УДК 517.9

ОТСУТСТВИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С БИГАРМОНИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Ш.Г.БАГЫРОВ
Бакинский Государственный Университет,
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
sh_bagirov@yahoo.com

Во внешности шара рассматривается полулинейное параболическое уравнение с бигармоническим оператором в главной части и исследуются вопросы отсутствия глобальных решений этого уравнения. Получено достаточное условие отсутствия глобальных решений. Доказательство основано на методе пробных функций.

Ключевые слова; Полулинейное параболическое уравнение, глобальное решение, критический показатель, метод пробных функций.

Введем следующих обозначений:$x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$, $n>4$, $r=|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, $B_R=\{x;|x|<R\}$, $B'_R=\{x;|x|>R\}$, $B_{R_1,R_2}=\{x;R_1<|x|<R_2\}$, $Q_R=B_R\times(0;+\infty)$, $Q'_R=B'_R\times(0;+\infty)$, $\partial B_R=\{x;|x|=R\}$, $\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $C^{4,1}_{x,t}(Q'_R)$-множество функций, четырежде непрерывно дифференцируемых по x и непрерывно дифференцируемых по t.

В области Q'_R рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} |x|^\lambda\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\Delta^2u^p+\dfrac{C_0}{|x|^4}u^p+|x|^\sigma|u|^q & (1.1)\\ u|_{t=0}=u_0(x)\ge 0 & (1.2)\\ \displaystyle\int_0^\infty\int_{\partial B_R}udxdt\ge 0,\quad \int_0^\infty\int_{\partial B_R}\Delta u^p dxdt\le 0, & (1.3)\end{cases}$$

где $q>1$, $0\le C_0\le\left(\frac{n(n-4)}{4}\right)^2$, $\sigma>-4$, $u_0(x)\in C(B'_R)$, $\Delta^2u=\Delta(\Delta u)$, $\Delta u=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}$.

Будем изучать вопрос о существовании неторицательных глобальных решений задачи (1.1)-(1.3). Решение задачи будем понимать в классическом смысле. Функцию $u(x,t) \in C^{4,1}_{x,t}(Q'_R) \cap C(B'_R \times [0,+\infty)$ будем называть решением задачи (1.1)-(1.3), если $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в каждой точке Q'_R, условию (1.2) при $t=0$ и условию (1.3) при $|x|=R$.

Проблемы существования и не существования глобальных решений для различного класса дифференциальных уравнений и неравенств играют важную роль в теории и приложениях, поэтому привлекают постоянное внимание математиков и им посвящены большое число работ(см.[2], [3], [4], [5],[11],[12]).

Результаты работы Фуджиты [1] вызвали большой интерес к проблеме отсутствие глобальных решений, и они были расширены в нескольких направлениях. Например, вместо R^n рассмотрены различные ограниченные и неограниченные области, или были рассмотрены более общие операторы, чем оператор Лапласа и нелинейности иного типа. Обзор таких работ имеется в статье [6], в монографии [9] и в книге [7]. Слабо нелинейные уравнения с бигармоническим оператором тоже исследованы различными авторами (см.[8],[13],[14])

В представленной работе используя технику пробных функций, разработанный Митидиери и Похожаевым в работах [9],[10], мы находим критический показатель отсутствие глобального решения задачи (1.1)-(1.3).

1. Вспомогательные факты

В $R^n\backslash\{0\}$ рассмотрим линейное уравнение

$$\Delta^2 u - \frac{C_0}{|x|^4}u = 0. \tag{2.1}$$

Найдем радиальное решение этого уравнения. Если $u(x)=u(r)$ радиальное решение уравнения (2.1), то

$$\Delta^2 u - \frac{C_0}{|x|^4}u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{C_0}{|x|^4}u =$$

$$= \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + \frac{2(n-1)}{r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{(n-1)(n-3)}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{(n-1)(n-3)}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{C_0}{r^4}u = 0.$$

Это есть уравнение Эйлера и его характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 2(n-1)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) +$$

$$+(n-1)(n-3)(\lambda^2 - 2\lambda) - C_0 = 0. \tag{2.2}$$

Легко проверить, что

$$\lambda = -\frac{n-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 1 + \sqrt{(n-2)^2 + C_0}},$$

$$\lambda = -\frac{n-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 1 - \sqrt{(n-2)^2 + C_0}}$$

все корни уравнения (2.2).

Для краткости записи обозначим:

$$(n-2)^2 + C_0 = D, \quad \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 1 \pm \sqrt{\mathrm{D}}} = \alpha_{\pm}.$$

Рассмотрим функцию

$$\xi(|x|) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)|x|^{-\frac{n-4}{2}+\alpha_-} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)|x|^{-\frac{n-4}{2}-\alpha_-} - |x|^{-\frac{n-4}{2}-\alpha_+}.$$

Очевидно, что $\xi(|x|)$ радиальное решение уравнения (2.1) в $R^n\backslash\{0\}$.

Покажем, что $\xi(x)$ удовлетворяет следующих условий:

$$\xi|_{|x|=1} = 0, \quad \left.\frac{\partial\xi}{\partial r}\right|_{|x|=1} \geq 0, \quad \Delta\xi|_{|x|=1} = 0, \quad \left.\frac{\partial(\Delta\xi)}{\partial r}\right|_{|x|=1} \leq 0. \qquad (2.3)$$

$$\xi(x)|_{|x|=1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right) - 1 = 0,$$

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial r}\right|_{|x|=1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n-4}{2} + \alpha_-\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n-4}{2} - \alpha_-\right) - \left(-\frac{n-4}{2} - \alpha_+\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha_- + \sqrt{D} - \alpha_+\right) - \frac{1}{2}\left(\alpha_- - \sqrt{D} + \alpha_+\right) + \alpha_+ = \sqrt{D} \geq 0.$$

$$\Delta\xi|_{|x|=1} = \left.\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)\right|_{|x|=1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n-4}{2} + \alpha_-\right)\left(\frac{n}{2} + \alpha_-\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n-4}{2} - \alpha_-\right)\left(\frac{n}{2} - \alpha_-\right) - \left(-\frac{n-4}{2} - \alpha_+\right)\left(\frac{n}{2} - \alpha_+\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n(n-4)}{4} + \alpha_-^2 + 2\alpha_-\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n(n-4)}{4}+\alpha_-^2-2\alpha_-\right)-\left(-\frac{n(n-4)}{4}+\alpha_+^2-2\alpha_+\right)=$$

$$=-\frac{n(n-4)}{4}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)-1\right)+$$

$$+\alpha_-^2-\alpha_+^2+\alpha_-+\sqrt{D}-\alpha_+-\alpha_-+\sqrt{D}-\alpha_++2\alpha_+=$$

$$=-\sqrt{D}-\sqrt{D}+\sqrt{D}+\sqrt{D}=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\Delta\xi)\Big|_{|x|=1}=\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial r^3}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}-\frac{n-1}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)\Big|_{|x|=1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left[\left(-\frac{n-4}{2}+\alpha_-\right)\left(-\frac{n-4}{2}+\alpha_--1\right)\left(-\frac{n}{2}+\alpha_-\right)+\right.$$

$$\left.+(n-1)\left(-\frac{n-4}{2}+\alpha_+\right)\left(-\frac{n}{2}+\alpha_-\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left[\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_-\right)\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_--1\right)\left(-\frac{n}{2}-\alpha_-\right)+\right.$$

$$\left.+(n-1)\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_-\right)\left(-\frac{n}{2}-\alpha_-\right)\right]-$$

$$-\left[\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_+\right)\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_+-1\right)\left(-\frac{n}{2}-\alpha_+\right)+\right.$$

$$\left.+(n-1)\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_+\right)\left(-\frac{n}{2}-\alpha_+\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n-4}{2}+\alpha_-\right)\left(-\frac{n}{2}+\alpha_-\right)\left(\frac{n}{2}+\alpha_-\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_-\right)\left(-\frac{n}{2}-\alpha_-\right)\left(\frac{n}{2}-\alpha_+\right)-$$

$$-\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_+\right)\left(-\frac{n}{2}-\alpha_+\right)\left(\frac{n}{2}-\alpha_+\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n-4}{2}+\alpha_-\right)\left(\alpha_-^2-\frac{n^2}{4}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_-\right)\left(\alpha_-^2-\frac{n^2}{4}\right)-\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_+\right)\left(\alpha_+^2-\frac{n^2}{4}\right)=$$

$$= \left(2 - n - \sqrt{D}\right)\left(-\frac{n-4}{2} + \frac{1}{2}\left(\alpha_- + \sqrt{D} - \alpha_+ - \alpha_- + \sqrt{D} - \alpha_+\right)\right) +$$

$$+\left(2 - n + \sqrt{D}\right)\left(\frac{n-4}{2} + \alpha_+\right) = \left(2 - n - \sqrt{D}\right)\left(-\frac{n-4}{2} + \sqrt{D} - \alpha_+\right) +$$

$$+\left(2 - n + \sqrt{D}\right)\left(\frac{n-4}{2} + \alpha_+\right) = -\left(2 - n - \sqrt{D}\right)\left(\frac{n-4}{2} + \alpha_+\right) +$$
$$+(2-n)\sqrt{D} - D + \left(2 - n + \sqrt{D}\right)\left(\frac{n-4}{2} + \alpha_+\right) =$$

$$= \sqrt{D}\,\frac{n-4}{2} - \alpha_+(2-n) + \sqrt{D}\alpha_+ + (2-n)\sqrt{D} - D +$$

$$+\sqrt{D}\,\frac{n-4}{2} + (2-n)\alpha_+ + \sqrt{D}\alpha_+ = 2\sqrt{D}\alpha_+ - 2\sqrt{D} - D =$$

$$= \sqrt{D}\left(2\alpha_+ - \sqrt{D} - 2\right) \le 0.$$

На самом деле, поскольку $C_0 \ge 0$, то

$$(n-2)^2 \le (n-2)^2 + C_0 = D.$$

Тогда

$$4 + 4\sqrt{D} + (n-2)^2 \le 4 + 4\sqrt{D} + D.$$

Отсюда

$$4\left(\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 1 + \sqrt{D}\right) \le \left(2 + \sqrt{D}\right)^2$$

$$4\alpha_+^2 \le \left(2 + \sqrt{D}\right)^2,$$

$$2\alpha_+ \le 2 + \sqrt{D}.$$

Значит

$$2\alpha_+ - \sqrt{D} - 2 \le 0.$$

2. Формулировка основного результата и доказательство

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $n > 4$, $\sigma > -4$, $1 \le p < q$, $0 \le C_0 \le (\frac{n(n-4)}{4})^2$ *и* $q \le p + \frac{\sigma+4}{\frac{n+4}{2}+\lambda+\alpha_-}$. *Если* $u(x,t)$ *решение задачи (1.1)-(1.3), то* $u(x,t) \equiv 0$.

Доказательство.

Для простаты записи возьмем $R = 1$. Предположим, что $u(x) \ge 0$ решение задачи (1.1)-(1.3) в Q_R' .

Рассмотрим следующих функций:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{при} \quad 1\le |x|\le \rho\\ \frac{1}{2}\cos(\pi(\frac{|x|}{\rho}-1))+\frac{1}{2})^{\tau}, npu & \rho\le |x|\le 2\rho\\ 0, & \text{при} \quad |x|\ge 2\rho\end{cases}$$

$$T_\rho(t)=\begin{cases}1, & \text{при}\, 0\le t\le \rho^k\\ \frac{1}{2}\cos(\pi(\rho^{-k}t-1))+\frac{1}{2})^{\mu}, npu & \rho^k\le t\le 2\rho^k\\ 0, & \text{при} \quad t\ge 2\rho^k\end{cases}$$

где β, μ большие положительные числа, причем β такое, что при $|x| = 2\rho$

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \frac{\partial^3\psi}{\partial r^3} = 0, \tag{3.1}$$

а κ определим потом.

Умножим уравнение (1.1) на функцию

$$\psi(x,t) = T_\rho(t)\xi(x)\varphi(x)$$

и интегрируем по области Q_1'.

После интегрирование по частям получим

$$\int\limits_{Q_1'} u^q|x|^\sigma T_\rho \xi\varphi dxdt = -\int\limits_{Q_1'} |x|^\lambda u\xi\varphi \frac{dT\rho}{dt} dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_1'} u^p T_\rho \Delta^2(\xi\varphi)dxdt - \int\limits_{Q_1'} \frac{C_0}{|x|^4} u^p T_\rho \xi\varphi dxdt -$$

$$-\int\limits_{Q_1'} |x|^\lambda u_0(x)\xi(x)\varphi(x)dx + \int\limits_0^\infty T_\rho(t)dt \times$$

$$\times\left[\int\limits_{\partial B_{1,2\rho}} \frac{\partial(\Delta u^p)}{\partial\nu}\xi\varphi ds - \int\limits_{\partial B_{1,2\rho}} \Delta u^p \frac{\partial(\xi\varphi)}{\partial\nu} ds +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\partial B_{1,2\rho}} \frac{\partial u^p}{\partial\nu}\Delta(\xi\varphi)ds - \int\limits_{\partial B_{1,2\rho}} u^p \frac{\partial}{\partial\nu}\big(\Delta(\xi\varphi)\big)ds\right] \tag{3.2}$$

Оценим интегралы в квадратной скобке, учитывая (2.3), (3.1) и условию (1.3). Получим:

$$\int\limits_{\partial B_{1,2\rho}} \frac{\partial(\Delta u^p)}{\partial\nu}\xi\varphi ds = 0,$$

$$-\int_{\partial B_{1,2\rho}} \Delta u^p \frac{\partial(\xi\varphi)}{\partial \nu} ds = -\int_{|x|=1} \Delta u^p \frac{\partial(\xi\varphi)}{\partial \nu} ds - \int_{|x|=2\rho} \Delta u^p \frac{\partial(\xi\varphi)}{\partial \nu} ds =$$

$$= \int_{|x|=1} \Delta u^p \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\varphi + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) ds - \int_{|x|=2\rho} \Delta u^p \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\varphi + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) ds =$$

$$= \int_{|x|=1} \Delta u^p \frac{\partial \xi}{\partial r} ds = \sqrt{D} \int_{|x|=1} \Delta u^p ds \le 0$$

в силу (1.3),

$$\int_{\partial B_{1,2\rho}} \frac{\partial u^p}{\partial \nu} \Delta(\xi\varphi) ds = \int_{\partial B_{1,2\rho}} \frac{\partial u^p}{\partial \nu} (\Delta\xi\varphi + 2(\nabla\xi, \nabla\varphi) + \xi\Delta\varphi) ds =$$

$$= -\int_{|x|=1} \frac{\partial u^p}{\partial r} \Delta\xi ds = 0$$

по условию (2,3)

$$-\int_{\partial B_{1,2\rho}} u^p \frac{\partial}{\partial \nu}\big(\Delta(\xi\varphi)\big) ds = -\int_{|x|=1} u^p \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta\xi\varphi + 2(\nabla\xi, \nabla\varphi) +$$

$\xi\Delta\varphi) ds =$

$$= \int_{|x|=1} u^p \frac{\partial(\Delta\xi)}{\partial r} ds = \sqrt{D}\big(2\alpha_+ - \sqrt{D} - 2\big) \int_{|x|=1} u^p ds \le 0.$$

Поскольку $\int_{B_1'} |x|^\lambda u_0(x)\xi(x)\varphi(x) dx \ge 0$, $\int_0^\infty T_\rho(t) dt > 0$, то из (3.2)

$$\int_{Q_1'} u^q |x|^\sigma T_\rho \xi\varphi dx dt \le -\int_{Q_1'} |x|^\lambda u\xi\varphi \frac{dT_\rho}{dt} dx dt +$$

$$+ \int_{Q_1'} u^p T_\rho \Delta^2(\xi\varphi) dx dt - \int_{Q_1'} \frac{C_0}{|x|^4} u^p T_\rho \xi\varphi dx dt =$$

$$= -\int_{Q_1'} u^p \xi\varphi \frac{dT_\rho}{dt} dx dt + \int_{Q_1'} u^p T_\rho \varphi \left(\Delta^2\xi - \frac{C_0}{|x|^4}\xi\right) dx dt +$$

$$+ \int_{Q_1'} u^p T_\rho \Big[4(\nabla(\Delta\xi), \nabla\varphi) + 4\big(\nabla\xi, \nabla(\Delta\varphi)\big) + 2\Delta\xi\Delta\varphi +$$

$$+4 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\Big] dx dt \le$$

$$\le -\int_{\rho^\kappa}^{2\rho^\kappa} \int_{Q_1'} u\xi\varphi \frac{dT_\rho}{dt} dx dt + \int_0^{2\rho^\kappa} \int_{B_{\rho,2\rho}} u^p T_\rho J(\xi, \varphi) dx dt, \qquad (3.3)$$

где через $J(\xi, \varphi)$ обозначили выражение в квадратной скобке, т.е.

$$J(\xi,\varphi) \equiv 4(\nabla(\Delta\xi),\nabla\varphi) + 4\big(\nabla\xi,\nabla(\Delta\varphi)\big) + 2\Delta\xi\Delta\varphi + 4\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Используя неравенство Гельдера из (3.3) получим, что

$$\int_{Q_1'} u^q|x|^\sigma T_\rho\xi\varphi dxdt \le \left(\int_{\rho^\kappa}^{2\rho^\kappa}\int_{Q_1'} u^q|x|^\sigma T_\rho\xi\varphi dxdt\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times\left(\int_{\rho^\kappa}^{2\rho^\kappa}\int_{Q_1'}\frac{\left|\frac{dT_\rho}{dt}\right|^{q'}|x|^{\lambda q'}\xi\varphi}{T_\rho^{q'-1}|x|^{\sigma(q'-1)}}dxdt\right)^{\frac{1}{q'}} +$$

$$+\left(\int_0^{2\rho^\kappa}\int_{B_{\rho,2\rho}} u^q|x|^\sigma T_\rho\xi\varphi dxdt\right)^{\frac{1}{\beta}}\left(\int_0^{2\rho^\kappa}\int_{B_{\rho,2\rho}}\frac{|J(\xi,\varphi)|^{\beta'}T_\rho}{\xi^{\beta'-1}\varphi^{\beta'-1}|x|^{\sigma(\beta'-1)}}dxdt\right)^{\frac{1}{\beta'}}, \quad (3.4)$$

где $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1, \beta=\frac{q}{p}, \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta'}=1$. Отсюда, получим

$$\int_{Q_1'} u^q|x|^\sigma T_\rho\xi\varphi dxdt \le C_1\int_{\rho^\kappa}^{2\rho^\kappa}\int_{Q_1'}\frac{\left|\frac{dT_\rho}{dt}\right|^{q'}|x|^{\lambda q'}\xi\varphi}{T_\rho^{q'-1}|x|^{\sigma(q'-1)}}dxdt +$$

$$+C_2\int_0^{2\rho^\kappa}\int_{B_{\rho,2\rho}}\frac{|J(\xi,\varphi)|^{\beta'}}{\xi^{\beta'-1}\varphi^{\beta'-1}|x|^{\sigma(\beta'-1)}}dxdt. \quad (3.5)$$

Сделав замену $t=\rho^\kappa s$, $r=\rho\theta$, $\tilde{T}(s)=T_\rho(\rho^\kappa s)$, $\tilde{\xi}(\theta)=\xi(\rho\theta)$, $\tilde{\varphi}(\theta)=\varphi(\rho\theta)$, оценим интегралы в правой части (3.5).

$$I_1 \equiv \int_{\rho^\kappa}^{2\rho^\kappa}\int_{Q_1'}\frac{\left|\frac{dT_\rho}{dt}\right|^{q'}|x|^{\lambda q'}\xi\varphi}{T_\rho^{q'-1}|x|^{\sigma(q'-1)}}dxdt \le$$

$$\le \int_{\rho^\kappa}^{2\rho^\kappa}\frac{\left|\frac{dT_\rho}{dt}\right|^{q'}}{T_\rho^{q'-1}}dt\int_{B_{1,2\rho}}|x|^{\lambda q'}|x|^{-\sigma(q'-1)}\xi\varphi dx \le$$

$$\le C\rho^{-\kappa q'+\kappa}\int_1^2\frac{\left|\frac{d\tilde{T}}{ds}\right|^{q'}}{\tilde{T}^{(q'-1)}}ds\int_1^{2\rho} r^{-\frac{n-4}{2}+\alpha_-}r^{\lambda q'-\sigma(q'-1)}r^{n-1}dr \le$$

$$\le C\rho^{\kappa(1-q')-\frac{n-4}{2}+\alpha_-+\lambda q'-\sigma(q'-1)+n}A_1(\tilde{T}) =$$

$$= C\rho^{\kappa(1-q')+\frac{n+4}{2}+\alpha_-+\lambda q'-\sigma(q'-1)}A_1(\tilde{T}),$$

где

$$A_1(\tilde{T}) = \int_1^2 \frac{\left|\frac{d\tilde{T}}{ds}\right|^{q'}}{\tilde{T}^{(q'-1)}}ds.$$

$$I_2 \equiv \int_0^{2\rho^\kappa} \int_{B_{\rho,2\rho}} \frac{|J(\xi,\varphi)|^{\beta'}T_\rho}{\xi^{\beta'-1}\varphi^{\beta'-1}|x|^{\sigma(\beta'-1)}}dxdt =$$

$$= \int_0^{2\rho^\kappa} T_\rho(t)dt \int_{B_{\rho,2\rho}} \frac{|J(\xi,\varphi)|^{\beta'}}{\xi^{\beta'-1}\varphi^{\beta'-1}|x|^{\sigma(\beta'-1)}}dx. \quad (3.6)$$

Оценим каждое слагаемое $J(\xi,\varphi)$ в отдельности.

$$|(\nabla(\Delta\xi),\nabla\varphi)| = \left|\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial r^3}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}-\frac{n-1}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right| \le$$

$$\le Cr^{-\frac{n-4}{2}+\alpha_--3}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|$$

$$|\Delta\xi\Delta\varphi| = \left|\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right| \le$$

$$\le C_5r^{-\frac{n-4}{2}+\alpha_--2}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|,$$

$$\left|\left(\nabla\xi,\nabla(\Delta\varphi)\right)\right| \le$$

$$\le C_6r^{-\frac{n-4}{2}+\alpha_--1}\left(\left|\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^3}\right|+\frac{n-1}{r}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right|+\frac{n-1}{r^2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|\right),$$

$$\left|\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right| =$$

$$= \left|\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\frac{x_i}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{x_i}{r}\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}\frac{x_ix_j}{r^2}+\frac{\partial\xi}{\partial r}\left(\frac{\delta_{ij}}{r}-\frac{x_ix_j}{r^3}\right)\right)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\frac{x_i x_j}{r^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{\delta_{ij}}{r}-\frac{x_i x_j}{r^3}\right)\right)\Bigg|\le$$

$$\le C_7\left(\left|\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}\right|+\frac{1}{r}\left|\frac{\partial\xi}{\partial r}\right|\right)\left(\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right|+\frac{1}{r}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|\right)\le$$

$$\le C_8 r^{-\frac{n-4}{2}+\alpha_- -2}\left(\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right|+\frac{1}{r}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|\right).$$

Используя все это, из (3.6) получим

$$I_2\le C\rho^{\kappa}\int\limits_{\rho}^{2\rho}\frac{r^{\left(-\frac{n-4}{2}+\alpha_- -4\right)\beta'}\left(r\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|+r^2\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right|+r^3\left|\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^3}\right|\right)^{\beta'}r^{n-1}}{r^{\left(-\frac{n-4}{2}+\alpha_-\right)(\beta'-1)+\sigma(\beta'-1)}\varphi^{\beta'-1}}dr.$$

Отсюда

$$I_2\le C_{10}\rho^{\kappa-\frac{n-4}{2}+\alpha_- -4\beta'-\sigma(\beta'-1)+n}\int\limits_{1}^{2}\frac{\left(\theta\left|\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial\theta}\right|+\theta^2\left|\frac{\partial^2\tilde\varphi}{\partial\theta^2}\right|+\theta^3\left|\frac{\partial^3\tilde\varphi}{\partial\theta^3}\right|\right)^{\beta'}}{\theta^{\frac{n-4}{2}-\alpha_- +4\beta'+\sigma(\beta'-1)-n+1}\tilde\varphi^{(\beta'-1)}}d\theta\le$$

$$\le C_{10}\rho^{\kappa+\frac{n+4}{2}+\alpha_- -4\beta'-\sigma(\beta'-1)}A_2(\tilde\varphi),\qquad(3.7)$$

где через $A_2(\tilde\varphi)$ обозначили последний интеграл.

Очевидно, что при больших μ и τ, $A_1(\tilde T)<\infty$, $A_2(\tilde\varphi)<\infty$.

κ возьмем так, чтобы

$$\kappa-4\beta'-\sigma(\beta'-1)=\kappa(1-q')+\lambda q'-\sigma(q'-1).$$

Отсюда $\kappa=\sigma\frac{p-1}{q-p}+4\frac{q-1}{q-p}+\lambda$.

Тогда

$$\kappa(1-q')+\frac{n+4}{2}+\alpha_- +\lambda q'-\sigma(q'-1)=-\left(\sigma\frac{p-1}{q-p}+4\frac{q-1}{q-p}+\lambda\right)\frac{1}{q-1}+\frac{n+4}{2}+\alpha_- +\lambda\frac{q}{q-1}-\sigma\frac{1}{q-1}=-\frac{\sigma+4}{q-p}+\frac{n+4}{2}+\alpha_- +\lambda$$

Используя (3.6), (3.7) и (3.5) получим

$$\int\limits_{Q_1'}|u|^q|x|^\sigma T_\rho\xi\varphi dxdt\le\left(CA_1(\tilde T)+C_2A_2(\tilde\varphi)\right)\rho^{-\frac{\sigma+4}{q-p}+\frac{n+4}{2}+\alpha_- +\lambda}.\qquad(3.8)$$

Пусть теперь

$$\frac{\sigma+4}{q-p}-\frac{n+4}{2}-\alpha_- -\lambda>0.$$

Тогда

$$\frac{\sigma+4}{q-p}>\frac{n+4}{2}+\alpha_- +\lambda$$

и

$$q<p+\frac{\sigma+4}{\frac{n+4}{2}+\lambda+\alpha_-}.$$

В этом случае устремив ρ к $+\infty$ из (3.8) получим, что

$$\int_{Q_1'} |u|^q |x|^\sigma \xi dxdt \le 0.$$

Это значит, что $u \equiv 0$.

Пусть теперь $\frac{\sigma+4}{q-p} - \frac{n+4}{2} - \alpha_- - \lambda = 0$.

Тогда из (3.6), (3.8) получим, что $I_1 < C$, $I_2 < C$ и следовательно

$$\int_{Q_1'} u^q |x|^\sigma \xi dxdt < C.$$

Из свойства интеграла получим, что

$$\int_0^\infty \int_{B_{\rho,2\rho}} u^q |x|^\sigma \xi dxdt \to 0, \quad (3.9)$$

и

$$\int_{\rho^4}^{2\rho^4} \int_{Q_1'} u^q |x|^\sigma \xi dxdt \to 0. \quad (3.10)$$

Тогда из (3.4)

$$\int_{Q_1'} u^q |x|^\sigma T_\rho \xi \varphi dxdt \le \left(\int_{\rho^4}^{2\rho^4} \int_{Q_1'} u^q |x|^\sigma \xi T_\rho \varphi dxdt \right)^{\frac{1}{q}} I_1^{\frac{1}{q'}} +$$

$$+ \left(\int_0^{2\rho^4} \int_{B_{\rho,2\rho}} u^q |x|^\sigma T_\rho \xi \varphi dxdt \right)^{\frac{1}{\beta}} I_2^{\frac{1}{\beta'}} \le$$

$$\le \left(\int_{\rho^4}^{2\rho^4} \int_{Q_1'} u^q |x|^\sigma \xi dxdt \right)^{\frac{1}{q}} I_1^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_0^\infty \int_{B_{\rho,2\rho}} u^q |x|^\sigma \xi dxdt \right)^{\frac{1}{\beta}} I_2^{\frac{1}{\beta'}} \to 0$$

при $\rho \to +\infty$ в силу (3.9), (3.10).

Отсюда следует, что $u \equiv 0$.

Этим теорема полностью доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fujita H. On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. // J. Fac. Sci. Univ, Tokyo, Sect. I, 13, 1966, p.109-124.
2. Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of linear elliptic equations, Comm. Pare. Appl. Math.vol 34,pages 525-598,yr 1981
3. Hayakawa K. On non-existence of global solutions of some semi-linear parabolic equations.// Proc. Japan. Acad. 49, 1973, p.503-505.
4. Kon'kov A.A. On solutions of quasi-linear elliptic inequalities containing terms with lower-order derivatives, Nonlinear Anal., 90 (2013), p. 121-134.
5. Kobayashi K., Siaro T., Tanaka H. On the blowing up problem of semi linear heat equations. // J. Math. Soc. Japan, 29, 1977, p.407-424.
6. Levine H.A. The role of critical exponents in blow up theorems. // SIAM Review, 32.2, 1990, p.262-288.
7. Самарский А.А., Галактионов Г.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987, 480 с.

8. Лаптев Г.Г. Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств.// Труды. Математического института им. В.А.Стеклова 2001, в. 232, с.223-235
9. Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных // Труды МИАН, 2001, т.234, с.359-396.
10. Митидиери Э., Похожаев С.И. Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в R^n // Труды МИАН, 1999, т.227, с.192-222.
11. Serrin J, Zou H. Nonexistence of positive solutions of Lane-Emden system, Dif. Integr.Equat., 9 (1996), pages 635-653.
12. Uda Y. The critical exponent for a weakly coupled system of the generalized Fujita type reaction-di_usion equations, Z. Angew. Math. Phys., 46 (1995), no. 3, 366173.
13. Bagirov Sh. Nonexistence of global solutions to the system
14. of semilinear parabolic equations with biharmonic operator and singular potential Electronic Journal of Diferential Equations, Vol. 2018 (2018), No. 09, pp. 1-13.
15. Багыров Ш.Г. Отсутствие решений полулинейного бигармонического уравнения с сингулярным потенциалом, Математические заметки, т. 103, в. 1, январь 2018, с.27-37.

BAŞ HİSSƏDƏ BİHARMONİK OPERATOR OLAN YARIMXƏTTİ PARABOLİK TƏNLİYİN QLOBAL HƏLLİNİN YOXLUĞU

Ş.Q.BAĞIROV

XÜLASƏ

Şarın xarici olan oblastda baş hissədə biqarmonik operator olan yarımxətti parabolik tənliyə baxılır və qlobal həllin yoxluğu məsələsi öyrənilir. Qlobal həllərin yoxluğu üçün kafi şərt tapılmışdır. İsbat sınaq funksiyalar üsulundan istifadə edərək aparılmışdır.

Açar sözlər: yarımxətti parabolik tənlik, qlobal həll, kritik qüvvət, sınaq funksiyalar üsulu.

THE ABSENCE OF GLOBAL SOLUTIONS OF A SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH A BIHARMONIC OPERATOR IN THE MAIN PART

Sh.H.BAGIROV

SUMMARY

In the exterior of the ball, a semilinear parabolic equation with a biharmonic operator in the main part is considered, and the absence of global solutions of this equation is investigated. A sufficient condition for the absence of global solutions is obtained. The proof is based on the test function method.

Keywords: Semilinear parabolic equation, global solution, critical exponent, method of test functions.

Поступила в редакцию: 16.05.2019 г.
Подписано к печати: 28.12.2019 г.