УДК 517.956.35

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ДИНАМИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СИЛЬНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Г.ШАФИЕВА

Бакинский Государственный Университет,

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана,

gulshan.shafiyeva@mail.ru

Исследуется смешанная задача для одномерного волнового уравнения с сильной диссипацией и динамическим условием сопряжения. Доказана корректность рассматриваемой задачи в пространствах типа L_p.

Ключевые слова: волновое уравнение, сильная диссипация, смешанная задача, динамическое условие сопряжения, корректность.

Постановка задачи и основной результат. Смешанная задача с динамическими условиями сопряжения исследована в различных работах [1-3]. Смешанная задача для волновых уравнений с сильной диссипацией исследована в работах [4-6]. В данной работе исследуется смешанная задача для одномерных волновых уравнений с сильной диссипацией и динамическим условием сопряжения.

В области $Q_T = [0,T]\times[0,2]$ рассмотрим смешанную задачу

$$u_{tt} - u_{xxt} - u_{xx} = f(t,x), \quad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$v_{tt} - v_{xxt} - v_{xx} = g(t,x), \quad 0 \le t \le T, \quad 1 \le x \le 2 \tag{2}$$

с граничными условиями

$$u(t,0) = 0, \quad v(t,2) = 0, \tag{3}$$

условиями сопряжения

$$u(t,1) = v(t,0) = \phi(t), \tag{4}$$

$$\phi_{tt}(t) + u_{xt}(t,1) - v_{xt}(t,1) + \beta_1 u_x(t,1) + \beta_2 v_x(t,1) + \beta_3 \phi(t) = h(t) \tag{5}$$

и начальными условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \tag{6}$$

$$\phi'(0)=\phi_1. \tag{7}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

(i) $\beta_1,\beta_2\in R$;

(ii) $f(t,x)\in C^1([0,T]\times[0,1])$;

(iii) $g(t,x)\in C^1([0,T]\times[1,2])$;

(iv) $h(t)\in C^1[0,T]$.

Обозначим через $\|\cdot\|_{p,1}$ норму в пространстве $L_p(0,1)$:

$$\|u\|_{p,1}=\left[\int_0^1|u(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

а через $\|\cdot\|_{p,2}$ норму в пространстве $L_p(1,2)$:

$$\|v\|_{p,2}=\left[\int_1^2|v(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Посредством $W_p^1(a,b;c)$ где $c\in[a,b]$ определим следующее подпространство пространства Соболева $W_p^1(a,b)$: $W_p^1(a,b;c)=$ $=\{v: v\in W_p^1(a,b),\, v(c)=0\}$. Кроме того, при помощи X_p зададим пространство:

$$X_p=\{w: w=(u,v,\alpha), u\in L_p(0,1), v\in L_p(1,2), \alpha\in C\},$$

$$\|w\|_{X_p}=\left[\int_0^1\|u(x)\|_p^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_1^2\|v(x)\|_p^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}+|\alpha|,$$

где $w=(u,v,\alpha), u\in L_p(0,1), v\in L_p(1,2), \alpha\in C$. А также следующим образом пространство Y_p:

$$Y_p=\{w: w=(u,v,\phi), u\in W_p^2(0,1)\cap W_p^1(0,1;0),$$
$$v\in W_p^2(1,2)\cap W_p^1(1,2;2), u(1)=v(1)=\phi\}$$

с нормой

$$\|w\|_{Y_p}=\|u_{xx}\|_{p,1}+\|u_x\|_{p,1}+\|v_{xx}\|_{p,2}+\|v_x\|_{p,2}.$$

В пространстве X_p определим линейный оператор A:

$$Aw=(-u_{xx}(x),-v_{xx}(x),u_x(1)-v_x(1)),\quad w=(u,v,\phi),$$

где

$$D(A)=Y_p=\{w: w=(u,v,\phi), u\in W_p^2(0,1)\cap W_p^1(0,1;0),$$
$$v\in W_p^2(1,2)\cap W_p^1(1,2;2), u(1)=v(1)=\phi\}.$$

Аналогично линейный оператор B:

$$Bw = (-u_{xx}(x), -v_{xx}(x), \beta_1 u_x(1) + \beta_2 v_x(1) + \beta_3 \phi),$$
$$w = (u, v, \phi),$$

где

$$D(B) = Y_p = \{w : w = (u, v, \phi), u \in W_p^2(0,1) \cap W_p^1(0,1;0),$$
$$v \in W_p^2(1,2) \cap W_p^1(1,2;2), u(1) = v(1) = \phi\}.$$

Смешанную задачу (1)-(5) можно записать как задачу Коши в пространстве X_p:

$$w'' + Aw' + Bw = F(t), \tag{8}$$

$$w(0) = w_0, \quad w'(0) = w_1, \tag{9}$$

где $w_0 = (u_0, v_0, \phi_0)$, $\phi_0 = u_0(1)$, $w_1 = (u_1, v_1, \phi_1)$, $F(t) = (f(t,x), g(t,x), h(t))$.

Исследуя задачу (8), (9) докажем, что для задачи (1)-(7) справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия (i)-(iv), тогда при любых $u_0(\cdot) \in W_p^2(0,1) \cap W_p^1(0,1;0)$, $u_1(\cdot) \in L_p(0,1)$, $v_0(\cdot) \in W_p^2(1,2) \cap W_p^1(1,2;2)$, $v_1(\cdot) \in L_p(1,2)$, $\phi_1 \in R$ задача (1)-(7) имеет единственное решение (u, v, ϕ) такое, что

$$u(\cdot) \in C([0,T] \times W_p^1(0,1;0)) \cap C^1((0,T) \times L_p[0,1]) \cap$$
$$\cap C^1((0,T] \times W_p^2(0,1) \cap W_p^1(0,1;0)) \cap C^2((0,T) \times L_p[0,1]),$$
$$v(\cdot) \in C([0,T] \times W_p^2(1,2;2)) \cap C^1((0,T) \times L_p[1,2]) \cap$$
$$\cap C^1((0,T] \times W_p^2(1,2) \cap W_p^2(1,2;2)) \cap C^2((0,T) \times L_p[1,2]),$$
$$\phi(\cdot) \in C[0,T] \cap C^1(0,T] \cap C^2(0,T),$$
$$u_x(\cdot,1), v_x(\cdot,1) \in C(0,T), u_{tt}(\cdot,1), v_{tt}(\cdot,1), u_{tx}(\cdot,1), v_{tx}(\cdot,1) \in C(0,T).$$

Доказательство. Сначала исследуем линейный оператор A. Докажем, что A - секториальный оператор в X_p, где $p \ge 1$. С этой целью оценим резольвенту оператора A (см.[7]). Рассмотрим уравнение

$$\lambda \tilde{u} + A\tilde{u} = G, \tag{10}$$

где $G = (\xi(x), \zeta(x), \alpha) \in X_p$.

Уравнение (10) эквивалентно краевой задаче:

$$\lambda u(x) - u''(x) = \xi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{11}$$

$$\lambda v(x) - v''(x) = \zeta(x), \quad 1 \le x \le 2, \tag{12}$$

$$u(1) = v(1) = \phi, \tag{13}$$

$$u(0)=0, \tag{14}$$

$$v(2)=0, \tag{15}$$

$$\lambda\phi+u'(1)-v'(1)=\alpha, \tag{16}$$

где $\lambda\in C$, $\alpha\in R$.

Пусть $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ гладкие функции удовлетворяющие (9) - (14).

Умножаем обе части (11) на функцию $\overline{u}(x)|u(x)|^{p-2}$. После интегрирования по частям, имеем

$$\lambda\int_0^1|u(x)|^p dx+\int_0^1 u'(x)(\overline{u}(x)|u(x)|^{p-2})_x dx-u'(1)(\overline{u}(1)|u(1)|^{p-2})=$$

$$=\int_0^1\xi(x)\overline{u}(x)|u(x)|^{p-2}dx. \tag{17}$$

Умножаем обе части (12) на $\overline{v}(x)|v(x)|^{p-2}$. После интегрирования по частям, получим

$$\lambda\int_1^2|v(x)|^p dx+\int_1^2 v'(x)(\overline{v}(x)|v(x)|^{p-2})_x dx+v'(1)(\overline{v}(1)|v(1)|^{p-2})=$$

$$=\int_1^2\zeta(x)\overline{v}(x)|v(x)|^{p-2}dx. \tag{18}$$

Умножая обе части (16) на $\overline{\phi}|\phi|^{p-2}$, имеем

$$\lambda|\phi|^p+[u'(1)-v'(1)]\overline{\phi}|\phi|^{p-2}=\alpha\overline{\phi}|\phi|^{p-2}. \tag{19}$$

Сложив полученные равенства (17), (18) и (19) получим, что

$$\lambda\int_0^1|u(x)|^p dx+\lambda\int_1^2|v(x)|^p dx+\lambda|\phi|^p+\int_0^1 J_1 dx+\int_1^2 J_2 dx=$$

$$=\int_0^1\xi(x)\overline{u}(x)|u(x)|^{p-2}dx+\int_1^2\zeta(x)\overline{v}(x)|v(x)|^{p-2}dx+\alpha\overline{\phi}|\phi|^{p-2}, \tag{20}$$

где

$$J_1=u'(x)\overline{u}'(x)|u(x)|^{p-2}+u'(x)\overline{u}(x)(|u(x)|^{p-2})_x,\quad 0\le x\le 1,$$

$$J_2=v'(x)\overline{v}'(x)|v(x)|^{p-2}+v'(x)\overline{v}(x)(|v(x)|^{p-2})_x,\quad 1\le x\le 2.$$

Непосредственно можно проверить, что

$$|\operatorname{Im} J_1|\le|p-2||u(x)|^{p-2}\left|\operatorname{Im}\frac{u'(x)\overline{u}(x)}{u(x)}\right|\left|(|u(x)|)_x\right|,$$

$$\operatorname{Re} J_1=(p-1)|u(x)|^{p-2}\left|(|u(x)|)_x\right|^2+|u(x)|^{p-2}\left|\operatorname{Im}\frac{u'(x)\overline{u}(x)}{u(x)}\right|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|\operatorname{Im} J_1|}{\operatorname{Re} J_1} \le \frac{|p-2|\frac{1}{2\sqrt{p-1}}2\sqrt{p-1}\left|\operatorname{Im}\frac{u'(x)\bar{u}(x)}{u(x)}\right|\left|(|u(x)|)_x\right|}{(p-1)\left|(|u(x)|)_x\right|^2+\left|\operatorname{Im}\frac{u'(x)\bar{u}(x)}{u(x)}\right|^2} \le \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}},$$

т.е.

$$|\operatorname{Im} J_1| \le \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}\operatorname{Re} J_1, \tag{21}$$

$$|\operatorname{Im} J_2| \le \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}\operatorname{Re} J_2. \tag{22}$$

С другой стороны из (20) получаем

$$\operatorname{Re}\lambda(\|u\|_{p,1}^p+\|v\|_{p,2}^p+|\phi|^p)+\operatorname{Re}\int_0^1 J_1dx+\operatorname{Re}\int_1^2 J_2dx=$$

$$=\operatorname{Re}\left[\int_0^1\xi(x)\bar{u}(x)|u(x)|^{p-2}dx+\int_1^2\zeta(x)\bar{v}(x)|v(x)|^{p-2}dx+\alpha\bar{\phi}|\phi|^{p-2}\right], \tag{23}$$

$$\operatorname{Im}\lambda(\|u\|_{p,1}^p+\|v\|_{p,2}^p+|\phi|^p)+\operatorname{Im}\int_0^1 J_1dx+\operatorname{Im}\int_1^2 J_2dx=$$

$$=\operatorname{Im}\left[\int_0^1\xi(x)\bar{u}(x)|u(x)|^{p-2}dx+\int_1^2\zeta(x)\bar{v}(x)|v(x)|^{p-2}dx+\alpha\bar{\phi}|\phi|^{p-2}\right]. \tag{24}$$

В силу (23), (24), имеем

$$\operatorname{Re}\int_0^1 J_1dx+\operatorname{Re}\int_1^2 J_2dx-\eta\left|\operatorname{Im}\int_0^1 J_1dx\right|-\eta\left|\operatorname{Im}\int_1^2 J_2dx\right|\ge 0,$$

где $0\le\eta\le\frac{2\sqrt{p-1}}{|p-2|}$.

Учитывая данное неравенство, из (23), (24), заключаем

$$(\operatorname{Re}\lambda+\eta|\operatorname{Im}\lambda|)(\|u\|_{p,1}^p+\|v\|_{p,2}^p+|\phi|^p)\le$$

$$\le(1+\eta)\left(\int_0^1|\xi(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|u(x)|^pdx\right)^{\frac{p-1}{p}}+$$

$$+(1+\eta)\left(\int_1^2|\zeta(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_1^2|v(x)|^pdx\right)^{\frac{p-1}{p}}+\alpha|\phi|^{p-1}.$$

Таким образом

$$(\operatorname{Re}\lambda+\eta|\operatorname{Im}\lambda|)(\|u\|_{p,1}^p+\|v\|_{p,2}^p+|\phi|^p)\le$$

$$\le\left[(1+\eta)\left(\int_0^1|\xi(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+(1+\eta)\left(\int_1^2|\zeta(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+\alpha\right]\times$$

$$\times\left[\left(\int_0^1|u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_1^2|v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+|\phi|\right]^{p-1}.$$

Далее получим

$$(\operatorname{Re}\lambda+\eta|\operatorname{Im}\lambda|)(\|u\|_{p,1}^p+\|v\|_{p,2}^p+|\phi|^p)\le$$

$$\le 3(1+\eta)\left[\left(\int_0^1|\xi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_1^2|\zeta(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\alpha\right]\times$$

$$\times\left[\left(\int_0^1|u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_1^2|v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+|\phi|\right]^{p-1},$$

т.е.

$$(\operatorname{Re}\lambda+\eta|\operatorname{Im}\lambda|)(\|u\|_{p,1}^p+\|v\|_{p,2}^p+|\phi|^p)\le$$

$$\le 3(1+\eta)(\|\xi\|_{p,1}^p+\|\zeta\|_{p,2}^p+|\alpha|).$$

Отсюда учитывая (11) - (13) и (16) имеем

$$(\operatorname{Re}\lambda+\eta|\operatorname{Im}\lambda|)(\|u\|_{p,1}^p+\|v\|_{p,2}^p+|\phi|^p)\le$$

$$\le 3(1+\eta)(\|\lambda u(x)-u''(x)\|_{p,1}^p+\|\lambda v(x)-v''(x)\|_{p,2}^p+$$

$$+|\lambda\phi+u'(1)-v'(1)|). \qquad (25)$$

Рассмотрим задачу (11) - (16) в точке $\lambda=0$. Решая соответствующую задачу, получим, что

$$u(x)=\frac{x}{2}\left[\alpha+\int_1^2\left(\int_1^y\zeta(s)ds\right)dy+\int_0^1\left(\int_y^1\xi(s)ds\right)dy\right]+$$

$$+\int_0^x\left(\int_y^1\xi(s)ds\right)dy,\quad 0\le x\le 1,$$

$$v(x)=\frac{2-x}{2}\left[\alpha-\int_1^2\left(\int_1^y\zeta(s)ds\right)dy+\int_0^1\left(\int_y^1\xi(s)ds\right)dy\right]-$$

$$-\int_x^2\left(\int_1^y\zeta(s)ds\right)dy,\quad 1\le x\le 2,$$

$$\phi=\frac{1}{2}\left[\alpha+\int_0^1\left(\int_y^1\xi(s)ds\right)dy+\int_1^2\left(\int_1^y\zeta(s)ds\right)dy\right].$$

Учитывая условия (i)-(iv) имеем

$$\|u\|_{p,1}^p+\|v\|_{p,2}^p+|\phi|^p\le c\left[\|\xi\|_{p,1}^p+\|\zeta\|_{p,2}^p+|\alpha|\right],$$

т.е.

$$\|w\|_{X_p} \le c\|Aw\|_{X_p}.$$

Таким образом, $\lambda = 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора A.

Поэтому, в силу (25) $K = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda + \eta|\operatorname{Im}\lambda| > 0\}$ принадлежит резольвентному множеству линейного оператора A и существует такое $M > 0$, что

$$\left\|(\lambda + A)^{-1}\right\|_{X_p \to X_p} \le \frac{M}{|\lambda|}, \ \lambda \in K,$$

т.е. A - секториальный оператор в X_p.

Пусть выполняются условия (i)-(iv) и $p \ge 1$, тогда из определения линейного оператора B получим, что B ограниченный оператор, действующий из Y_p в X_p.

Далее сведя задачу (8), (9) к системе уравнений первого порядка в пространстве $E = Y_p \times X_p$ и, применяя теорему существования задачи Коши, получим утверждение теоремы (см. [4, 8, 9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Munoz Rivera J.E., Portillo Oquendo, H. The transmission problem of viscoelastic waves // Acta Applicandae Mathematicae, 2000, vol. 62, No 1, p. 1-21.
2. Aliev A.B., Mammadhasanov E.H., Well-posedness of initial boundary value problem on longitudinal impact on a composite linear viscoelastic bar // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2017, vol. 40, No 14, p. 5380-5390.
3. Aliev A.B., Mamedova U.M., A mixed problem for quasilinear impulsive hyperbolic equations with non-stasionary boundary and transmission conditions //Advance in difference equations. vol. 2010, Article ID101959, doi, 10, 1155/2010/101959, p. 1-19.
4. Webb G.F., Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation, Canadian Journal of Mathematics, 1980, vol. XXXII, no. 3, p. 631-643.
5. Vittorino Pata and Sergey Zelik, Smooth attractors for strongly damped wave equations, Nonlinearity, 2006, vol.19, p. 1495–1506.
6. A.B. Aliev and G.Kh. Shafieva, Mixed Problem with Dynamical Boundary Condition for a One-Dimensional Wave Equation with Strong Dissipation Mathematical Notes, 2020, vol. 107, no. 3, p. 152–155.
7. Соболевский П.Е., Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве, Воронеж, Тр. ММО, том 10, 1961, с.297–350.
8. Хенри Д., Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений, М.: Мир, 1985, 376 с.
9. Крейн С.Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М.: Наука, 1967, 464 с.

GÜCLÜ DİSSİPASİYALI, BİRÖLÇÜLÜ DALĞA TƏNLİYİ ÜÇÜN DİNAMİK QOŞMALIQ ŞƏRTİ DAXİLİNDƏ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNİN VARLIĞI VƏ YEGANƏLİYİ

G.ŞƏFİYEVA

XÜLASƏ

Güclü dissipasiyalı birölçülü dalğa tənliyi üçün dinamik qoşmalıq şərti daxilində qarışıq məsələ araşdırılmışdır. Baxılan məsələnin L_p -də korrektliyi araşdırılmışdır.

Açar sözlər: dalğa tənliyi, güclü dissipasiya, qarışıq məsələ, dinamik qoşmalıq şərti, korrektlik.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS TO THE MIXED PROBLEM WITH DYNAMICAL TRANSMISSION CONDITION FOR A ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH STRONG DISSIPATION

G.SHAFIYEVA

SUMMARY

The mixed problem for a one-dimensional wave equation with strong dissipation and dynamical transmission condition is investigated. The correctness of the problem in space type L_p is proved.

Key words: wave equation, strong dissipation, mixed problem, dynamical transmission condition, correctness.