УДК 517.98

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПО СВОИМ НУЛЯМ

Ч.Г.ТАРИВЕРДИЕВА
Бакинский Государственный Университет
ibadzadecinare@gmail.com

В статье рассматривается краевая задача, порожденная уравнением Штурма-Лиувилля и неразделенными граничными условиями, одно из которых линейно зависит от спектрального параметра. Получено представление характеристической функции этой краевой задачи в виде бесконечного произведения с помощью собственных значений.

Ключевые слова: уравнение Штурма-Лиувилля, характеристическая функция, собственные значения.

Рассмотрим краевую задачу, порожденную на отрезке $[0,\pi]$ уравнением Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \tag{1}$$

и неразделенными граничными условиями вида

$$\begin{gathered} y'(0) + (\alpha\lambda + \beta)y(0) + \omega y(\pi) = 0, \\ y'(\pi) + \gamma\, y(\pi) - \omega y(0) = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где $q(x)$ – вещественная функция, принадлежащая пространству $L_2[0,\pi]$, λ – спектральный параметр, $\alpha, \omega, \beta, \gamma$ – вещественные числа, причем $\alpha\omega \neq 0$. Эту задачу будем обозначать через P.

Обозначим через $W_2^n[0,\pi]$ пространство С.Л. Соболева, состоящее из заданных на отрезке $[0,\pi]$ комплекснозначных функций, которые имеют $n-1$ абсолютно непрерывных производных и производную n-го порядка, суммируемую с квадратом на $[0,\pi]$. Если для всех функций $y(x) \in W_2^2[0,\pi]$, $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющих условиям (2), выполняется неравенство

$$\gamma|y(\pi)|^2 - 2\omega \operatorname{Re}\left[\overline{y(0)}\, y(\pi)\right] - \beta|y(0)|^2 +$$
$$+\int_0^\pi \left\{|y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2\right\}dx > 0,$$

то будем говорить, что выполняется условие (A) (это условие заведомо выполняется, если $\beta \le 0, \gamma \ge 0, |\omega| \le \sqrt{|\beta|\gamma},\ q(x) > 0$).

Обозначим через $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ фундаментальную систему решений уравнения (1), определяемую начальными условиями

$$c(0,\lambda) = s'(0,\lambda) = 1,\ c'(0,\lambda) = s(0,\lambda) = 0.$$

Легко убедиться, что характеристической функцией краевой задачи P будет

$$\delta(\lambda) = 2\omega - \eta(\lambda) + \omega^2 s(\pi,\lambda) + (\alpha\lambda + \beta)\sigma(\lambda), \tag{3}$$

где

$$\eta(\lambda) = c'(\pi,\lambda) + \gamma c(\pi,\lambda),\ \sigma(\lambda) = s'(\pi,\lambda) + \gamma s(\pi,\lambda).$$

Нули функции $\delta(\lambda)$ являются собственными значениями задачи P (отметим, что в отличие от случая $\alpha = 0$ эти собственные значения перемещаясь, распространяются в обе стороны до бесконечности). В работе [1] (см. также [2-3]) установлено, что при выполнении условия (A) собственные значения краевой задачи P вещественны и отличны от нуля. В этой работе также доказано, что для собственных значений $\gamma_k\ (k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ задачи P при $|k| \to \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула

$$\gamma_k = k + a + \frac{(-1)^{k+1} b\omega - B}{k\pi} + \frac{\tau_k}{k}, \tag{4}$$

где
$$a = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\alpha,\ B = \frac{\beta}{1+\alpha^2} - \gamma - A,$$
$$b = \frac{2}{\sqrt{1+\alpha^2}},\ A = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)dx,\ \{\tau_k\} \in l_2.$$

Настоящая работа посвящена представлению характеристической функции (3) краевой задачи P в виде бесконечного произведения с помощью собственных значений. Такое представление играет важную роль при решении обратных задач спектрального анализа для дифференциальных операторов.

Теорема. *Задание спектра* $\{\gamma_k\}$ ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, ...$) *однозначно определяет характеристическую функцию* $\delta(\lambda)$ *краевой задачи* P *по формуле*

$$\delta(\lambda)=\pi\sqrt{1+\alpha^2}\,(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\gamma_k-\lambda}{k}, \tag{5}$$

где $\alpha=-\lim\limits_{k\to\infty} tg\gamma_k\pi.$

Доказательство. Известно [4, с. 38], что для функций $c(\pi,\lambda)$, $c'(\pi,\lambda)$, $s(\pi,\lambda)$ и $s'(\pi,\lambda)$ справедливы следующие представления:

$$c(\pi,\lambda)=\cos\lambda\pi+A\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}+\frac{f_1(\lambda)}{\lambda},$$

$$c'(\pi,\lambda)=-\lambda\sin\lambda\pi+A\cos\lambda\pi+f_2(\lambda),$$

$$s(\pi,\lambda)=\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}-A\frac{\cos\lambda\pi}{\lambda^2}+\frac{f_3(\lambda)}{\lambda^2},$$

$$s'(\pi,\lambda)=\cos\lambda\pi+A\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}+\frac{f_4(\lambda)}{\lambda},$$

где $f_m(\lambda)\ (m=1,2,3,4)$ – целая функция экспоненциального типа не выше π, суммируемая с квадратом на вещественной оси. Учитывая эти представления и используя теорему Пели-Винера [5, с. 47], из (3) получаем, что характеристическая функция краевой задачи P имеет вид

$$\delta(\lambda)=2\omega+\lambda(\sin\lambda\pi+\alpha\cos\lambda\pi)+(\gamma+A)\alpha\sin\lambda\pi+(\beta-\gamma-A)\cos\lambda\pi+f(\lambda), \tag{6}$$

где $f(\lambda)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(t)e^{i\lambda t}dt$, $\widetilde{f}(t)\in L_2[-\pi,\pi]$.

Поскольку функция $\delta(\lambda)$ является целой функцией класса C, то по известному факту (см. [5, с. 94]) она однозначно определяется своими нулями с точностью до некоторого постоянного множителя M :

$$\delta(\lambda)=M(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\gamma_k}\right)=M(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\gamma_k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\gamma_{-k}}\right). \tag{7}$$

Из (4) получаем, что

$$a=\lim_{k\to\infty}(\gamma_k-k),\ \alpha=-\mathrm{tg}a\pi.$$

Обозначим

$$\delta_0(\lambda)=\lambda(\sin\lambda\pi+\alpha\cos\lambda\pi). \tag{8}$$

Ясно, что

$$\delta_0(\lambda)=\sqrt{1+\alpha^2}\,\lambda\sin(\lambda-a)\pi. \tag{9}$$

Используя известную формулу

$$\sin\lambda\pi=\lambda\pi\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{k}\right)$$

(см., например, [5, с. 22]), из (9) получаем

$$\delta_0(\lambda) = \pi\sqrt{1+\alpha^2}\,\lambda(\lambda-a)\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda-a}{k}\right). \tag{10}$$

Принимая во внимание соотношения (7) и (10), имеем

$$\frac{\delta(\lambda)}{\delta_0(\lambda)} = \frac{M(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\gamma_k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\gamma_{-k}}\right)}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}\,\lambda(\lambda-a)\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda-a}{k}\right)} =$$

$$= \frac{M}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}}\,\frac{(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)}{\lambda(\lambda-a)}\,\frac{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\gamma_k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\gamma_{-k}}\right)}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda-a}{k}\right)\left(1+\frac{\lambda-a}{k}\right)} =$$

$$= \frac{M}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}}\,\frac{(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)}{\lambda(\lambda-a)}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{-k^2}{\gamma_k\gamma_{-k}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\gamma_k-\lambda)(\gamma_{-k}-\lambda)}{(k-\lambda+a)(-k-\lambda+a)} =$$

$$= \frac{M}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}}\,\frac{(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)}{\lambda(\lambda-a)}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{-k^2}{\gamma_k\gamma_{-k}}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\gamma_{-k}+k-a}{-k-\lambda+a}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\gamma_k-k-a}{k-\lambda+a}\right). \tag{11}$$

Легко заметить, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)}{\lambda(\lambda-a)} = 1, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\gamma_{-k}+k-a}{-k-\lambda+a}\right) = 1, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\gamma_k-k-a}{k-\lambda+a}\right) = 1.$$

С другой стороны, из (6) и (8) следует, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\delta(\lambda)}{\delta_0(\lambda)} = 1.$$

Тогда переходя к пределу в равенстве (11) при $\lambda\to\infty$, имеем

$$1 = \frac{M}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{-k^2}{\gamma_k\gamma_{-k}}.$$

Отсюда находим

$$M = \pi\sqrt{1+\alpha^2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k\gamma_{-k}}{-k^2}. \qquad .$$

Подставляя это значение в (7), получим (5). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибадзаде Ч.Г., Набиев И.М. Свойства спектра оператора Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии / Akademik M.L. Rəsulovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş «Nəzəri və tətbiqi riyaziyyatın aktual məsələləri» elmi konfransının materialları (28-29 oktyabr 2016), s. 162-165.

2. Ibadzadeh Ch. G., Nabiev I. M. An inverse problem for Sturm–Liouville operators with nonseparated boundary conditions containing the spectral parameter // J. Inverse Ill-Posed Probl., 2016, v. 24, № 4, p. 407-411.
3. Ибадзаде Ч.Г., Набиев И.М. Восстановление оператора Штурма-Лиувилля с неразделенными граничными условиями и со спектральным параметром в граничном условии // Укр. мат. журн. 2017, № 9, с. 1217-1223.
4. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977, 332 с.
5. Левин Б.Я. Целые функции. М.: МГУ, 1971, 124 с.

SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN XARAKTERİSTİK FUNKSİYASININ SIFIRLARINA GÖRƏ BƏRPASI

Ç.Q.TARİVERDİYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə ayrılmayan sərhəd şərtlərindən biri spektral parametrdən xətti asılı olan Şturm-Liuvill məsələsinə baxılır. Bu sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri vasitəsilə xarakteristik funksiyanın sonsuz hasil şəklində göstərilişi alınır.

Açar sözlər: Şturm-Liuvil tənliyi, xarakteristik funksiya, məxsusi ədədlər.

RECONSTRUCTION OF THE CHARACTERISTIC FUNCTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM AT ITS ZERO

Ch.G.TARIVERDIYEVA

SUMMARY

In this paper a boundary value problem is considered generated by the Sturm-Liouville equation and non-separated boundary conditions, one of which linearly depends on the spectral parameter. The representation of the characteristic function of this boundary value problem is obtained in the form of an infinite product using eigenvalues.

Key words: Sturm-Liouville equation, characteristic function, eigenvalues.

Поступила в редакцию: 10.09.2019 г.
Подписано к печати: 28.12.2019 г.