**BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ**

***№4*** ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2019***

**УДК 514.763**

# RELAKSASİYA YOLU İLƏ BÖYÜK ÖLÇÜLÜ XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMANIN BİR MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ

**R.H.HƏMİDOV**
***Bakı Dövlət Universiteti***
***shekihamidov@gmail.com***

*İşdə əlavə məhdudiyyətli və bu səbəbdən də müəyyən struktura malik şərtlərlə verilən bir sinif böyük ölçülü xətti proqramlaşdırma məsələsinə baxılır. Məsələnin strukturunun verdiyi imkanlardan istifadə edərək onun həllinin relaksasiya sxemi ilə daha sadə yolla həll oluna bilən məsələlərə gətirilməsinin mümkünlüyü göstərilir. İşdə, həmçinin ilkin məsələnin strukturunu saxlayan reduksiya sxemi təklif olunur. Bu məsələnin iqtisadi və texniki məzmunlu bir çox praktiki məsələlərin həllindəki yeri qeyd olunur. Təklif olunan yeni relaksasiya sxeminin misal üzərində icrası nümayiş etdirilir.*

**Açar sözlər:** Xətti proqramlaşdırma, relaksasiya, bazis həll, sadə iterasiya, ikili məsələ

İşdə aşağıdakı kimi təqdim olunan xətti proqramlaşdırma (XP) məsələsinə baxılır:

$$(E-A)x \le b,\ x \le d,\ x \ge 0,\ cx \to max. \tag{1}$$

Burada A elementləri mənfi olmayan $(nxn)$-matrisdir $(A \ge 0)$, $E$-vahid matrisdir, $b$ və $d$-nin koordinatları müsbətdir $(b, d > 0)$. (1)-dəki vektorların ölçüləri və onların sətr və ya sütun vektor olmasını $A$ matrisi birqiymətli olaraq müəyyən edir.

$c \ge 0$ olduqda (1) məsələsi və onun həlli yolları ətraflı öyrənilmişdir [1]. Bu həll yollarından biri xətti tənliklər sistemi üçün mövcud sadə iterasiyadan çox da fərqlənməyən həll yoludur [1,2]. $n$ böyük olduqda bu üsul daha səmərəlidir.

Bir riyazi model kimi iqtisadi və texniki məsələlərin təhlilində (1) məsələsindən istifadə olunma yolları [1]-də daha ətraflı öyrənilmişdir. Leontiyev modelinin tətbiqi ilə qarşıya çıxan və statik rejimdə neft çıxarmada rast gəlinən bir çox qərar qəbuletmə məsələləri buna misal ola bilər [1].

[1]-də $c \geq 0$ şərtinin bir çox məsələlərdə təbii bir şərt kimi qarşıya çıxdığı qeyd olunur (bax [1]). Lakin çox sayda məsələdə bu şərt ödənilməyə bilər. Məsələn,

$$(E - A)x \leq b, \qquad x \leq d, \qquad x \geq 0, \qquad c^0(b - (E - A)x) \to max.$$

kimi məsələdə $c \geq 0$ şərtinin ödənilməsi $c^0(E - A) \leq 0$ şərtinin ödənilməsinə gəlir. Bu şərt isə həmişə doğru olmaya bilər. Çünki $c^0 \geq 0$ vektorunun koordinatlarını qərar qəbul edənin kəsrlə icra olunan sifarişlərə olan münasibəti formalaşdırır. Başqa bir misal olaraq

$$(E - A)x \leq b, \qquad x \leq d, \qquad x \geq 0, \qquad c^1x \to max, \dots, c^kx \to max$$

kimi qərar qəbuletmə məsələsini götürə bilərik. İndividual kriteriyalardan ən azı biri üçün $c^1 \geq 0$ şərti pozularsa, onda belə məsələnin təhlili zamanı mövcud effektiv hesablama üsullarının tətbiqi imkanları daralır.

## 1. Relaksasiya sxeminin şərhi

(1) məsələsinin relaksasiyasını $(E - A)^{-1} \geq 0$ şərti və məsələnin ekstremal nöqtələrinin cırlaşmayan olması şərti daxilində icra edəcəyik. İkinci şərt hər bir ekstremal nöqtədə $Ax \leq b, x \leq d, x \geq 0$ kimi $3n$ sayda olan şərtdən yalnız $n$ dənəsinin bərabərlik şəklində ödənildiyini tələb edir. Asanlıqla yoxlanıla bilən və relaksasiya zamanı istifadə edəcəyimiz aşağıdakı xassə doğrudur.

*Lemma 1.* Hər bir ekstremal nöqtənin təyinində $(E - A)x = b,\ x_i = d_i$, $x_i = 0$ şərtlərindən yalnız biri iştirak edə bilər.

*Relaksasiya sxeminin birinci addımı.* $A_i$ ilə $A$-nın $i$-ci sətrini işarə edək. $N = \{1,2, \dots, n\}$ olsun. $G^1 \subset N$ alt çoxluğu üçün düzələn aşağıdakı kimi məsələyə baxaq:

$$(E - A^1)x \leq b^1,\ x \geq 0,\ cx \to max \tag{2}$$

Burada $A_i^1 = A_i\,, b_i^1 = b_i\,, i\epsilon G^1,\ A_i = 0,\ b_i^1 = d_i\,, i\epsilon N/G^1$. (2) məsələsinin $G^1$- məsələsi kimi adlandıraq. (2)-ni, həmçinin lokal məsələ kimi təqdim edəcəyik. İstənilən (2) lokal məsələsi [1]-də adlandırılan $S$- məsələsi kimidir və o mövcud effektiv alqoritmlərin birinin köməyilə asanlıqla həll oluna bilər. Bu alqoritmlərdən birinin iş sxemi belədir: a) $c$ vektorunun $c \leq 0$ olub olmaması şərti yoxlanılır. Bu şərt ödənilərsə, onda $x^0 = 0$ optimal həlldir. Əks halda $c_i > 0$ şərtini ödəyən bütün $x_i$ dəyişənlərini $(E - A^1)x)_i = b_i^i$ tənliklər sisteminin köməyilə yerdə qalan dəyişənlərlə əvəz edib bu əvəzləməni $cx$-də nəzərə alırlar. Bu yolla $c_i > 0$ şərtini ödəyən bütün dəyişənləri (2)-nin yazılışından kənarlaşdırırlar və yeni (2) kimi, lakin daha kiçikölçülü məsələni tərtib edirlər. Bununla da həll alqoritminin bir iterasiyası icra olunur. b) yeni alınan (2) kimi məsələ üçün a)-dakı prosedura təkrar olunur. c) axırıncı alınan (2) kimi məsələnin optimal $x^0$ həllini geriyə addımla icra olunan əvəzləmələrdə nəzərə alıb ilkin (2) məsələsinin optimal $x^1$ həllini qururuq. Bu yolla təqdim olunan relaksasiya sxeminin birinci iterasiyasını icra etmiş oluruq.

*Relaksasiya sxeminin ikinci addımı.*

$\bar{A}^1 = A - A^1$ olsun. $\bar{b}_i^1 = b_i,\ i\epsilon N/G^1,\ \bar{b}_j^1 = d_j,\ j\epsilon G$ şərtləri ilə düzələn $\bar{b}_i^1$ sütun vektoruna baxaq. $\bar{A},\ \bar{b}^1$ və $x^1$-in köməyilə düzələn aşağıdakı hesablamanı aparaq:

$$\alpha^1 = \max_{i\epsilon N}\left(( E - \bar{A}^1)x^1)_i - \bar{b}_i^1\right) = (E - \bar{A}^1)x_{i_0}^1 - \bar{b}_{i_0}^1 \tag{3}$$

$\alpha^1 \leq 0$ olarsa, onda $x^1$ (1) məsələsinin də həlli olacaqdır. $\alpha^1 \leq 0$ şərtini təklif olunan relaksasiya sxemi üçün optimallıq şərti kimi qəbul edəcəyik. Optimallıq şərti pozularsa (2) məsələsinin şərtlərinə yeni bir $((E - \bar{A}^1)x)_{i_0} \leq b_{i_0}$ şərtini əlavə edirik və (2)-dən bir şərti kənarlaşdırırıq. Kənarlaşdırılan şərt $((E - A)x)_{i_0} \leq b_{i_0}, x_{i_0} \leq d_{i_0}$şərtlərindən $((E - \bar{A}^1)x)_{i_0} \leq b_{i_0}^1$ şərti ilə üst-üstə düşməyənidir. $c_{i_0} > 0$ olarsa, onda yeni daxil olan şərtdəki bərabərsizliyi bərabərliklə əvəz edirik. Alınmış yeni (2) məsələsini birinci addımdakı yolla həll edib onun optimal $x^2$ həllini qururuq. Yeni (2) məsələsi üçün $G^2 \subset N$ alt çoxluğu belə qurulur: $G^2 = {}^{G^1}/_{i_0}$ , $x_{i_0} > d_{i_0}$ olduqda $G^2 = G^1 \cup \{i_0\}$ $((E - A)x)_{i_0} >$

$b_{i_0}$ olduqda. Onda yeni (2) məsələsi $G^2$-məsələsi olacaqdır. Bu qayda ilə optimallıq şərti doğru olana kimi $G^i, i = 1, \dots, m$ çoxluqlarının köməyilə qurulan $S$ məsələsinin $x^1, x^2, \dots, x^m$ optimal həllərini qururuq. Axırıncı $x^m$ həlli ilkin (1) məsələsinin də həlli olacaqdır. Bu hökmün doğruluğu isə aşağıdakı təklifdən alınır.

*Təklif.* $cx^1 < cx^2$.

Təklifin isbatı (2) məsələsini yuxarıda göstərilən $S$ məsələsi kimi həll edən zaman malik olduğu aşağıdakı xassələrdən alınır.

*Xassə 1.* Hər bir yeni dəyişən bazisə daxil olduqda məqsəd funksiyası ciddi artım alır.

Bu xassənin doğruluğu $(E - A)^{-1} > 0$ və $b > 0$ şərtlərindən alınır.

*Xassə 2.* Optimal həllin $x_i$ koordinatlarının artımına $((E - A)x)_i \leq b_i$ və $x_i \leq d_i$ şərtlərindən yalnız biri mane ola bilər. Bu xassə lemmadan bir nəticə kimi çıxır.

*Xassə 3.* $G^2$ məsələsinin $x^2$ həllinin $x_{i_0}^2$ koordinatı $G^1$məsələsinin $x^1$ həllinin $x_{i_0}^1$ koordinatında kiçikdir: $x_{i_0}^2 < x_{i_0}^1$.

Xassə 3-ün isbatı əvvəlki iki xassədən və əlavə $((E - A^2)x)_{i_0} \leq b_{i_0}$ şərtinin daxil edilməsindən alınır.

## 2. Relaksasiya sxeminin ədədi misal üzərində nümayişi

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0&0.2&0.2&0.2\\0.2&0&0.2&0.2\\0.2&0.2&0&0.2\\0.2&0.2&0.2&0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}0.6\\0.4\\0.7\\0.3\end{pmatrix},\ d=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$c=(-8\quad -1\quad 1\quad 2),\ N=\{1,2,3,4\}$

verilənlərinə görə qurulan məsələyə baxaq:

$$\begin{array}{l}
x_1-0x_1-0.2x_2-0.2x_3-0.2x_4\le 0.6\,,\\
x_2-0.2x_1-0x_2-0.2x_3-0.2x_4\le 0.4\,,\\
x_3-0.2x_1-0.2x_2-0x_3-0.2x_4\le 0.7\,,\\
x_4-0.2x_1-0.2x_2-0.2x_3-0x_4\le\\
0.3\,, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1')\\
x_1 \le 1\,,\\
x_2 \le 1\,,\\
x_3 \le 1\,,\\
x_4 \le 1\,,
\end{array}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,$

$-8x_1-x_2-x_3+2x_4\to max.$

Relaksasiya sxemi $G\subset N$ çoxluğundan asılı olaraq müxtəlif variantda icra oluna bilər. Bizim baxdığımız variant onlardan biridir.

*Addım 1*. $G^1=\emptyset\subset N$. Onda $A^1=0, b_i^1=1, i\epsilon N$.

(2) məsələsini tərtib edək:

$$\begin{array}{l}
x_1 \le 1\,,\\
x_2 \le 1\,,\\
x_3 \le 1\,, \qquad\qquad (2')\\
x_4 \le 1\,,
\end{array}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,$

$-8x_1-x_2+x_3+x_4\to max,$

məsələnin həlli

$x^1=(0,0,1,1)^T\quad cx^1=7$

*Addım 2.*

$\bar{A}^1 = A - A^1 = A\,,\ \bar{b}^1 = b$

$\alpha^1 = \max_{1\le i\le 4}\left((E - \bar{A}^1)x^1)_i - \bar{b}_i^1\right)$

$$(E - \bar{A}^1)x^1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 1 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 \\ -0.4 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha^1 = \max(-0.40.6\,, -0.4 - 0.4\,, 0.8 - 0.7\,, 0.8 - 0.3) = 0.5, i_0 = 4$

$\alpha^1 \le 0$ şərti, yəni opimallıq şərti ödənilmir. Ona görə də $(2')$ məsələsinin şərtinə $((E - \bar{A}^1)x)_4 \le b_4$ şərtini, yəni -0.2$x_1 - 0.2x_2 - 0.2x_3 + x_4 \le 0.3$ şərtini əlavə edib onun $x_4 \le 1$ şərtini isə kənarlaşdırırıq. Nəticədə $G^2 = \{4\}$ çoxluğunu və bu çoxluğa uyğun lokal $G^2$ məsələsini tərtib edirik

$x_1 \le 1$ ,

$x_2 \le 1$ ,

$x_3 \le 1$ ,

-0.2$x_1 - 0.2x_2 - 0.2x_3 + x_4 \le 0.3$ ,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,$

$-8x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 \to max.$

Alınmış $S$-məsələsinin yuxarıda təqdim olunan həll alqoritminə uyğun olaraq $c_3 = 1 > 0,\ c_4 = 6 > 0$ olduğu üçün $x_3$ və $x_4$ dəyişənlərini

$x_3 \le 1$ ,

-0.2$x_1 - 0.2x_2 - 0.2x_3 + x_4 \le 0.3$

sisteminin köməyilə $x_1$ və $x_3$-lə ifadə edib onları $S$-məsələsinin sonrakı həll prosesindən kənarlaşdırırıq.

$x_3 = 1$

$x_4 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.5$

$x_1 \le 1$

$x_2 \le 1$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

$-8x_1 - x_2 + 1 + 6(0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.5) = -6.2x_1 + 0.2x_2 + 4 \to max.$

Alınmış yeni $S$-məsələsində müsbət əmsal kriteriyada iştirak etdiyi üçün belə əmsallı dəyişəni kənarlaşdırırıq, yəni $x_2 = 1$ qəbul edirik. Nəticədə məsələnin optimal $x^2 = (0.1,\ \ 1,\ \ 0.5)^T$ həllini qururuq. $cx^2 = 4.2 < cx^1 = 7$. $x^2$ həlli ilkin məsələnin bütün şərtlərini, yəni optimallıq şərtini ödəyir.

Relaksasiya sxemində iştirak edən (2)-nin lokal $S$-məsələlərini iterasiya yolu ilə də həll edərik. Bu yolla əvvəlcə (2) məsələsinə qoşma olan

$\Psi(E - A^1) \geq c, \Psi \geq 0, \Psi b \to min$

məsələsinin $\Psi^1$ optimal həlli

$\Psi^{(1)} = 0, \Psi^{(n+1)} = \max\left(0, c - \Psi^{(n)} A^1\right), n = 1,2$

ardıcıllığı vasitəsilə $\lim_{n\to\infty} \Psi^n = \Psi^1$ kimi tapılır. Sonra $\Psi^{(1)}$-in köməyilə qoşma olduğu ilkin məsələnin optimal $x^1$ həlli ikinci ikili teoremin köməyilə bərpa olunur. Relaksasiya sxeminin ədədi misal üzərində nümayişi üçün bu üsulun münasib olmadığı işdə ondan istifadə olunmadı. Lakin iterasiya yolu relaksasiya sxeminin proqram formasında icrası üçün daha əlverişlidir. Belə həll yolunun ətraflı təhlili [1]-də geniş verilmişdir. İterasiya yolunun daha geniş sinif məsələlərə tətbiqi imkanı [2]-də göstərilmişdir.

### 3. Məsələ (1)-in reduksiyası

Tutaq ki, (1)-də $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ vektorunun koordinatlarının düzülüşü belədir: $c_i < 0,\ i = \overline{1,k},\ c_j \geq 0,\ j = \overline{k+1,n}$ . Bu düzülüşə uyğun

$d^0 = (d_{k+1}, \dots, d_n),\ A^0 = \left\|a_{ij}\right\| \left(\ i = \overline{k+1,n}, j = k+1, n\right),\ b^0 = (b_{k+1}, \dots, b_n)^T$
işarələmələrini daxil edək. Asanlıqla göstərə bilərik:

*Lemma 2.* $((E - A)d - b)_i \leq \left((E - A^0)d^0 - b^0\right)_i,\ i = k+1, \dots, n$

Lemma 2-dən alırıq: $((E - A)d - b)_i \geq 0 \Rightarrow \left((E - A^0)d^0 - b^0\right)_i \geq 0,\ i = k+1, \dots, n$

$Q = \{i \epsilon N | c_i \geq 0\ v\ ((E - A)d - b)_i \geq 0\}$ olsun və $Q \neq \emptyset$ .

Lemma 2-dən və $S$-məsələsinin yuxarıda qeyd olunan həll alqoritminin icra mexanizmindən alırıq:

*Xassə 1.* $((E - A)x)_i = b_i, i\epsilon Q$ tənliklər sistemindən istifadə edərək $x_i\ i\epsilon Q$ dəyişənlərini (2) məsələsinin sonrakı həllindən kənarlaşdıra bilərik.

Tutaq ki, $L = \{i\epsilon N | d_i \leq b_i\}\ v\ L \neq \emptyset$

*Xassə 2.* a) (1)-dəki bütün $((E - A)x)_i = b_i, i\epsilon L$ şərtlərini sonrakı həll prosesindən onları almaqla kənarlaşdıra bilərik. Bu zaman yeni alınan məsələ əvvəlki strukturunu saxlayacaqdır və ona ekvivalent məsələ olacaqdır; b) Əlavə olaraq $c_i \geq 0$ olarsa, onda $x_i \leq d_i$ şərtini $x_i = d_i$ şərti ilə əvəz edib $x_i$ dəyişənini sonrakı həll prosesindən kənarlaşdıra bilərik. a)-nın doğru olması

$$x_i \leq d_i \Rightarrow x_i - (Ax)_i \leq d_i - (Ax)_i \leq d_i \leq b_i$$

münasibətlərindən alınır. b)-nin doğruluğu asanlıqla yoxlanılır.

## ƏDƏBİYYAT

1. Мееров М.В., Литвак Б.Л. Оптимизация многосвязных систем. М.: Наука, 1972.
2. Беленький В.З. Линейное программирование имеющую минимальную точку. ДАН СССР, 1968, v.183, с. 15-17

## МЕТОД РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ ОДНОЙ БОЛЬШОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Р.Г.ГАМИДОВ**

### РЕЗЮМЕ

В работе предлагается метод релаксации для решения одной большой задачи линейного программирования обладающую специальную структуру. Применяются существующие, хорошо разработанные и эффективные алгоритмы для реализации отдельного шага метода. А эти алгоритмы не пригодны для решения исходной задачи. Этим отличается предлагаемая здесь схема релаксация от схемы Geoffriona. Приводится практические задачи где можно использовать предлагаемой схемы. Схема релаксация иллюстрируется на числовом примере.

**Ключевые слова:** линейное программирование, релаксация, базисное решение, простая итерация, двоичная задача

## RELAXATION METHOD FOR ONE LARGE LINEAR PROGRAMMING

**R.H.HAMIDOV**

### SUMMARY

A new relaxation method for one large linear programming is suggested. Each iteration of the method solves one local linear programming and efficient procedures are used to solve them. But it is impossible to use them in searching optimal solution of the initial problem. Namely, this property differs our relaxation procedure from Geoffrion method. A numerical example is solved to illustrate relaxation method.

**Keywords**: linear programming, relaxation, basic solution, simple iteration, binary problem