BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2019

MEXANİKA

УДК 531+539.3

DÜZBUCAQLI TAĞA TƏSİR EDƏN BÖHRAN QÜVVƏNİN TƏYİN OLUNMASI

M.F.MEHDİYEV, L.F.FƏTULLAYEVA, N.İ.FOMİNA, N.E.QARAYEVA
Bakı Dövlət Universiteti
laura_fat@rambler.ru

Məqalədə düzbucaqlı formada olan tağın gərginlik-deformasiya vəziyyətinin (GDV) həndəsi qeyri-xətti qoyuluşda tədqiqi verilmişdir. Əgər tağ mürəkkəb fəza konfiqurasiyasına malikdirsə, deformasiyalar sonludursa, tağa xaricdən təzyiq olunursa, onda GDV-nin analizi üçün riyazi xarakterli çətinliklər yaranır. Buna görə də qoyulmuş məsələnin həlli üçün təqribi hesablama üsullarının, baxılan halda isə variyasiya üsulunun tətbiqi vacibdir [1]. Funksionalın stasionar qiymətlərini tapmaq üçün Reley-Rits üsulundan istifadə olunur. Nəticədə, elastiki, düzbucaqlı tağın dayanıqlıq məsələsi cəbri tənliyin həllinə gətirilir və tağa təsir edən böhran qüvvə üçün analitik ifadə alınır.

Açar sözlər: düzbucaqlı tağ, variyasiya üsulu, gərginlik-deformasiya vəziyyəti, böhran qüvvə, Reley-Rits üsulu, oynaqlı bağlanma.

Üçoynaqlı çərçivə modeli tağın qeyri-xətti deformasiyasının əsas xüsusiyyətlərini göstərən ilkin modellərdən biridir. Bu xüsusiyyətlər belədir:

1) sabit yüklənmə zamanı bir neçə tarazı formalarının varlığı;
2) dayanıqlığın "böyük" formada itirilməsinin mümkünlüyü.

İkinci xüsusiyyətin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, bu zaman dayanıqlığın itirilməsi bir formadan digər formaya sıçrayış şəklində keçir. Qeyri-xətti deformasiyanın 1)-2) xüsusiyyətləri düzbucaqlı formada olan ikioynaqlı tağın əyilməsinin qeyri-xətti məsələsinin həllində də aşkar olunmuşdur. Bu zaman tağ müntəzəm, normal təzyiq altındadır və məsələnin təqribi həlli energetik üsulla alınmışdır. Sonralar isə tağın dayanıqlığının xəttiləşdirilmiş məsələləri həll olunmağa başlandı. Elektron-hesablama texnologiyalarının inkişafı konstruksiyaların deformasiyasının qeyri-xətti sərhəd məsələlərinin həll üsullarını daha da aktual etdi. Belə effektiv üsullardan biri də variyasiya prinsipidir. Qurulmuş funksionalın əsas xarakterik xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, burada parametrlərin özləri yox, onların sürətləri iştirak edir.

Elastiklik nəzəriyyəsi məsələsinin variyasiya prinsipi formasında qoyulması əsasən iki halda istifadə olunur. Birinci halda, funksionalın stasionarlıq şərti əsasında bu məsələnin həlli üçün ədədi üsullar qurulur (Rits üsulu, sonlu elementlər üsulu və s.). Bütün bu üsullar elastiklik nəzəriyyəsi məsələlərinin həllinə tətbiq olunan düz üsullar sinfinə aiddirlər. Qeyd etmək lazımdır ki, belə düz üsullar diferensial tənliklərin istifadəsinin aşkar formasını tələb etmirlər.

Variyasiya prinsipinin tətbiq olunmasının ikinci xarakterik halı baxılan məsələnin diferensial tənliklərinin və sərhəd şərtlərinin alınmasından ibarətdir, qurulmuş diferensial tənliklər uyğun funksionalın Eyler tənlikləri rolunu oynayır. Bu cür həll yolu mürəkkəb formalı və quruluşlu cisimlər üçün (məsələn, çoxlaylı örtüklər, çoxoynaqlı tağlar və s.), həmçinin bir koordinat sistemindən digər koordinat sisteminə keçid zamanı (dekart koordinat sistemindən polyar, əyrixətli və başqa sistemlərə) əlverişlidir.

1. Məsələnin qoyuluşu

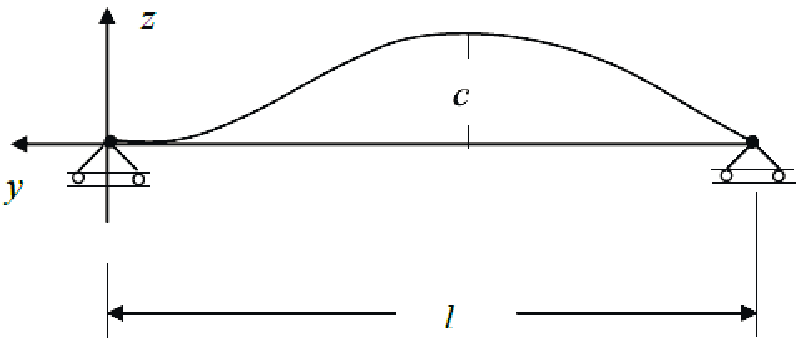
Təklif olunan variyasiya üsulun effektivliyi qalınlığına görə qeyri-bircins, ucları oynaqlı bağlanmış düzbucaqlı tağın dayanıqlığının təyini problemi üzərində göstərilir. Baxılan tağ səthi boyunca müntəzəm paylanan şaquli, intensivliyi q olan təzyiq altındadır.

Fərz edək ki, hər iki ucu oynaqlı bağlanmış düzbucaqlı tağın oxu bu şəklindədir [2]:

$$\omega = c_0 \eta \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \tag{1}$$

burada c_0 - tağın qalxma oxu, η-approksimasiya funksiyası, l- tağın dayaqları arasındakı məsafə, z isə şaquli koordinatdır (şəkil 1). Aydındır ki, (3.6) ifadəsi hər iki ucun oynaqlı bağlanmasının sərhəd şərtlərini ödəyir, yəni:

$$\omega(0) = \omega(l) = 0 .$$



Şək. 1. Hər iki ucu oynaqlı bağlanmış düzbucaqlı tağın modeli

Tağın en kəsiyi düzbucaqlı formasındadır, onun hündürlüyü $2h$, eni isə b-dir. Fərz olunur ki, tağ həndəsi olaraq qeyri-xəttidir, yəni o, qalınlıqları müxtəlif olan n sayda laydan ibarətdir. Layların hər birinin qalınlığını δ_{k+1} ilə işarə edək, onda $\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k+1} = 2h$.

Tağın hal tənliyini aşağıdakı bərabərlik şəklində yazaq:

$$\varepsilon^{v} = \frac{\sigma}{E_{k+1}(y)}, \qquad a_k \le y \le a_{k+1}, \tag{2}$$

burada σ - gərginlik, E_{k+1}, $[k = 0,1,...,(s-1)]$, k-cı layın materialının elastiklik moduludur. Hər bir layda elastiklik modulu y - üfiqi koordinatdan asılıdır: $E_{k+1} = E_{k+1}(y)$. (2) ifadəsində

$$a_k = -h + \sum_{j=0}^{k} \delta_j \qquad (\delta_0 = 0)$$

əvəzləməsi aparılmışdır.

Funksionalın ifadəsini aşağıdakı kimi daxil edək [3]:

$$J = b\int_{-h}^{h}\int_{0}^{l}\left\{\dot{\sigma}\dot{\varepsilon} + \frac{1}{2}\sigma\dot{\omega}_{,z}\right\}dydz - \frac{1}{2}\int_{-h}^{h}\int_{0}^{l}\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}^{v}dydz + \int_{0}^{l}\dot{q}\dot{\omega}dz. \tag{3}$$

(2) ifadəsini nəzərə alsaq, funksionalın (3) düsturu bu formada olar:

$$J = b\int_{-h}^{h}\int_{0}^{l}\left\{\dot{\sigma}\dot{\varepsilon} + \frac{1}{2}\sigma\dot{\omega}^{2}{}_{,z}\right\}dydz - \frac{1}{2}\int_{0}^{l}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\dot{\sigma}^2}{E_{k+1}(y)}dydz + \int_{0}^{l}\dot{q}\dot{\omega}dz. \tag{4}$$

(4) düsturunda deformasiyanın sürəti belə təyin olunur:

$$\dot{\varepsilon} = \omega_{,z}\dot{\omega}_{,z} - y\dot{\omega}_{,zz}. \tag{5}$$

Approksimasiya funksiyasını və onun sürətini belə təyin edək:

$$\sigma = E_1\left(\sigma_0^{v} + \sigma_1^{v}\left(\frac{2y}{h}\right)\right), \quad \dot{\sigma} = E_1\left(\dot{\sigma}_0^{v} + \dot{\sigma}_1^{v}\left(\frac{2y}{h}\right)\right). \tag{6}$$

burada

$$\sigma_0^{v} = \sigma_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad \sigma_1^{v} = \sigma_1 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right).$$

2. Böhran qüvvə üçün ifadənin alınması

Hesablamaların sonrakı gedişatı belədir: (1), (5), (6) ifadələri və onların uyğun törəmələri funksionalın (4) düsturunda yerinə yazılır, sonra isə riyazi hesablamalar aparılır. Nəticədə funksional üçün aşağıdakı ifadə alınır:

$$J = \frac{bhE_1\pi^2}{l}c_0^2\dot{\sigma}_0\eta\dot{\eta} + \frac{2}{3}bh^2E_1c_0\frac{\pi^2}{l}\dot{\sigma}_1\dot{\eta} + \frac{1}{2}bhE_1\frac{\pi^2}{l}c_0{}^2\dot{\eta}^2\sigma_0 -$$

$$-\frac{bl}{2}E_1{}^2\dot{\sigma}_0{}^2\Phi_0-\frac{4l}{\pi h}bE_1{}^2\dot{\sigma}_0\dot{\sigma}_1\Phi_1-\frac{bl}{2h^2}E_1{}^2\dot{\sigma}_1{}^2\Phi_2+\dot{\eta}c_0\frac{2l}{\pi}. \qquad (7)$$

(7) funksionalının stasionar qiymətlərini tapmaq üçün Reley-Rits üsulundan istifadə olunur və funksionalın stasionar qiyməti hesablanır:

$$\frac{\partial J}{\partial\dot{\eta}}=0,\quad \frac{\partial J}{\partial\dot{\sigma}_0}=0,\quad \frac{\partial J}{\partial\dot{\sigma}_1}=0\ .$$

Onda belə bir tənliklər sistemi alınır:

$$\begin{aligned}
&\frac{bhE_1\pi^3}{2l^2}c_0\dot{\sigma}_0\eta+\frac{1}{3}bh^2E_1\frac{\pi^3}{l^2}\dot{\sigma}_1+\frac{1}{2}bhE_1\frac{\pi^3}{l^2}c_0\dot{\eta}\sigma_0+1=0,\\
&\frac{\pi^2}{l}c_0{}^2h\eta\dot{\eta}-lE_1\dot{\sigma}_0\Phi_0-\frac{4l}{\pi h}E_1\dot{\sigma}_1\Phi_1=0,\\
&\frac{2\pi^2}{3l}c_0h^2\dot{\eta}-\frac{4l}{\pi h}E_1\dot{\sigma}_0\Phi_1-\frac{l}{h^2}E_1\dot{\sigma}_1\Phi_2=0.
\end{aligned} \qquad (8)$$

(8) tənliklərini

$$\eta(0)=1,\quad \sigma_0(0)=\sigma_1(0)=\sigma_2(0)=0$$

başlanğıc şərtləri daxilində inteqrallasaq, alarıq:

$$\begin{aligned}
&\frac{bhE_1\pi^3}{2l^2}c_0\sigma_0\eta+\frac{1}{3}bh^2E_1\frac{\pi^3}{l^2}\sigma_1+\frac{1}{2}bhE_1\frac{\pi^3}{l^2}c_0\eta\sigma_0+q=0,\\
&\frac{\pi^2}{2l}c_0{}^2h\eta^2-lE_1\sigma_0\Phi_0-\frac{4l}{\pi h}E_1\sigma_1\Phi_1=0,\\
&\frac{2\pi^2}{3l}c_0h^2\eta-\frac{4l}{\pi h}E_1\sigma_0\Phi_1-\frac{l}{h^2}E_1\sigma_1\Phi_2=0.
\end{aligned} \qquad (9)$$

(9) tənliklər sisteminin sonuncu iki tənliyindən σ_0 və σ_1 parametrlərini tapıb, birinci tənlikdə yerinə yazsaq və

$$\xi=\frac{c_0}{h},\ \lambda=\frac{h}{l},\ \tau=\frac{q}{E_1b},\ \varphi_0=\frac{E_1}{h}\Phi_0,\ \varphi_1=\frac{E_1}{h^2}\Phi_1,\ \varphi_2=\frac{E_1}{h^3}\Phi_2$$

ölçüsüz kəmiyyətləri daxil etsək, böhran qüvvəni təyin etməkdən ötrü aşağıdakı tənliyi almış olarıq:

$$\tau=\left[-3\pi^7\xi^3\lambda^4\varphi_2\eta^3+20\pi^6\xi^2\lambda^4\varphi_1\eta^2-\frac{4}{3}\pi^7\xi\lambda^4\varphi_0\eta\right]\cdot A^{-1}, \qquad (10)$$

burada

$$A=6\pi^2\varphi_0\varphi_2-96\varphi_1{}^2.$$

Aydındır ki, böhran qüvvə öz ekstremal qiymətini

$$\frac{d\tau}{d\eta}=0 \qquad (11)$$

olduqda alır. Bu zaman tağın konstruksiyasında çatlama əmələ gəlir. (11) tənliyindən η_{bh} -nın qiyməti tapılır və bu qiymət (10) ifadəsində yerinə yazılmaqla, böhran qüvvə hesablanır.

3. Nəticə

Beləliklə, (10) tənliyi qeyri-xətti cəbri tənlikdir. Orada iştirak edən kəmiyyətlər düzbucaqlı tağın həndəsi və mexaniki-fiziki parametrləridir. Bu parametrləri verməklə, böhran qüvvə hesablanır. Tağın materialını xarakterizə edən parametrlərin qiymətlərindən asılı olaraq, böhran qüvvəni azaltmaq və ya artırmaq olar. Onda konstruksiyaların dayanıqlığının optimal variantını əldə etmək mümkündür.

ƏDƏBİYYAT

1. Амензаде Р.Ю., Мустафаева Э.М.: Фатуллаева Л.Ф. Вариационный подход к определению критических нагрузок для многослойных стержней // Журнал «Механика-машиностроение». Баку: Азербайджанский Технический Университет, 2010, № 1, с. 9-11.
2. Фатуллаева Л.Ф. Прощелкивание неоднородной по толщине нелинейно-упругой пологой арки // Владикавказский математический журнал. Апрель-июнь, 2005, т.7, вып.2, с.86-89.
3. Mekhtiyev M.F., Fatullayeva L.F., Fomina N.I. A variational approach to solving the problem of the stability of a gentle arch // International Conference "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics. 23-25 October, 2019, Baku, Azerbaijan, pp.373-375.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ПРЯМОУГОЛЬНУЮ АРКУ

М.Ф.МЕХТИЕВ, Л.Ф.ФАТУЛЛАЕВА, Н.И.ФОМИНА, Н.Э.КАРАЕВА

РЕЗЮМЕ

В представленной статье дано исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) прямоугольной арки в геометрически нелинейной постановке. Когда арка имеет сложную пространственную конфигурацию, её деформации конечны и на арку действует внешняя нагрузка, тогда для анализа НДС возникают трудности математического характера. Поэтому для решения поставленной задачи необходимо применение приближенных вычислительных методов, в данном случае, вариационного метода [1].Чтобы найти стационарные значения функционала, используется метод Релея-Ритца. В результате задача устойчивости упругой прямоугольной арки сводится к решению алгебраического уравнения, и, таким образом, получается аналитическое выражение для критической силы, действующей на арку.

Ключевые слова: прямоугольная арка, вариационный метод, напряженно-деформированное состояние, критическая сила, метод Релея-Ритца, шарнирное опирание.

DETERMINATION OF THE CRITICAL FORCE ON THE RECTANGULAR ARCH

M.F.MEKHTIYEV, L.F.FATULLAYEVA, N.I.FOMINA, N.E.KARAYEVA

SUMMARY

In the presented article the study of stress-deformed state (SDS) of rectangular arch in geometrically nonlinear production is given. When the arch has a complex spatial configuration, its deformations are finite and there is an external load on the arch, then difficulties of a mathematical nature arise for SDS analysis. Therefore, in order to solve the problem, it is necessary to use approximate computational methods, in this case, of variation method [1]. To find stationary functional values, the Relay-Ritz method is used. As a result, the stability problem of an elastic rectangular arch is reduced to solving an algebraic equation, and thus an analytic expression is obtained for the critical force acting on the arch.

Keywords: a rectangular arch, a variation method, the stress- deformed state, critical force, the Relay-Ritz method, a hinge support conditions.