в следующей форме [3]:

$$G_e(t, M, M_0) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_n(t, x) \Psi_n^*(t, x)}{-i\gamma_n^e} e^{\gamma_n^e |z - z_0|}.$$

Формулы (7) и (8) можно рассматривать как аналитическую форму условий излучения, $R_n(t)$ и $T_n(t)$ неизвестные коэффициенты отражения и прохождения, подлежащие определению.

В [1] показано, что если решение задачи для функции $V(t, x, z)$ существует и допускает применение формул Грина, то она удовлетворяет системе интегральных уравнений по контуру Σ :

$$\varphi(t, P_0) + \int_{\Sigma} K_{11}(t, P_0, P) \varphi(t, P) dl_p + \int_{\Sigma} K_{12}(t, P_0, P) \Psi(t, P) dl_p = F_1(t, P_0),$$

$$\Psi(t, P_0) + \int_{\Sigma} K_{21}(t, P_0, P) \varphi(t, P) dl_p + \int_{\Sigma} K_{22}(t, P_0, P) \Psi(t, P) dl_p = F_2(t, P_0),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(t, P) &= V_i(t, P), \Psi(t, P) = \left(\frac{\partial}{\partial n} V(t, P) \right)_i, \\ K_{11}(t, P_0, P) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_p} [G_i(t, P_0, P) - G_e(t, P_0, P)], \\ K_{12}(t, P_0, P) &= \frac{1}{2\pi} [G_i(t, P_0, P) - G_e(t, P_0, P)], \\ K_{21}(t, P_0, P) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial n_p \partial n_p} [G_i(t, P_0, P) - G_e(t, P_0, P)], \end{aligned}$$

$$F_1(t, P_0) = G_e(t, P_0, M_0), F_1(t, P_0) = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} G(t, P_0, M_0),$$

здесь $G_i(t, M, P)$ и $G_e(t, M, P)$ - функции Грина уравнения Гельмгольца в области D с коэффициентами k_i^2 и k_e^2 удовлетворяющих условиям Флоке при $x = 0, a$.

Ядра интегральных уравнений (9) имеют слабую особенность при $P \rightarrow P_0$. Исследования, связанные со способом выделения особенности ядра в явном виде $\ln \frac{1}{r_{PP_0}}$ содержится в [1].

Для численного решения системы интегральных уравнений используется метод Крылова-Боголюбова, в котором неизвестная функция аппроксимируется кусочно-постоянной функцией и интегральное уравнение сводится к алгебраической системе линейных уравнений. Решая систему линейных уравнений, найдем $V(t, x, z)$ и $\frac{\partial}{\partial n} V(t, x, z)$ в точках Σ . С помощью формулы Грина, найдем $V(t, x, z)$ внутренней точке полосы D , а используя (5) и (6) определим полное поле $u(x, z)$ в любой точке пространства. Нас будет интересовать поле в области $\left\{-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, z_1 \leq z \leq z_2\right\}$, а также асимптотическое поведение поля при $r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

В [4], с помощью метода интегральных уравнений, впервые рассчитаны и проанализированы полные значения электрического и магнитного полей на поверхностях центрального и соседних с центральными цилиндров, поперечные сечения которых круг и эллипс.

Как показано в [5], при $r \rightarrow \infty$ поле $u(x, z)$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$u(r, \varphi) = (2\pi k_e \sqrt{\epsilon r})^{-\frac{1}{2}} F_T(\varphi) \exp \left\{ i k_e \sqrt{\epsilon r} + i \frac{\pi}{4} \right\}, z \leq z_1,$$

$$u(r, \varphi) = u^0(r, \varphi) + (2\pi k_e \sqrt{\epsilon r})^{-\frac{1}{2}} F_R(\varphi) \exp \left\{ i k_e \sqrt{\epsilon r} + i \frac{\pi}{4} \right\}, z \geq z_2,$$

где $F_T(\varphi)$ и $F_R(\varphi)$ - диаграммы направленности рассеянного излучения. Они определяются гармониками

$$F_T(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{a} T_m(k_e a \sin \varphi - 2m\pi), 2\pi m \leq k_e a \sin \varphi < k_e a \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \sqrt{a} T_0(k_e a \sin \varphi), 0 \leq k_e a \sin \varphi < 2\pi, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \sqrt{a} T_{-m}(k_e a \sin \varphi + 2\pi m), -k_e a < k_e a \sin \varphi \leq -2\pi m, \end{cases}$$

где $m = \left[\frac{k_e a}{2\pi} \right], \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}, -k_e a < k_e a \sin \varphi < k_e a$.

Рис. 1 и 2 соответствуют параметрам круглых цилиндров

$$K_e d = \frac{\pi}{2}, \varepsilon = 5, \frac{a}{d} = 2,5, \frac{x_0}{d} = 0, \frac{z_0}{d} = 1.$$

На диаграмме $F_R(\varphi)$ лепестков, соответствующий углу $\varphi = 90^\circ$, объясняется отражением от всей совокупности цилиндров, удаленных от источника, при скользящем падении возбуждающего поля. Лепесток при $\varphi = 33^\circ$ также объясняется скользящим падением возбуждающего поля на решетку в области удаленных цилиндров.

Проводилось сравнение результатов, полученных с помощью описанного алгоритма, получено хорошее совпадение с результатами работы [6] (аналогичный метод Галеркина).

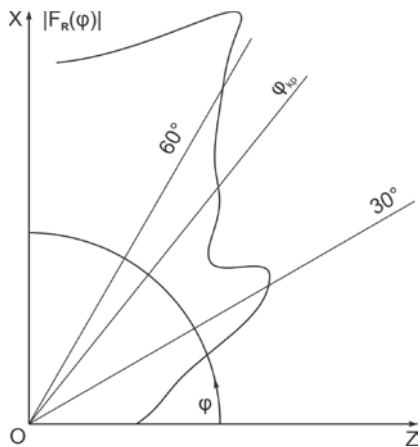


Рис. 3

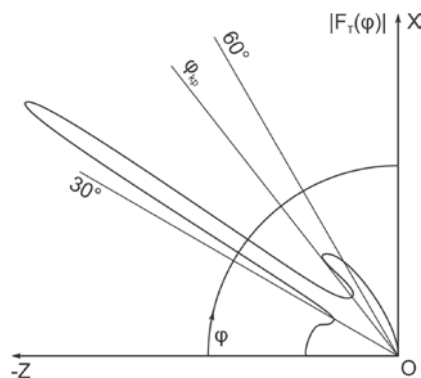


Рис. 4

Рис. 3 и 4 соответствуют геометрии решетки

$$K_e b_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{b_1}{b_2} = 2, \frac{b_1}{a} = 0.4, \varepsilon = 5, \frac{x_0}{b_1} = 0, \frac{z_0}{b_1} = 2.$$

Угловое распределение соответствует случаю формирования поверхностной волны, бегущей вдоль структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасанов Ф.М., Ильинский А.С. Численный метод решения задачи дифракции на периодической системе прозрачных цилиндров. Сб. Численные методы электродинамики. М.: МГУ, 1976, с. 48-56.
2. Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волноводов. ДАН, 180, 1951, с. 345-347.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1999.
4. Гасанов Ф.М. Результаты численного исследования токов в задаче дифракции точечного источника на решетке прозрачных цилиндров. BDU-nun xəbərləri, №4, 2001, с. 100-105.
5. Ильинский А.С. Плоская задача возбуждения прозрачной периодической структуры точечным источником. Сб. Вычислительные методы и программирование. М.:

МГУ, XXIV, 1975, с. 220-235.

6. Быков А.А., Ильинский А.С. Результаты исследования дифракции поля точечного источника на решетке прозрачных круговых цилиндров. Сб. Численные методы электродинамики. М.: МГУ, 1980, с. 16-25.

DAİRƏVİ VƏ ELLİPTİK ŞƏFFAF SİLİNDİRLƏR STRUKTURUNDA NÖQTƏVİ MƏNBƏYİN DİFRAKSİYA MƏSƏLƏSİNİN UZAQ ZONADA ƏDƏDİ TƏDQIQINƏ İNTEQRAL TƏNLİKLƏR ÜSULUNUN TƏTBİQİ

F.M.HƏSƏNOV

XÜLASƏ

Məqalədə inteqral üsulunun tətbiqi ilə en kəsiyi dairə və ellips olan şəffaf silindirlər strukturunda nöqtəvi mənbəyin difraksiya məsələsi uzaq zonada ədədi tədqiq olunur.

Açar sözlər: Helmhols tənliyi, diskret Furiye çevirməsi, inteqral tənlik, Qrin düsturu, difraksiya məsələsi, yönəlmə diaqramı.

APPLICATION OF THE METHOD OF INTEGRAL EQUATIONS TO NUMERICAL INVESTIGATION OF THE PROBLEM OF DEFRACTION OF THE POINT SOURCE FIELD ON THE GRID OF TRANSPARANT CIRCULAR AND ELLIPTIC CYLINDERS

F.M. GASANOV

SUMMARY

In the paper the problem of defraction of point source is numerically investigated with application of the method of integral equations in the remote zone on the structure of transparent periodic cylinders whose cross sections are a circle and an ellipse.

Key words: Helmholtz equation, discrete Fourier transformations, integral equation, Green's formula, problem of defrection, focus diagram.

Поступила в редакцию: 16.09.2019 г.

Подписано к печати: 28.12.2019 г.