BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

*№3* *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2019*

**УДК 517.177.52**

# НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**Ж.Б.АХМЕДОВА[*], И.Ф.НАГИЕВА[**]**

***[*]Бакинский Государственный Университет***

***[**]Институт Систем Управления НАН Азербайджана***

***akja@rambler.ru, ilaha_21@mail.ru***

*В работе рассматривается одна задача оптимального управления дискретными системами с запаздыванием. Доказаны необходимые условия оптимальности первого порядка при различных предположениях.*

**Ключевые слова:** Аналог задачи Н.Н.Моисеева, формула приращения, функционал качества, необходимое условие оптимальности, дискретный принцип максимума.

**Введение.** В работе [1] Н.Н.Моисеев рассмотрел одну нетиповую задачу оптимального управления, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В предлагаемой работе изучается дискретный вариант задачи из [1], при наличии в уравнении описывающий процесс запаздывания по состоянию. Установлены необходимые условия оптимальности первого порядка.

**Постановка задачи.** Рассмотрим управляемый процесс, описываемый следующей системой нелинейных разностных уравнений с запаздыванием

$$x(t+1)= f\left(t,\ x(t), x(t-N), u(t)\right),\ \ t\in t_0, t_0+t_1,...,t_1-1, \qquad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0-N)=x_{t_0-N},..., x(t_0)=x_0. \qquad (2)$$

Здесь $N-$заданное натуральное число, $f(t,x,y,u)-$ заданная $n$-мерная вектор-функция, непрерывная по $(x,y,u)$ вместе с частными производными по $(x,y)$ при всех $t, t_0, t_1, x_{t_0-N},..., x_0$ заданы, а $u(t)-$ $r$-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U\subset R^r$, т.е.

$$u(t)\in U\subset R^r, \quad t\in T. \qquad (3)$$

Такие управления будем называть допустимыми управлениями.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u)=\varphi(x(t_1))+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}F(t,\, s,\, x(t),\, x(s)), \tag{4}$$

при ограничениях (1)-(3), при предположении, что оптимальное управление существует. Здесь $\varphi(x)$ заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а $F(t,\, s,\, a,\, b)$ заданная скалярная функция, непрерывная по $(a,\, b)$ при всех $t,\, s$.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимальное значение функционалу (4), при ограничениях (1)-(3) назовем оптимальным управлением.

Целью работы является вывод необходимых условий оптимальности первого порядка в рассматриваемой задаче.

**Формула приращения качества.** Пусть $u(t), \bar{u}(t)=u(t)+\Delta u(t)$ два допустимых управления, а $x(t)$ и $\bar{x}(t)=x(t)+\Delta x(t)$ соответствующие им траектории основной начальной задачи (1)-(2). Тогда приращение функционала качества (4) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\Delta S(u)&=S(\bar{u})-S(u)=[\varphi(\bar{x}(t_1))-\varphi(x(t_1))]+\\&+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}[F(t,\, s,\, \bar{x}(t),\, \bar{x}(s))-F(t,\, s,\, x(t),\, x(s))],\end{aligned} \tag{5}$$

а приращение $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\Delta x(t+1)= f(t,\, \bar{x}(t), \bar{x}(t-N), \bar{u}(t))- f(t,\, x(t), x(t-N), u(t)), \tag{6}$$

$$\Delta x(t_0-N)=0,\ldots,\Delta x(t_0)=0. \tag{7}$$

Считая $\psi(t)$ пока неизвестной $n$-мерной вектор-функцией положим

$$H(t,x,y,u,\psi)=\psi' f(t,x,y,u).$$

Принимая во внимание выражение функции Гамильтона-Понтрягина, получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t)\Delta x(t+1)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[H(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-N),\bar{u}(t),\psi(t))-H(t,x(t),x(t-N),u(t),\psi(t))].$$

Поэтому, принимая во внимание (6), (7) и введенное обозначение из (5) будем иметь

$$\Delta S(u)=[\varphi(\bar{x}(t_1))-\varphi(x(t_1))]+\psi'(t_0-1)\Delta x(t_1)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta x(t)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}[F(t,\, s,\, \bar{x}(t),\, \bar{x}(s))-F(t,\, s,\, x(t),\, x(s))]-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\left(t,\bar{x}(t),\bar{x}(t-N),\bar{u}(t),\psi(t)\right)-H\left(t,x(t),x(t-N),u(t),\psi(t)\right)\right]. \qquad (8)$$

Положим по определению

$$\Delta_{\bar{u}(t)}H[t,\psi]\equiv\left[H\left(t,x(t),x(t-N),\bar{u}(t),\psi(t)\right)-H\left(t,x(t),x(t-N),u(t),\psi(t)\right)\right],$$

$$H_x[t,\psi]\equiv H_x\left(t,x(t),x(t-N),u(t),\psi(t)\right),$$

$$H_y[t,\psi]\equiv H_y\left(t,x(t),x(t-N),u(t),\psi(t)\right),$$

$$f_x[t]\equiv f_x\left(t,x(t),x(t-N),u(t)\right),$$

$$f_y[t]\equiv f_y\left(t,x(t),x(t-N),u(t)\right),$$

$$F_a[t,s]\equiv F_a\left(t,s,x(t),x(s)\right),$$

$$F_b[t,s]\equiv F_b\left(t,s,x(t),x(s)\right).$$

Учитывая введенные обозначения с помощью формулы Тейлора приращение (8) функционала качества (4) записывается в виде

$$\Delta S(u)=\varphi_x'\left(x(t_1)\right)\Delta x(t_1)+\psi'(t_1-1)\Delta x(t_1)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\,\Delta x(t)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\bar{u}(t)}H[t]-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_x'[t,\psi]\,\Delta x(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_y'[t,\psi]\,\Delta x(t-N)- \qquad (9)$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\Delta_{\bar{u}(t)}H_x'[t,\psi]\,\Delta x(t)+\Delta_{\bar{u}(t)}H_y'[t,\psi]\,\Delta x(t-N)\right]+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}F_a'[t,s]\Delta x(t)$$

$$+\sum_{s=t_0}^{t_1-1}F_b'[t,s]\Delta x(s)+o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_2\left(\left\|\Delta x(t)\right\|+\left\|\Delta x(t-N)\right\|\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}o_3\left(\left\|\Delta x(t)\right\|+\left\|\Delta x(s)\right\|\right.$$

Здесь и в дальнейшем $\|\alpha\|$ означает норму вектора $\alpha$, определимая формулой $\|\alpha\|=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$, а величина $o(\alpha)$ есть величина более высокого порядка, чем $\alpha$, т.е. $o(\alpha)/\alpha\to 0$, при $\alpha\to 0$.

Учитывая начальное условие (7) нетрудно доказать, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_y'[t,\psi]\Delta x(t-N)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1-N}H_y'[t+N,\psi]\Delta x(t).$$

Поэтому, если предполагать, что вектор-функция $\psi(t)$ является решением задачи(сопряженная система)

$$\psi(t_1-1)=-\varphi_x\left(x(t_1)\right),$$

$$\psi(t-1)=H_x[t,\psi]-\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left[F_a[t,s]+F_b[s,t]\right],\ \ t=t_1-N,\dots,t_1-1,$$

$$\psi(t-1)=H_x[t,\psi]+H_y[t+N,\psi]+\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left[F_a[t,s]+F_b[s,t]\right],\ \ t=t_0,\dots,t_1-N,$$

то формула приращения (9) функционала качества (4) примет вид

$$\Delta S(u)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\bar{u}(t)}H[t,\psi]-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\Delta_{\bar{u}(t)}H'_x[t,\psi]+\Delta_{\bar{u}(t)}H'_y[t,\psi]\right]\Delta x(t-N)+$$

$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_2(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta x(t-N)\|)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}o_3(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta x(s)\|. \quad (10)$$

Предположим, что множество (множество допустимых скоростей рассматриваемой системы)

$$f(t,x(t),x(t-N),U)=\{\alpha:\alpha=f(t,x(t),x(t-N),v),v\in U\} \quad (11)$$

выпукло при всех $t$.

Тогда специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t)=v(t,\varepsilon)-u(t),\ t\in T, \quad (12)$$

где $\varepsilon\in[0,1]$ произвольное число, а $v(t,\varepsilon)$ такой вектор, что

$$\Delta_{v(t,\varepsilon)}f[t]\equiv\varepsilon\Delta_{v(t)}f[t]. \quad (13)$$

Здесь $u(t)\in U, t\in T$ произвольный допустимый вектор.
(Это возможно в силу выпуклости множества(11))

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее приращению (12) управления.

Применяя аналог леммы Гронуолла-Беллмана (см. напр. [4]) получим справедливость оценки

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\|\le L_1\varepsilon,\ t\in T, \quad (14)$$

где $L_1=const>0$ некоторое постоянное.

**Необходимое условие оптимальности.** С учетом (12)-(13) из (10) получим справедливость разложения

$$S(u+\Delta u_\varepsilon)-S(u)=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{v(t)}H[t,\psi]+o(\varepsilon).$$

Из полученного разложения в силу произвольности $\varepsilon$ и $v(t)$ сразу следует

**Теорема 1.** (аналог дискретного принципа максимума). Если множество (11) выпукло, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_v H[t,\psi]\le 0 \tag{15}$$

выполнялось для всех $v(t)\in U, t\in T$.

Неравенство (15) является аналогом дискретного условия максимума для рассматриваемой задачи.

Непосредственным следствием теоремы 1 является

**Следствие.** При выполнении условий теоремы 1, для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\Delta_w H[\theta,\psi]\le 0 \tag{16}$$

выполнялось для всех $w\in U, \theta\in T$. Неравенство (16) представляет собой поточечный аналог дискретного принципа максимума. Нетрудно видеть, что необходимые условия оптимальности (15), (16) эквивалентны.

**Линеаризованный принцип максимума.** Предположим, что множество $U$ выпуклое, а $f(t,x,y,u)$ непрерывно по $(x,y,u)$ вместе с частными производными по $(x,y,u)$ при всех $t$.

При этих предположениях приращение критерия качества () может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\Delta S(u)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H'_г[t,\psi]\Delta u(t)+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)-\\ -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_4(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta x(t-N)\|+\|u(t)\|)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}o_3(\|\Delta x(t)\|+\|\Delta x(s)\|).\end{aligned} \tag{17}$$

Пусть $\mu\in[0,1]$ произвольное число, а $v(t)\in, t\in T$ произвольное допустимое управление.

Тогда специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\mu(t)=\mu[v(t)-u(t)]. \tag{18}$$

Через $\Delta x_\mu(t)$ обозначим специальное приращение траектории $x(t)$ отвечающее приращению (18) управления $u(t)$.

Из (1) ясно, что

$$\Delta x(t+1)=\sum_{\tau=t_0}^{t}[\Delta x(\tau+1)-\Delta x(\tau)]. \tag{19}$$

При помощи (19) применяя дискретный аналог Гроноулла-Беллмана получим, что

$$\|\Delta x_\mu(t)\|\le L_2\mu,\ t\in T, \tag{20}$$

где $L_2=const>0$ некоторое постоянное.

Тогда учитывая (18), (20) в формуле приращения (17) получаем справедливость разложения

$$S(u+\Delta u_\mu)-S(u)=-\mu\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H'_u[t,\psi][v(t)-u(t)]+o(\mu).$$

Поэтому справедлива

**Teorema 2.** (аналог линеаризованного условия максимума). Если множество $U$ выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H'_u[t,\psi][v(t)-u(t)]\le 0 \tag{21}$$

выполнялось для всех $v(t)\in U, t\in T$.

Неравенство (21) есть аналог линеаризованного принципа максимума.

### ЛИТЕРАТУРА


1. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
2. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973, 256.
3. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2013, 151 с.
4. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1982, 400 с.


## GECİKMƏYƏ MALİK BİR DİSKRET OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

**J.B.ƏHMƏDOVA, İ.F.NAĞIYEVA**

### XÜLASƏ

İşdə gecikməyə malik bir diskret optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Müxtəlif hamarlıq şərtləri daxilində optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər isbat olunmuşdur.

**Açar sözlər**: N.N.Moiseyev məsələsinin analoqu, artım düsturu, keyfiyyət funksionalı, optimallıq üçün zəruri şərt, diskret maksimum prinsipi.

## NECESSARY CONDITIONS FOR OPTIMALITY IN ONE DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH DELAY

**Zh.B.AHMEDOVA, I.F.NAGIEVA**

### SUMMARY

The paper considers one problem of optimal control of discrete systems with delay. The necessary first-order optimality conditions are proved under various assumptions.

**Keywords:** An analogue of the problem of N.N. Moiseev, increment formula, quality functional, necessary optimality condition, discrete maximum principle.

*Поступила в редакцию: 26.09.2019 г.*
*Подписано к печати: 28.12.2019 г.*