УДК.539.21

ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ПУЗЫРЬКОВОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ВЯЗКОУПРУГОЙ ТРУБЕ

Э.Т.КИЯСБЕЙЛИ*, Р.С.АКПЕРЛИ**

****Бакинский Государственный Университет***

*****Азербайджанский университет Архитектуры и Строительства***

akbarli89@mail.ru

В этой статье исследуется пульсирующий поток сжимаемого двухфазного пузырька вязкой жидкости, содержащегося в упругой трубе с прямой осью. В работе были использованы одномерные линейные уравнения. Предполагается, что трубка жестко закреплена к определенной среде. В случае конечной длины давление прикладывается на торцы его граней. В ограниченном процессе отношения получаются для очень длинной трубки. Такое описание в некотором смысле обобщает и усиливает работу такого типа. В численном эксперименте рассматривается полубесконечная трубка с проточной водой, содержащей небольшое количество пузырьков воздуха. Определено влияние объемного содержания пузырьков на волновые характеристики. Поставленная задача решается применением теории функций комплексных переменных.

Ключевые слова: двухфазная жидкость; вязкость; пульсирующее течение; волна.

Введение. Проблема распространения волн в деформируемых оболочках с текучей средой в их полостях достаточно популярна. При рассмотрении задачи такого рода следует поощрять рассмотрение уравнений движения оболочки, учитывающих влияние движения жидкости в нем. Предполагается, что одномерное приближение применимо, когда длина трубки намного больше ее радиуса. Такое приближение описывает основные свойства системы «оболочка-жидкость». На сегодняшний день в совокупности таких проблем хорошо развита область гидродинамики. Однако механизм явлений, связанных с одновременным рассмотрением двухфазной жидкости в отсеке с учетом ее сжимаемости, вязкости и ортотропии материала трубки, не совсем понятен. Интерес к проблемам волновой динамики пузырьковых жидкостей, протекающих в деформируемых трубках, обусловлен важностью применения результатов исследований к задачам расчета гидравлических систем в самолетостроении, нефтегазовой промышленности, химической технологии, термодинамике.

МЕТОД. Основные проблемы.

Замкнутая система уравнений состоит из гидравлических уравнений движения жидкости и трубок, а также непрерывности скоростей компонентов уравнений на границе раздела жидкость-трубки.

• Пузырьки присутствуют в форме сферических включений одинакового радиуса r_0 в каждом элементарном макрообъеме. Кроме того, объем концентрации пузырьков a_{20} невелик (смесь монодисперсная) и значение r_0 намного меньше, чем характерный размер рассматриваемой системы;

• Прямое взаимодействие и столкновение пузырьков друг с другом можно игнорировать;

• процессы слияния (коагуляции) и образования новых пузырьков отсутствуют;

• Скорость пузырьков и несущей фазы одинаковы;

• Пузырьки имеют нейтральную плавучесть, то есть не оседают и не всплывают;

• Вязкость несущей фазы намного больше, чем вязкость пузырьков газа (например, вязкость воды в 10 раз больше, чем вязкость воздуха) и, следовательно, вязкость смеси практически не зависит от объемного содержания пузырьков.

Теоретические основы. В рамках сделанных допущений, уравнения гидродинамики состоят из уравнения импульсов

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

уравнения неразрывности [1, 2, 4]

$$\frac{2}{R}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

и реологического уравнения смеси [2, 3]

$$p = a^2 \rho + \frac{\xi}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (3)$$

В уравнениях (1) – (3) $u(x,t)$ – скорость течения смеси, $p(x,t)$ – гидродинамическое давление, $\rho(x,t)$ – плотность смеси

$$a^2 = \frac{1}{\alpha_{20}(1-\alpha_{20})}\left(\frac{\rho_{10}}{\rho_{10}-\rho_{20}}\right)^2 \frac{p_0}{\rho_{10}} \qquad (4)$$

квадрат скорости распространения звука,

$$\rho_0 = \alpha_{10}\rho_{10} + \alpha_{20}\rho_{20} \qquad (\alpha_{10} + \alpha_{20} = 1), \tag{5}$$

а

$$\xi = \frac{3}{4}\frac{\mu(1-\alpha_{20})}{\alpha_{20}} \tag{6}$$

объемная вязкость, в которой μ – динамическая вязкость несущей фазы. Здесь α_{20} – объемное содержание пузырьков, ρ_{10}, ρ_{20} – соответственно плотности несущей и дисперсной фазы, p_0 – задаваемое статическое давление. Индекс 0 внизу означает значение параметра в равновесном состоянии. Необходимо заметить, что в линейной постановке вместо текущей объемной концентрации α_2 используется равновесная α_{20}, а данный подход априори подразумевает наличие пузырьков $(\alpha_{20} \neq 0)$. Если объемное содержание пузырьков достаточно мало, $(\alpha_{20} << 1)$, то среда может рассматриваться как однородная. Особенностью такой жидкости при $\rho_{20} << \rho_{20}$ является то, что

$$\rho_0 = \alpha_{10}\rho_{10} + \alpha_{20}\rho_{20} \approx \alpha_{10}\rho_{10} \approx \rho_{10}. \tag{7}$$

Это обстоятельство позволяет с достаточной степенью точности переписать формулы (4) и (6) следующим образом:

$$a^2 \approx \frac{p_0}{\alpha_{20}\rho_{10}}, \; \xi = \frac{4}{3}\frac{\mu}{\alpha_{20}}. \tag{8}$$

При этом, как это следует из первой формулы (8), сжатие смеси происходит только за счет её газовой составляющей.

Уравнение движения оболочки.

Предположим, что в невозмущенном состоянии имеется цилиндрическая прямолинейная трубка с радиусом *R* и толщиной *h*. Далее запишем уравнение движения трубки, предполагая, что материал стенки упругий ортотропен, фракция *h / R << 1*, и трубка жестко прикреплена к определенной среде. В этих условиях достаточно использовать следующее уравнение:

$$p = \frac{hE_2}{(1-\nu_1\nu_2)R^2}w + \rho_* h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{9}$$

где ρ_* - плотность стенки, E_2 – тангенсальный модуль Юнга, ν_1 и ν_2 - коэффициенты Пуассона, где $E_2\nu_1=E_1\nu_2$. Второй член в (9) - это инерция трубки. Его влияние как правило, считается незначительным:

$$w = \frac{(1-\nu_1\nu_2)R^2}{hE_2}\,p. \qquad (10)$$

Таким образом, мы можем предположить, что уравнение (1) - (3) и (10) представляют собой замкнутую систему гидроупругости, которую можно использовать для описания эволюции малых возмущений в трубе, содержащей газ и жидкие среды.

Полученные уравнения решаем с помощью $\rho(x,t)$. Для этого поступим следующим образом: с помощью уравнений (1) и (2) исключая функцию *u(x,t),* получаем:

$$\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0.$$

Учитывая (10) и (3) получим:

$$(1+\frac{a^2}{c_0^2})\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\frac{\xi}{c_0^2\rho_0}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^3}-a^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\frac{\xi}{\rho_0}\frac{\partial^3\rho}{\partial x^2\partial t}=0 \qquad (11)$$

где $c_0^2=\dfrac{hE_2}{2\rho_0(1-\nu_1\nu_2)R}$.

Теперь дальнейший ход анализа заключается в уменьшении решения дифференциального уравнения в частных производных (11) к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

Результаты. Решение волнового уравнения.

Гармонический анализ используется для описания сложных импульсов, характерных для волновых движений, то есть импульсы сложной структуры разбиваются на синусоидальные компоненты, которые образуют ряд Фурье. Из-за линейности и однородности определяющего уравнения прослеживается происхождение каждой гармоники с частотой $n\omega$. Здесь *n* натуральное число. Поэтому мы можем заключить, что рассмотрение чисто синусоидальных колебаний с заданной частотой ω является критически важным. Поэтому, используя метод разделения переменных, мы можем искать решение уравнения (10) в следующем классе функций:

$$\rho(x,t)=y(x)\exp(i\omega t). \qquad (12)$$

Здесь *y(x)* - неизвестный, в общем случае комплексная функция, а $i=\sqrt{-1}$ - мнимая единица. Подставляя (12) в (11), вводя обозначения:

$$\delta^2=\frac{m_1+im_2}{a^2+im_3}\ , \qquad (13)$$

в котором

$$m_1 = \omega^2 (1 + \frac{a^2}{c_0^2}),\ m_2 = \xi \frac{\omega^3}{\rho_0 c_0^2},\ m_3 = \xi \frac{\omega}{\rho_0}$$

в результате находим:

$$y'' + \delta^2 y = 0. \tag{14}$$

Здесь y''- вторая производная от y по координате x. Отделяя уравнение дисперсии на действительную и мнимую части, напишем следующее:

$$\delta^2 = \frac{m_1 a^2 + m_2 m_3}{a^4 + m_3^2} - i \frac{m_1 m_3 - m_2 a^2}{a^4 + m_3^2} = k_1 - ik_{2.}$$

Отсюда следует

$$\delta = \pm(\delta_0 - i\delta_1),$$

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{r + k_1}{2}},\ \delta_1 = \sqrt{\frac{r - k_1}{2}},$$

где,

$$(r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}).$$

Общее решение уравнения (14) имеет вид хорошо известен и записывается как:

$$y = Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}$$

где A, B - постоянные интегрирования в общем случае комплексные, которые определяются из граничных условий задачи. Теперь, очевидно, имеем:

$$\rho(x,t) = \left\{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\right\}\exp(i\omega t)$$

Следуя уравнениям (3) и (10), перепишем отношения:

$$p(x,t) = (a^2 + im_3)\left\{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\right\}\exp(i\omega t)$$

$$w(x,t) = \frac{(1 - v_1 v_2)R^2}{hE_1}(a^2 + im_3)\left\{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\right\}\exp(i\omega t)$$

$$u(x,t) = \frac{\delta(a^2 + im_3)}{}\left\{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\right\}\exp(i\omega t).$$

Для очень длинных трубок ($\rho_0 w$ $l \to \infty$), неизвестные параметры принимают следующую предельную форму

$$\rho(x,t) = \alpha \exp[(i(\omega t - \delta x)],$$

$$p(x,t)=\alpha\left(a^2+im_3\right)\exp[(i(\omega t-\delta x)],$$
$$u(x,t)=-\alpha\,\delta/\rho_0\;\alpha\left(a^2+im_3\right)\exp[(i(\omega t-\delta x)],$$
$$w(x,t)=\alpha\left((1-\nu_1\nu_2)R^2\right)/(hE_1)\left(a^2+im_3\right)\exp[(i(\omega t-\delta x)].$$

Отсюда, в соответствии с формулой Эйлера, для амплитуд искомых функций можно записать

$$|\rho|=\frac{p^{v}e^{-\delta_1 x}}{\sqrt{a^4+m_2^2}},$$
$$|p|=p^{v}e^{-\delta_1 x},$$
$$|u|=\frac{p^{v}e^{-\delta_1 x}}{\rho_0\omega}\sqrt{\delta_0^2+\delta_1^2},$$
$$|w|=p^{v}e^{-\delta_1 x}\,\frac{(1+\nu_1\nu_2)R^2}{hE_2}. \tag{15}$$

Формулы, которые мы получили здесь, можно использовать в качестве базы для расчета искомых функций скорости волны $c=\dfrac{\omega}{\delta_0}$ и затухания δ_1 в зависимости от α_{20}.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Таким образом, исходя из выбранных параметров и режима о работе системы, мы можем сделать следующий вывод:

- По мере увеличения значения α_{20} скорость распространение волны значительно уменьшается;
- Амплитуда безразмерная плотность увеличивается с увеличением α_{20};
- Амплитуда скорости смеси увеличивается;
- Вязкость незначительно влияет на характер потока.

В заключение следует отметить, что скорость потока жидкости, может быть увеличиваться (уменьшатся) с изменением объемной концентрации пузырьков и, следовательно, функциональность системы может быть оптимизирована.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев А.Б. Движение жидкости в оболочке с учетом жесткости внешней среды / А.Б.Алиев // Международный научный журнал «Наука и мир». 2016, № 5(33), с. 14-18.
2. Амензаде Р.Ю. Распространение волн в жидкости, протекающей в упругой трубке с учетом вязко-упругого трения окружающей среды. // Вестник Бакинского Университета, 2013, с. 88-94.
3. Педли Т. Гидродинамика крупных сосудов / М.: Мир, 1983, 400 с.
4. Akbarly R.S., Salmanova G.M. Pulsational motion of a mixture in a vibrating medium with consider flow rate. International journal on technical and physical problems of engineering (IJTPE). Issue 31 Volume 9 Number 2 June 2017

QABARCIQLI ÖZLÜ MAYENİN ÖZLÜ-ELASTİKİ BORUDA DALĞALIVARİ HƏRƏKƏTİ

E.T.KİYASBƏYLİ, R.S.ƏKBƏRLİ

XÜLASƏ

Bu məqalədə düzoxlu elastik boruda sıxılan mayenin ikifazalı qabarcıqlı özlü mayenin pulsvari axını araşdırılır. İşdə birölçülü xətti tənliklərdən istifadə olunmuşdur. Fərz edilir ki, boru ətraf mühitə sərt bərkidilmişdir. Sonlu uzunluq halında təzyiq borunun uclarına tətbiq olunur. Məhdud prosesdə çox uzun boru üçün münasibətlər əldə edilmişdir. Müəyyən mənada bu cür yanaşma belə tip işləri ümumiləşdirir və gücləndirir. Ədədi eksperimentdə tərkibində az miqdarda hava qabarcığı olan suyun yarım sonsuz boruda hərəkətinə baxılmışdır. Dalğanın xüsusiyyətlərinə qabarcıqların həcminin miqdarının təsiri müəyyən edilmişdir. Qoyulmuş məsələ kompleks dəyişənlər funksiyaları nəzəriyyəsini tətbiq etməklə həll olunur.

Açar sözlər: ikifazalı maye, özlülük, döyünən axın, dalğalar

WAVE MOTION OF A VISCOUS BUBBLE LIQUID IN A VISCOELASTIC PIPE

E.T.KIYASBEYLI, R.S.AKPERLI

SUMMARY

This article examines the pulsating flow of a compressible two-phase bubble of a viscous fluid contained in an elastic pipe with a straight axis of the orthotropic. In this work, one-dimensional linear equations were used. It is assumed that the tube is rigidly attached to a specific environment. In the case of a finite length, pressure is applied to the ends of its faces. In a limited process, relationships are obtained for a very long tube. Such a description in a sense generalizes and strengthens the work of this type. In a numerical experiment, a semi-infinite tube with flowing water containing a small amount of air bubbles is considered. The influence of the volume fraction of bubbles on the wave characteristics is determined. The problem is solved by applying the theory of functions of complex variables.

Keywords: two-phase liquid, viscosity, pulsating flow, wave.

Поступила в редакцию: 19.04.2019 г.
Подписано к печати: 28.12.2019 г.