УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ В СМЫСЛЕ ТИХОНОВА-ЛАВРЕНТЬЕВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ-РИМАНА НА КВАДРАТЕ

Н.А.АЛИЕВ, Л.Ф.ФАТУЛЛАЕВА
Бакинский Государственный Университет
laura_fat@rambler.ru

Излагаемая работа посвящена исследованию решения обратной задачи в смысле Тихонова-Лаврентьева для уравнения эллиптического типа первого порядка на квадрате. Для определениярешения поставленной граничной задачи получено соотношение.

Ключевые слова: обратная задача в смысле Тихонова-Лаврентьева, уравнение Коши-Римана, условие Карлемана, сингулярное слагаемое, регулярное выражение.

Введение

В работе [1] исследуется граничная задача для уравнения эллиптического типа первого порядка, т.е. для уравнения Коши-Римана. Работа [2] посвящена построению аналитической функции, которая является решением граничной задачи, поставленной для двумерного эллиптического уравнения первого порядка в вещественной плоской области. В работе [3]рассматривается обратная задача, которая содержит уравнение Коши-Римана с двумя нелокальными граничными условиями. Помимо искомой функции, правая часть второго граничного условия неизвестна. Чтобы решить эту проблему, сначала получаются необходимые условия для фундаментального решения уравнения Коши-Римана, а затем приводятся достаточные условия для сведения этой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. В работе [4] исследуется граничная задача для уравнения эллиптического типа первого порядка внутри острого угла плоскости. В статье [5] расширяется задача, которая состоит из смешанных уравнений в частных производных в области D с нелокальными граничными условиями. Используя теорию обобщенных решений, получаются необходимые и достаточные условия для приведенной формы этой задачи в интегральные уравнения Фредгольма со слабыми особенностями.

Постановка задачи

Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}+i\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}=0,\quad x_k\in(0,1),\quad k=1,2, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\alpha_{k1}(t)u(t,0)+\alpha_{k2}(t)u(1,1-t)+\alpha_{k3}(t)u(1-t,1)+\\&+\alpha_{k4}(t)u(0,t)=\varphi_k(x),\quad t\in[0,1],\quad k=\overline{1,4},\end{aligned} \tag{2}$$

где $i=\sqrt{-1}$, $\alpha_{kj}(x)$ и $\varphi_k(t)$ при $k=\overline{1,4}$; $j=\overline{1,4}$; $t\in[0,1]$ непрерывные функции, $u(x)$ - аналитическая функция. Граничные условия (2) линейно независимы. Неизвестные являются следующие три функции $u(x)$, $\alpha_{11}(t)=\alpha_{22}(t)=\alpha_{33}(t)=\alpha_{44}(t)=\alpha(t)$ и $\varphi_2(t)=\varphi_4(t)=\varphi(t)$, а остальные данные граничного условия (2) считаются заданными непрерывными функциями.

Как видно из условия (2), четыре точки, которые одновременно двигаются вдоль границами квадрата, соблюдают условия Карлемана, т.е. задача хорошо поставлена.

Получение основного соотношения для решения задачи

Учитывая, что

$$U(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)} \tag{3}$$

является фундаментальное решение уравнения Коши-Римана (1) [6], легко получаем основное соотношение, т.е.

$$\int_0^1 dx_1\int_0^1\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}U(x-\xi)dx_2+i\int_0^1 dx_2\int_0^1\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}U(x-\xi)dx_1=0$$

или

$$\int_0^1 u(x)U(x-\xi)\ \Big/_{x_2=0}^{1}\,dx_1+i\int_0^1 u(x)U(x-\xi)\ \Big/_{x_1=0}^{1}\,dx_2=$$

$$=\begin{cases}u(\xi), & \xi_k\in(0,1),\ k=1,2\\ \dfrac{1}{2}u(\xi), & \xi_1\in[0,1],\ \xi_2=0\ \ \textit{или}\ \ \xi_2=1\ \ \textit{и}\\ & \xi_2\in[0,1],\ \xi_1=0\ \ \textit{или}\ \ \xi_1=1.\end{cases} \tag{4}$$

Отделяя необходимые условия из (4), имеем:

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}u(\xi_1,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,1)}{1+i(x_1-\xi_1)}dx_1+\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,0)}{x_1-\xi_1}dx_1+\\
+\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(1,x_2)}{x_2+i(1-\xi_1)}dx_2-\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(0,x_2)}{x_2-i\xi_1}dx_2,\\
\frac{1}{2}u(\xi_1,1)=-\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,1)}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,0)}{-1+i(x_1-\xi_1)}dx_1+\\
+\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(1,x_2)}{x_2-1+i(1-\xi_1)}dx_2-\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(0,x_2)}{x_2-1-i\xi_1}dx_2,\\
\frac{1}{2}u(0,\xi_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,1)}{1-\xi_2+ix_1}dx_1-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,0)}{-\xi_2+ix_1}dx_1+\\
+\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(1,x_2)}{x_2-\xi_2+i}dx_2-\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(0,x_2)}{x_2-\xi_2}dx_2,\\
\frac{1}{2}u(1,\xi_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,1)}{1-\xi_2+i(x_1-1)}dx_1-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{u(x_1,0)}{-\xi_2+i(x_1-1)}dx_1+\\
+\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(1,x_2)}{x_2-\xi_2}dx_2-\frac{i}{2\pi}\int_0^1\frac{u(0,x_2)}{x_2-\xi_2-i}dx_2.
\end{cases} \tag{5}
$$

Каждое из соотношений содержит один сингулярное слагаемое.

Оставляя только сингулярные слагаемые, необходимые условия (5) напишем в виде:

$$
\begin{cases}
u(t,0)=\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(\tau,0)}{\tau-t}d\tau+\dots\ , \qquad u(1-t,1)=\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(1-\tau,1)}{\tau-t}d\tau+\dots\ ,\\
u(0,t)=-\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(0,\tau)}{\tau-t}d\tau+\dots\ , \qquad u(1,1-t)=-\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{u(1,1-\tau)}{\tau-t}d\tau+\dots\ ,
\end{cases} \tag{6}
$$

где многоточием обозначены суммы несингулярных слагаемых.

Теперь, исходя из (6) и учитывая граничные условия (2), создадим следующую линейную комбинацию:

$$
\alpha_{k1}(t)u(t,0)-\alpha_{k2}(t)u(1,1-t)+\alpha_{k3}(t)u(1-t,1)-\alpha_{k4}(t)u(0,t)=
$$

$$
=\frac{i}{\pi}\int_0^l\frac{d\tau}{\tau-t}\{[(\alpha_{k1}(t)-\alpha_{k1}(\tau))+\alpha_{k1}(\tau)]u(\tau,0)+[(\alpha_{k2}(t)-\alpha_{k2}(\tau))+\alpha_{k2}(\tau)]u(1,1-\tau)+
$$

$$+\left[(\alpha_{k3}(t)-\alpha_{k3}(\tau))+\alpha_{k3}(\tau)\right]u(1-\tau,1)+\left[(\alpha_{k4}(t)-\alpha_{k4}(\tau))+\alpha_{k4}(\tau)\right]u(0,\tau)\}+\ldots=$$

$$=\frac{i}{\pi}\int_0^l\frac{d\tau}{\tau-t}\left[\alpha_{k1}(\tau)u(\tau,0)+\alpha_{k2}(\tau)u(1,1-\tau)+\alpha_{k3}(\tau)u(1-\tau,1)+\alpha_{k4}(\tau)u(0,\tau)\right]+\ldots=$$

$$=\frac{i}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi_k(\tau)}{\tau-t}d\tau+\ldots\ ,\qquad k=\overline{1,4}. \tag{7}$$

Легко видно, что при получении (7) было учтено граничное условие (2). Учитывая, что правая часть (7) не содержит неизвестную функцию, то оно существует в смысле Коши.

Если имеет место условие

$$\varphi_k(t)\in C^{(1)}[0,1],\quad \varphi_k(0)=\varphi_k(1)=0,\ \ k=\overline{1,4}, \tag{8}$$

то интеграл в правой части (7) существует в обычном смысле. Поэтому мы получаем четыре регулярных соотношений (7), если

$$\alpha_{kj}(t)\in \mathrm{H}^{(\mu)}(0,1),\quad \mu\in(0,1),\ k=\overline{1,4};\ \ j=\overline{1,4}, \tag{9}$$

где $\mathrm{H}^{(\mu)}(0,1)$ - класс Гельдера и справедливо условие (8).

Возвращаясь к граничному условию (2), предполагая, что

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) & \alpha_{14}(t)\\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) & \alpha_{24}(t)\\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) & \alpha_{34}(t)\\ \alpha_{41}(t) & \alpha_{42}(t) & \alpha_{43}(t) & \alpha_{44}(t)\end{vmatrix}\neq 0, \tag{10}$$

по правилу Крамера определяем

$$u(t,0),\ u(1,1-t),\ u(1-t,1)\ \text{ и }\ u(0,t) \tag{11}$$

однозначно через $\varphi_k(t),\ k=\overline{1,4}$. Учитывая, что $\varphi_1(t)$ и $\varphi_3(t)$ заданные непрерывные функции из регулярного выражения (7), выберем $k=1$ и $k=3$.

Подставляя определенные функции (11) в двум выражении, которые выбраны из (7), получаем два регулярные выражения. Из этих выражений определяются неизвестные функции $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$. Что касается решению поставленной граничной задачи (1)-(2) $u(x)$, то оно определяется из основного соотношения (4), если в левую часть подставит найденные функции (11) и определенные функции $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$.

Заключение

Теорема. Пусть данные задачи(1)-(2) являются непрерывными функциями, условие (2) линейно независимо и выполняются условия (8)-(10). Тогда обратная задача в смысле Тихонова-Лаврентьева (1)-(2) имеет решение, которое определяется из основного соотношения (4), а неизвестные функции $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ определяются из регулярных выражений (7) при $k=1$ и $k=3$, которые получаются из необходимых условий (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Н.А., Гулиева А.М. Построение сопряженной задачи для уравнения Коши-Римана. Вестник Бакинского Университета. Серия физико-математических наук, Азербайджан, Баку, № 4, 2013, с. 43-54.
2. Алиев Н.А., Масталиев В.Ю., Зейналов Р.М. О краевой задаче для уравнения Коши-Римана. Научные труды фундаментальных наук Азербайджанского технического университета. Азербайджан, Баку, 2013, том. XII (45), № 1, с. 67-71.
3. Sajjadmanesh M., Jahanshahi M., Aliyev N. Tikhonov-Lavrentev type inverse problem including Cauchy-Riemann equation. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, Baku, January 2013, Vol. 3, № 1, pp. 104-110.
4. Алиев Н.А., Багиров Г.А., Велиева З.Т. О фредгольмовости краевой задачи для уравнения Коши-Римана в остром угле. Журнал современной прикладной математики, Азербайджан, Баку, том 1, выпуск 2, декабрь 2011 года, с. 43-48.
5. Aliyev N., Jahanshahi M. Sufficient conditions for reduction of the BVP including a mixed PDE with non-local boundary conditions to Fredholm integral equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Vol. 28 (1997), № 3, pp.419-425.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, 512 с.

KVADRAT ÜZƏRİNDƏ KOŞİ-RİMAN TƏNLİYİ ÜÇÜN TİXONOV-LAVRENTYEV MƏNADA BİR TƏRS MƏSƏLƏ HAQQINDA

N.Ə.ƏLİYEV, L.F.FƏTULLAYEVA

XÜLASƏ

Təqdim olunan iş kvadrat üzərində birinci tərtib elliptik tip tənlik üçün Tixonov-Lavrentyev mənada tərs məsələnin həllinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Qoyulmuş sərhəd məsələsinin həllinin təyini üçün ifadə alınmışdır.

Açar sözlər: Tixonov-Lavrentyev mənada tərs məsələ, Koşi-Riman tənliyi, Karleman şərti, sinqulyar toplanan, requlyar ifadə.

ON ONE INVERSE PROBLEM IN THE MEANING OF TIKHONOV-LAVRENTIEV FOR EQUATION OF KOSHI-ROMAN ON A SQUARE

N.A.ALIYEV, L.F.FATULLAYEVA

SUMMARY

The present work is devoted to the study of the solution of the inverse problem in the sense of Tikhonov-Lavrentiev for a first-order elliptic type equation on a square. To determine the solution of the posed boundary problem, the relation is obtained.

Keywords: inverse problem in the sense of Tikhonov-Lavrentiev, Cauchy-Riemann equation, Carleman condition, singular term, regular expression.

Поступила в редакцию: 09.10.2019 г.
Подписано к печати: 28.12.2019 г.