УДК 514.763

КРИВИЗНЫ ДИАГОНАЛЬНОГО ЛИФТА РИМАНОВОЙ МЕТРИКИ В РАССЛОЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ КОРЕПЕРОВ

Г.ФАТТАЕВ
Бакинский Государственный Университет
h-fattayev@mail.ru

В работе строится диагональный лифт Римановой метрики в расслоении линейных кореперов над Римановым многообразием, исследуются свойства кривизны и метрическая связность с нетривиальным кручением этой метрики.

Ключевые слова: Риманова метрика, расслоение кореперов, адаптированный репер, диагональный лифт, тензор кривизны, скалярная кривизна.

Изучение лифтов дифференциально-геометрических структур в расслоенных пространствах замечательно тем, что эти лифты в основном наследуют свойства соответствующих базовых структур. лифты векторных полей в касательном расслоении Риманова многообразия впервые были изучены Сасаки [12] (см. также [15]). В той же работе на касательном расслоении была определена Риманова метрика, далее называемая метрикой Сасаки или диагональным лифтом римановой метрики (см. [3], [6]). Свойства метрики Сасаки изучены в целом ряде работ, обзор которых можно найти в [16]. В [3] был рассмотрен вопрос о кривизнах касательного расслоения с метрикой Сасаки. Подобные Римановы метрики были построены также в кокасательном и тензорных расслоениях, в расслоениях линейных реперов и линейных кореперов (см., напр. [1], [2], [4], [5], [8], [9], [13], [14]). Целью данной работы является изучение вопроса о кривизнах расслоения линейных кореперов с диагональным лифтом Римановой метрики. В разделе 2 кратко описываются основные определения и результаты, которые будут использованы позже, после чего диагональный лифт Римановой метрики на расслоении линейных реперов строится в разделе 3. Коэффициенты и основные свойства связности Леви-Чивита диагонального лифта Римановой метрика изучаются в разделе 4. В разделе 5 определяется тензорное поле кривизны связности Леви-Чивита диагонального лифта Римановой метрики и исследуется скалярная кривизна расслоения линейных кореперов с метрикой Сасаки. Скалярная кривизна метрической связности с нетривиальным кручением диагонального лифта Римановой метрики на расслоении линейных кореперов изучается в разделе 6.

1. Предварительные сведения

Пусть M $n-$мерное Риманово многообразие класса C^{∞} и $F^{*}(M)$ его расслоение линейных кореперов (см., [10], [11]). Риманову метрику на M обозначим через g. Расслоение линейных кореперов $F^{*}(M)$ над M состоит из всех пар (x,u^{*}), где x точка из M и u^{*} есть базис (корепер) для кокасательного пространства $T_x^{*}M$. Естественную проекцию расслоения $F^{*}(M)$ в M обозначим через π и определим по формуле $\pi(x,u^{*})=x$. Пусть $(U;x^1,x^2,...,x^n)$ система локальных координат в M, тогда корепер $u^{*}=(X^{\alpha})=(X^1,X^2,...,X^n)$ для $T_x^{*}M$ можно выразить однозначно в виде $X^{\alpha}=X_i^{\alpha}(dx^i)_x$ и поэтому

$$\left(\pi^{-1}(U);x^1,x^2,...,x^n,X_1^1,X_2^1,...,X_n^n\right)$$

является системой локальных координат в $F^{*}(M)$ (см., [8]). Индексы $i,j,k,...,\alpha,\beta,\gamma,...$ принимают значения $\{1,2,...,n\}$, а индексы $A,B,C,...$ в

$$\left\{1,...,n,n+1,...,n+n^2\right\}.$$

Положим $h_{\alpha}=\alpha\cdot n+h$. $\Im_s^r(M)$ является множеством всех дифференцируемых тензорных полей типа (r,s) на M и ∇-линейная связность на M с дщлфльными коэффициентами Γ_{ij}^k. Рассмотрим векторное и ковекторное (1-форма) поля $V\in\Im_0^1(M)$, $\omega\in\Im_1^0(M)$ и пусть $V=V^i\partial_i$, $\omega=\omega_i dx^i$ их локальные выражения в $U\subset M$, соответственно. Тогда полный и горизонтальный лифты ${}^{C}V,{}^{H}V\in\Im_0^1(F^{*}(M))$ векторного поля V и $\beta-$ый вертикальный лифт ${}^{V_{\beta}}\omega\in\Im_0^1(F^{*}(M))$ $(\beta=1,2,...,n)$ ковекторного поля ω заданы, соответственно, в виде

$$ {}^{C}V=V^i\partial_i-X_j^{\alpha}(\partial_i V^j)\partial_{i_{\alpha}}, \tag{2.1}$$

$$ {}^{H}V=V^i\partial_i+X_j^{\alpha}\Gamma_{ik}^{j}V^k\partial_{i_{\alpha}}, \tag{2.2}$$

$$ {}^{V_{\beta}}\omega=\delta_{\beta}^{\alpha}\sum_i\omega_i\partial_{i_{\alpha}} \tag{2.3}$$

относительно натурального репера $\left\{\partial_i,\partial_{i_{\alpha}}\right\}=\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial X_i^{\alpha}}\right\}$ (более подробно см., [10]).

Вертикальным лифтом дифференцируемой функции $f \in \Im_0^0(M)$ называется функция ${}^V f \in \Im_0^0(F^*(M))$, определяемая в виде ${}^V f = f \circ \pi$.

Для каждой точки $x \in M$, на кокасательном пространстве $T_x^* M$ для всех $\omega, \theta \in \Im_1^0(M)$ определяется скалярное произведение $g^{-1} = (g^{ij})$ в виде $g^{-1}(\omega, \theta) = g^{ij} \omega_i \theta_j$.

2. Диагональный лифт Римановой метрики

Метрику Сасаки ${}^D g$ в расслоении $F^*(M)$ определяем при помощи следующих трех
равенств:

$$ {}^D g({}^H X, {}^H Y) = {}^V(g(X,Y)) = g(X,Y) \circ \pi, \tag{3.1} $$

$$ {}^D g({}^H X, {}^{V_\beta} \omega) = 0, \tag{3.2} $$

$$ {}^D g({}^{V_\beta} \omega, {}^{V_\gamma} \theta) = \delta^{\beta\gamma V}(g^{-1}(\omega, \theta)) = \delta^{\beta\gamma}(g^{-1}(\omega, \theta) \circ \pi) \tag{3.3} $$

для любых $X, Y \in \Im_0^1(M)$ и $\omega, \theta \in \Im_1^0(M)$. Метрику ${}^D g$ назовем диагональным лифтом Римановой метрики g заданной на M в расслоение линейных кореперов $F^*(M)$. Поскольку любое тензорное поле типа $(0,2)$ на $F^*(M)$ полностью определяется его воздействием на векторные поля типа ${}^H X$ и ${}^{V_\beta}\omega$, из этого следует, что ${}^D g$ полностью определяется равенствами (3.1), (3.2) и (3.3). Метрика ${}^S g$ является Римановой метрикой на $F^*(M)$, однозначно определяемой метрикой g.

Для системы координат (U, x^i) в M мы положим

$$ X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \theta^{(i)} = dx^i, i = 1,2,\ldots,n . $$

Тогда из (2.2) и (2.3) видно, что ${}^H X_{(i)}$ и ${}^{V_\alpha}\theta^{(i)}$ имеют соответственно локальные выражения вида

$$ D_i = {}^H X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i} + X_j^\alpha \Gamma_{ih}^j \frac{\partial}{\partial X_h^\alpha}, \tag{3.4} $$

$$ D_{i_\alpha} = {}^{V_\alpha}\theta^{(i)} = \sum_j \delta_j^i \delta_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial X_j^\beta} = \frac{\partial}{\partial X_i^\alpha}. \tag{3.5} $$

Мы называем множество $\{D_I\} = \{D_i, D_{i_\alpha}\} = \{{}^H X_{(i)}, {}^{V_\alpha}\theta^{(i)}\}$ репером, адаптированным к связности Леви-Чивита ∇_g Римановой метрики g.

Из равенств (2.2), (2.3), (3.4) и (3.5) видно, что ${}^{H}V$ и ${}^{V_\alpha}\omega$ имеют соответственно компоненты

$$ {}^{H}V = V^i D_i, {}^{H}V = \left({}^{H}V^I\right) = \begin{pmatrix} V^i \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.6} $$

$$ {}^{V_\alpha}\omega = \sum_i \omega_i \delta_\alpha^\beta D_{i_\alpha}, \; {}^{V_\alpha}\omega = \left({}^{V_\alpha}\omega^I\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_\alpha^\beta \omega_i \end{pmatrix} \tag{3.7} $$

по отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$.

Из (3.1), (3.2) и (3.3) также следует, что

$$ {}^{D}g_{ij} = {}^{D}g(D_i, D_j) = {}^{V}(g(\partial_i, \partial_j)) = g_{ij}, $$

$$ {}^{D}g_{i_\alpha j} = {}^{D}g(D_{i_\alpha}, D_j) = 0, $$

$$ {}^{D}g_{i_\alpha j_\beta} = {}^{D}g(D_{i_\alpha}, D_{j_\beta}) = \delta^{\alpha\beta V}(g^{-1}(dx^i, dx^j)) = \delta^{\alpha\beta} g^{ij}, $$

т.е. метрика ${}^{D}g$ bvttn компоненты в виде

$$ {}^{S}g = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & \delta^{\alpha\beta} g^{ij} \end{pmatrix} \tag{3.8} $$

по отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$.

В $\pi^{-1}(U)$ рассмотрим локальные 1-формы $\tilde{\eta}^I$, определяемые в виде

$$ \tilde{\eta}^I = \bar{A}^I{}_J dx^J, $$

где

$$ A^{-1} = (\bar{A}^I{}_J) = \begin{pmatrix} \bar{A}^i{}_j & \bar{A}^i{}_{j_\beta} \\ \bar{A}^{i_\alpha}{}_j & \bar{A}^{i_\alpha}{}_{j_\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -X_m^\alpha \Gamma_{ij}^m & \delta_\beta^\alpha \delta_i^j \end{pmatrix}. \tag{3.9} $$

Матрица (3.9) является обратной к матрице

$$ A = (A_K{}^J) = \begin{pmatrix} A_k{}^j & A_{k_\gamma}{}^j \\ A_k{}^{j_\beta} & A_{k_\gamma}{}^{j_\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_k^j & 0 \\ X_m^\beta \Gamma_{jk}^m & \delta_\gamma^\beta \delta_j^k \end{pmatrix} \tag{3.10} $$

преобразования $D_K = A_K{}^J \partial_J$ (см. (3.4) и (3.5)). Легко установить, что набор $\{\tilde{\eta}^I\}$ представляет собой репер, сопряженный по отношению к адаптированному реперу $\{D_K\}$, т.е.

$$ \tilde{\eta}^I(D_K) = \bar{A}^I{}_J A_K{}^J = \delta_K^I. $$

Поскольку адаптированный репер неголономен, мы положим

$$ [D_I, D_J] = \Omega_{IJ}{}^K D_K $$

откуда следует, что

$$\Omega_{IJ}{}^{K} = \left(D_I A_J^{\ L} - D_J A_I^{\ L}\right)\overline{A}_L^K .$$

Согласно (3.4), (3.5), (3.9) и (3.10), компоненты объекта неголономности $\Omega_{IJ}{}^{K}$ определяются в виде

$$\begin{cases} \Omega_{ij_\beta}{}^{k_\gamma} = -\Omega_{j_\beta i}{}^{k_\gamma} = -\delta_\beta^\gamma \Gamma_{ik}^j , \\ \Omega_{ij}{}^{k_\gamma} = X_m^{\ \gamma} R_{ijk}^m , \end{cases} \tag{3.11}$$

все остальные компоненты равны нулю, здесь R_{ijk}^m - локальные компоненты тензорного поля кривизны R связности ∇_g .

3. Связность Леви-Чивита метрики ${}^D g$

Пусть ${}^D\nabla$ - связность Леви-Чивита, определяемая метрикой ${}^D g$ на расслоении линейных реперов $F^*(M)$. Полагаем, что

$${}^D\nabla_{D_I} D_J = {}^D\Gamma_{IJ}^K D_K ,$$

где ${}^D\Gamma_{IJ}^K$ компоненты линейной связности ${}^D\nabla$.

Из соотношения

$${}^S\nabla_X Y - {}^S\nabla_Y X = [X,Y], \forall X,Y \in \Im_0^1(F^*(M))$$

получим:

$${}^D\Gamma_{IJ}^K - {}^D\Gamma_{JI}^K = \Omega_{IJ}{}^{K} . \tag{4.1}$$

По отношению к адаптированному реперу $\{D_K\}$, равенство

$$\left({}^S\nabla_X {}^S g\right)(Y,Z) = 0$$

имеет форму

$$D_L {}^D g_{IJ} - {}^D\Gamma_{LI}^K {}^D g_{KJ} - {}^D\Gamma_{LJ}^K {}^D g_{IK} = 0 . \tag{4.2}$$

Пользуясь равенствами (4.1) и (4.2), получим:

$$\begin{aligned} {}^D\Gamma_{IJ}^K = & \frac{1}{2} {}^D g^{KL}\left(D_I {}^D g_{LJ} + D_J {}^D g_{IL} - D_L {}^D g_{IJ}\right) + \\ & + \frac{1}{2}\left(\Omega_{IJ}{}^{K} + \Omega^K_{.\ IJ} + \Omega^K_{.\ JI}\right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\Omega^K_{.\ IJ} = {}^D g^{KL}\, {}^D g_{PJ} \Omega_{LI}{}^{P}$ и

$$\left({}^S g\right)^{-1} = \left({}^S g^{KJ}\right) = \begin{pmatrix} g^{kj} & 0 \\ 0 & \delta_{\gamma\beta} g_{kj} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Используя (3.4), (3.5), (3.8) и (4.4), из (4.3) получаем:

$$\begin{cases} {}^D\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k, & {}^D\Gamma_{i_\alpha j_\beta}^k = {}^D\Gamma_{i_\alpha j}^{k_\gamma} = {}^D\Gamma_{i_\alpha j_\beta}^{k_\gamma} = 0, \\ {}^D\Gamma_{ij_\beta}^k = \frac{1}{2} X_m^\beta R_{\cdot i \cdot}^{k\ jm}, & {}^D\Gamma_{i_\alpha j}^k = \frac{1}{2} X_m^\alpha R_{\cdot j \cdot}^{k\ im}, \\ {}^D\Gamma_{ij}^{k_\gamma} = \frac{1}{2} X_m^\gamma R_{ijk}^m, & {}^D\Gamma_{ij_\beta}^{k_\gamma} = -\delta_\gamma^\beta \Gamma_{ik}^j. \end{cases} \tag{4.5}$$

Пусть $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Im_0^1(F^*(M))$ and $\widetilde{X} = \widetilde{X}^I D_I, \widetilde{Y} = \widetilde{Y}^J D_J$. Тогда ковариантная производная ${}^S\nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{X}$ вдоль $\widetilde{Y}$ по отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$ имеет компоненты в виде

$$ {}^S\nabla_{\widetilde{Y}} \widetilde{X}^I = \widetilde{Y}^J D_J \widetilde{X}^I + {}^S\Gamma_{JK}^I \widetilde{X}^K \widetilde{Y}^J . \tag{4.6}$$

Из (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (4.5) и (4.6) следует [2].

Теорема 4.1. *Пусть M - Риманово многообразие с метрикой g, а ${}^D\nabla$ - связность Леви-Чивита расслоения линейных кореперов $F^*(M)$, оснащенного метрикой ${}^Dg$. Тогда ${}^D\nabla$ удовлетворяет соотношения*

$i)\ \ {}^D\nabla_{{}^{V_\alpha}\omega} {}^{V_\beta}\theta = 0,$

$ii)\ \ {}^D\nabla_{{}^{V_\alpha}\omega} {}^H Y = \frac{1}{2} {}^H\left(R(\widetilde{X}^\alpha, \widetilde{\omega})Y\right),$

$iii)\ \ {}^D\nabla_{{}^H X} {}^{V_\beta}\theta = {}^{V_\beta}(\nabla_X \theta) + \frac{1}{2} {}^H\left(R(\widetilde{X}^\beta, \widetilde{\theta})X\right),$

$iv)\ \ {}^D\nabla_{{}^H X} {}^H Y = {}^H(\nabla_X Y) + \frac{1}{2}\overline{R(X,Y)}$

для любых $X, Y \in \Im_0^1(M)$ и $\omega, \theta \in \Im_1^0(M)$, где $\widetilde{\omega} = g^{-1} \circ \omega \in \Im_0^1(M)$, $\widetilde{\theta} = g^{-1} \circ \theta \in \Im_0^1(M)$, $\widetilde{X}^\alpha = g^{-1} \circ X^\alpha \in \Im_0^1(M)$ и $\overline{R(X,Y)}$ вертикальное векторное поле с компонентами

$$\overline{R(X,Y)} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_m^\alpha R_{jki}^m X^j Y^k \end{pmatrix}$$

по отношению адаптированного репера $\{D_I\}$.

Отметим, что аналог Теоремы 4.1 в случае кокасательного расслоения доказан в [9].

Замечание 4.2. *Используя равенство (2.3), легко установить, что вертикальное векторное поле $\overline{R(X,Y)} \in \Im_0^1(F^*(M))$ можно представить в виде*

$$\overline{R(X,Y)} = \sum_{\beta=1}^{n} {}^{V_\beta}(X \circ R(X,Y)). \tag{4.7}$$

4. Тензорное поле кривизны ${}^D\nabla$

Пусть ${}^{D}R$ - тензорное поле кривизны связности Леви-Чивита ${}^{D}\nabla$. Тогда имеем:

$$ {}^{D}R(D_I, D_J)D_K = {}^{D}\nabla_I {}^{D}\nabla_J D_K - {}^{D}\nabla_J {}^{D}\nabla_I D_K - \Omega_{IJ}{}^{L} {}^{D}\nabla_L D_K, $$

где ${}^{D}\nabla_I = {}^{D}\nabla_{D_I}$. Тензорное поле кривизны ${}^{D}R$ имеет компоненты

$$ {}^{D}R^{L}_{IJK} = D_I {}^{D}\Gamma^{L}_{JK} - D_J {}^{D}\Gamma^{L}_{IK} + {}^{D}\Gamma^{L}_{IP} {}^{D}\Gamma^{P}_{JK} - {}^{D}\Gamma^{L}_{JP} {}^{D}\Gamma^{P}_{IK} - \Omega_{IJ}{}^{P} {}^{D}\Gamma^{L}_{PK} $$

По отношению адаптированного репера $\{D_I\}$. Принимая во внимание (3.11) и (4.5), мы устанавливаем, что компоненты тензорного поля кривизны ${}^{D}R$ связности Леви-Чивита ${}^{D}\nabla$ по отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$ имеет следующие компоненты:

$$
\begin{aligned}
{}^{D}R^{l}_{ijk} &= R^{l}_{ijk} - \tfrac{1}{2}\left(\sum_{\delta=1}^{n} X^{\delta}_{m} X^{\delta}_{s}\right) R^{m}_{ijp} R^{l\cdot ps}_{\cdot k\cdot} + \\
&\tfrac{1}{4}\left(\sum_{\delta=1}^{n} X^{\delta}_{m} X^{\delta}_{s}\right)\left(R^{l\ \ pm}_{\cdot i\cdot} R^{s}_{jkp} - R^{l\ \ pm}_{\cdot j\cdot} R^{s}_{ikp}\right), \\
{}^{D}R^{l}_{i_\alpha jk} &= -X^{\alpha}_{m} \nabla_j R^{l\ \ im}_{\cdot k\cdot}, \\
{}^{D}R^{l}_{ij_\beta k} &= X^{\beta}_{m} \nabla_i R^{l\ \ jm}_{\cdot k\cdot}, \\
{}^{D}R^{l}_{ijk_\gamma} &= \tfrac{1}{2} X^{\gamma}_{m} (\nabla_i R^{l\ \ km}_{\cdot j\cdot} - \nabla_j R^{l\ \ km}_{\cdot i\cdot}), \\
{}^{D}R^{l}_{i_\alpha j_\beta k} &= \delta^{\beta}_{\alpha} R^{l\ \ ji}_{\cdot k\cdot} + \tfrac{1}{4} X^{\alpha}_{m} X^{\beta}_{s}\left(R^{l\ \ im}_{\cdot p\cdot} R^{p\ \ js}_{\cdot k\cdot} - R^{l\ \ jm}_{\cdot p\cdot} R^{p\ \ is}_{\cdot k\cdot}\right), \qquad (5.1) \\
{}^{D}R^{l}_{i_\alpha jk_\gamma} &= \tfrac{1}{2} \delta^{\gamma}_{\alpha} R^{l\ \ ki}_{\cdot j\cdot} + \tfrac{1}{4} X^{\alpha}_{m} X^{\gamma}_{s} R^{l\ \ im}_{\cdot p\cdot} R^{p\ \ ks}_{\cdot j\cdot}, \\
{}^{D}R^{l}_{ij_\beta k_\gamma} &= -\tfrac{1}{2} \delta^{\gamma}_{\beta} R^{l\ \ kj}_{\cdot i\cdot} - \tfrac{1}{4} X^{\beta}_{m} X^{\gamma}_{s} R^{l\ \ jm}_{\cdot p\cdot} R^{p\ \ ks}_{\cdot i\cdot}, \\
{}^{D}R^{l_\sigma}_{ijk} &= \tfrac{1}{2} X^{\sigma}_{m} (\nabla_i R^{m}_{jkl} - \nabla_j R^{m}_{ikl}), \\
{}^{D}R^{l_\sigma}_{i_\alpha jk} &= \tfrac{1}{2} \delta^{\sigma}_{\alpha} R^{i}_{jkl} - \tfrac{1}{4} X^{\gamma}_{m} X^{\alpha}_{s} R^{m}_{jpl} R^{p\ \ is}_{\cdot k\cdot}, \\
{}^{D}R^{l_\sigma}_{ij_\beta k} &= \tfrac{1}{2} \delta^{\sigma}_{\beta} R^{j}_{ikl} + \tfrac{1}{4} X^{\gamma}_{m} X^{\beta}_{s} R^{m}_{ipl} R^{p\ \ js}_{\cdot k\cdot}, \\
{}^{D}R^{l_\sigma}_{ijk_\gamma} &= \delta^{\sigma}_{\gamma} R^{k}_{jil} - \tfrac{1}{4} X^{\sigma}_{m} X^{\gamma}_{s}\left(R^{m}_{ipl} R^{p\ \ ks}_{\cdot j\cdot} - R^{m}_{jpl} R^{p\ \ ks}_{\cdot i\cdot}\right), \\
{}^{D}R^{l}_{i_\alpha j_\beta k_\gamma} &= {}^{D}R^{l_\sigma}_{i_\alpha j_\beta k} = {}^{D}R^{l_\sigma}_{i_\alpha jk_\gamma} = {}^{D}R^{l_\sigma}_{ij_\beta k_\gamma} = {}^{D}R^{l_\sigma}_{i_\alpha j_\beta k_\gamma} = 0.
\end{aligned}
$$

Пусть ${}^{D}R_{IJ} = {}^{D}R^{K}_{KIJ}$ - компоненты тензорного поля Риччи относительно адаптированного репера $\{D_I\}$, тогда для скалярной кривизны ${}^{D}r = {}^{D}g^{IJ}\, {}^{D}R_{IJ}$ имеем:

$$
\begin{aligned}
&{}^{D}r={}^{D}g^{ij}\,{}^{D}R_{ij}+{}^{D}g^{i_\alpha j_\beta}\,{}^{D}R_{i_\alpha j_\beta}=g^{ij}\left({}^{D}R^{k}_{kij}+{}^{D}R^{k_\gamma}_{k_\gamma ij}\right)+\\
&+g_{ij}\delta_{\alpha\beta}\,{}^{D}R^{k}_{ki_\alpha j_\beta}+g_{ij}\delta_{\alpha\beta}\,{}^{D}R^{k_\gamma}_{k_\gamma i_\alpha j_\beta}=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&g^{ij}\Big(R^{k}_{kij}-\tfrac{1}{2}\big(\sum_{\delta=1}^{n}X^{\alpha}_{m}X^{\beta}_{s}\big)R^{m}_{kip}R^{k\ \ ps}_{\cdot\ j\ \cdot}-\\
&-\tfrac{1}{4}\big(\sum_{\delta=1}^{n}X^{\delta}_{m}X^{\delta}_{s}\big)R^{k\ \ pm}_{\cdot\ i\ \cdot}R^{s}_{kjp}+\tfrac{1}{2}\delta^{\gamma}_{\gamma}R^{k}_{ijk}-\tfrac{1}{4}\big(\sum_{\gamma=1}^{n}X^{\gamma}_{m}X^{\gamma}_{s}\big)R^{p\ \ ks}_{\cdot\ j\ \cdot}\Big)+\\
&+g_{ij}\delta_{\alpha\beta}\Big(-\tfrac{1}{2}\delta^{\beta}_{\alpha}R^{k\ \ ji}_{\cdot\ k\ \cdot}-\tfrac{1}{4}X^{\alpha}_{m}X^{\beta}_{s}R^{k\ \ im}_{\cdot\ p\ \cdot}R^{p\ \ js}_{\cdot\ k\ \cdot}\Big)=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=r-\tfrac{1}{2}\big(\sum_{\delta=1}^{n}X^{\delta}_{m}X^{\delta}_{s}\big)g^{ij}g^{kt}g^{pq}R^{m}_{kip}R^{s}_{tjq}-\\
&-\tfrac{1}{4}\big(\sum_{\delta=1}^{n}X^{\delta}_{m}X^{\delta}_{s}\big)g^{ij}g^{kt}g^{pq}R^{m}_{tiq}R^{s}_{kjp}++\tfrac{1}{2}g^{ij}R^{k}_{ijk}-\\
&-\tfrac{1}{4}\big(\sum_{\alpha=1}^{n}X^{\alpha}_{m}X^{\alpha}_{s}\big)g^{ij}g^{pq}g^{kt}R^{m}_{ipk}R^{s}_{qjt}-\tfrac{1}{2}g_{ij}g^{kt}g^{jq}R^{i}_{tkq}-\\
&-\tfrac{1}{4}g_{ij}\big(\sum_{\alpha=1}^{n}X^{\alpha}_{m}X^{\alpha}_{s}\big)g^{kt}g^{iq}g^{pl}g^{ja}R^{m}_{tpq}R^{s}_{lka}=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r-\tfrac{1}{2}\big(\sum_{\delta=1}^{n}X^{\delta}_{m}X^{\delta}_{s}\big)g^{ij}g^{kt}g^{pq}R^{m}_{kip}R^{s}_{tjq}+\\
&+\tfrac{1}{4}g_{ij}\big(\sum_{\alpha=1}^{n}X^{\alpha}_{m}X^{\alpha}_{s}\big)g^{kt}g^{pl}g^{qa}R^{m}_{ptq}R^{s}_{lka}=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r-\tfrac{1}{4}\big(\sum_{\delta=1}^{n}X^{\delta}_{m}X^{\delta}_{s}\big)g^{ij}g^{kt}g^{pq}R^{m}_{kip}R^{s}_{tjq}=\\
&=r-\tfrac{1}{4}g^{ij}g^{kt}g^{pq}\sum_{\delta=1}^{n}\big(X^{\delta}_{m}R^{m}_{kip}\big)\big(X^{\delta}_{s}R^{s}_{tjq}\big)=\\
&=r-\tfrac{1}{4}g^{ij}g^{kt}g^{pq}\sum_{\delta=1}^{n}\big(X^{\delta}R\big)_{kip}\big(X^{\delta}R\big)_{tjq}=r-\tfrac{1}{4}\sum_{\delta=1}^{n}\left|X^{\delta}R\right|^{2},
\end{aligned}
$$

где $r=g^{ij}R_{ij}$ и $\left|X^{\delta}R\right|$ определяется в виде

$$
\left|X^{\delta}R\right|^{2}=g^{-1}\big(X^{\delta}R,X^{\delta}R\big)=g^{ij}g^{kt}g^{pq}\big(X^{\delta}R\big)_{kip}\big(X^{\delta}R\big)_{tjq}.
$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть M - Риманово многообразие с метрикой g, а $F^{*}(M)$ - его расслоение линейных кореперов с метрикой ${}^{D}g$. Пусть r и ${}^{D}r$ - скалярные кривизны g и ${}^{D}g$, соответственно. Тогда имеет место следующее равенство*

$$^{D}r = r - \frac{1}{4}\sum_{\delta=1}^{n}\left|X^{\delta}R\right|^{2}.$$

Пусть теперь $(M,g), n>2$ - Риманово многообразие постоянной кривизны κ, т.е.

$$R_{kmj}^{s} = \kappa\left(\delta_{k}^{s}g_{mj} - \delta_{m}^{s}g_{kj}\right)$$

и

$$r = n(n-1)\kappa.$$

Тогда из Теоремы 5.1 получаем:

$$^{S}r = r - \frac{1}{4}\sum_{\delta=1}^{n}\left|X^{\delta}R\right|^{2} = r - \frac{1}{4}g^{ij}g^{kt}g^{pq}\left(\sum_{\delta=1}^{n}X_{m}^{\delta}X_{s}^{\delta}\right)R_{kip}^{m}R_{tjq}^{s} =$$

$$= r - \frac{1}{4}g^{ij}g^{kt}g^{pq}\sum_{\delta=1}^{n}\left[X_{m}^{\delta}\kappa\left(\delta_{k}^{m}g_{ip} - \delta_{i}^{m}g_{kp}\right)X_{s}^{\delta}\kappa\left(\delta_{t}^{s}g_{jq} - \delta_{j}^{s}g_{tq}\right)\right] =$$

$$= r - \frac{1}{4}\kappa^{2}g^{ij}g^{kt}g^{pq}\sum_{\delta=1}^{n}\left(X_{k}^{\delta}g_{ip} - X_{i}^{\delta}g_{kp}\right)\left(X_{t}^{\delta}g_{jq} - X_{j}^{\delta}g_{tq}\right) =$$

$$= r - \frac{1}{4}\kappa^{2}g^{ij}g^{kt}g^{pq}\sum_{\delta=1}^{n}(X_{k}^{\delta}g_{ip}X_{t}^{\delta}g_{jq} - X_{k}^{\delta}g_{ip}X_{j}^{\delta}g_{tq} - X_{i}^{\delta}g_{kp}X_{t}^{\delta}g_{jq} +$$

$$+ X_{i}^{\delta}g_{kp}X_{j}^{\delta}g_{tq}) = r - \frac{1}{4}\kappa^{2}g^{ij}g^{kt}g^{pq}\delta_{p}^{j}\delta_{j}^{p}\sum_{\delta=1}^{n}X_{k}^{\delta}X_{t}^{\delta} +$$

$$+ \frac{1}{4}\kappa^{2}g^{ij}g^{kt}g^{pq}\delta_{p}^{j}\delta_{t}^{p}\sum_{\delta=1}^{n}X_{k}^{\delta}X_{j}^{\delta} +$$

$$\frac{1}{4}\kappa^{2}g^{ij}g^{kt}g^{pq}\delta_{p}^{t}\delta_{j}^{p}\sum_{\delta=1}^{n}X_{i}^{\delta}X_{t}^{\delta} -$$

$$- \frac{1}{4}\kappa^{2}g^{ij}g^{kt}g^{pq}\delta_{p}^{t}\delta_{p}^{p}\sum_{\delta=1}^{n}X_{i}^{\delta}X_{j}^{\delta} = r - \frac{1}{4}\kappa^{2}\sum_{\delta=1}^{n}\left|X^{\delta}\right|^{2}n +$$

$$+ \frac{1}{4}\kappa^{2}\sum_{\delta=1}^{n}\left|X^{\delta}\right|^{2} + \frac{1}{4}\kappa^{2}\sum_{\delta=1}^{n}\left|X^{\delta}\right|^{2} - \frac{1}{4}\kappa^{2}\sum_{\delta=1}^{n}\left|X^{\delta}\right|^{2}n = n(n-1)\kappa -$$

$$- \frac{1}{2}\kappa^{2}\sum_{\delta=1}^{n}\left|X^{\delta}\right|^{2}n + \frac{1}{2}\kappa^{2}\sum_{\delta=1}^{n}\left|X^{\delta}\right|^{2} = n(n-1)\kappa -$$

$$\frac{1}{2}\kappa^{2}\sum_{\delta=1}^{n}\left|X^{\delta}\right|^{2}(n-1) =$$

$$= (n-1)\kappa\left(n - \frac{1}{2}\sum_{\delta=1}^{n}\left|X^{\delta}\right|^{2}\kappa\right).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть* $(M,g), n>2$ - *.Риманово многообразие постоянной* *кривизны* κ. *Тогда скалярная кривизна* ${}^{D}r$ *расслоения линейных корепе-ров* $\left(F^*(M), {}^{D}g\right)$ *имеет вид:*

$$
{}^{D}r = (n-1)\kappa\left(n - \frac{1}{2}\sum_{\delta=1}^{n}\left|X^{\delta}\right|^{2}\kappa\right),
$$

где

$$
\left|X^{\delta}\right|^{2} = g^{ij}X_i^{\delta}X_j^{\delta}.
$$

5. Скалярная кривизна метрической связности метрики ${}^{D}g$

В разделах 3 и 4 нами была определена метрика ${}^{D}g$ на расслоении линейных кореперов $F^*(M)$ и изучена связность Леви-Чивита ${}^{D}\nabla$ этой метрики. Это единственная связность, которая удовлетворяет условию ${}^{S}\nabla{}^{S}g = 0$ и не имеет кручения. Но существует еще одна связность, которая удовлетворяет условию $\widetilde{\nabla}{}^{S}g = 0$ и имеет нетривиальный тензор кручения. Мы называем эту связность метрической связностью ${}^{S}g$.

Горизонтальный лифт произвольной симметричной связности ∇ в расслоение линейных кореперов $F^*(M)$ определяется при помощи соотношений

$$
\begin{cases}
{}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y = {}^{H}(\nabla_X Y), & {}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V_\beta}\omega = {}^{V_\beta}(\nabla_X\omega), \\
{}^{H}\nabla_{{}^{V_\alpha}\theta}{}^{H}Y = 0, & {}^{H}\nabla_{{}^{V_\alpha}\theta}{}^{V_\beta}\omega = 0
\end{cases}
\tag{6.1}
$$

для любых $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ и $\omega, \theta \in \Im_1^0(M_n)$ [7].

Вводим обозначение ${}^{H}\nabla_I = {}^{H}\nabla_{D_I}$. .Тогда, принимая во внимание ${}^{H}\nabla_I D_J = {}^{H}\Gamma_{IJ}^{K} D_K$ и записывая ${}^{H}\Gamma_{IJ}^{K}$ для разных индексов, из (6.1) получим

$$
\begin{cases}
{}^{H}\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}, & {}^{H}\Gamma_{ij_\beta}^{k_\gamma} = -\Gamma_{ik}^{j}\delta_\beta^\gamma, \\
{}^{H}\Gamma_{i_\alpha j}^{k} = {}^{H}\Gamma_{ij_\beta}^{k} = {}^{H}\Gamma_{i_\alpha j_\beta}^{k} = {}^{H}\Gamma_{ij}^{k_\gamma} = {}^{H}\Gamma_{i_\alpha j}^{k_\gamma} = {}^{H}\Gamma_{i_\alpha j_\beta}^{k_\gamma} = 0.
\end{cases}
\tag{6.2}
$$

Обозначим через T тензор кручения связности ${}^{H}\nabla$. Тогда T - кососимметричное тензорное поле типа $(1,2)$ на расслоении линейных кореперов $F^*(M)$ линейных кофреймов, определяемое соотношениями

$$
T({}^{V\alpha}\omega, {}^{V_\beta}\theta) = 0,\ T({}^{H}X, {}^{V_\beta}\theta) = 0,\ T({}^{H}X, {}^{H}Y) = -\sum_{\beta=1}^{n}{}^{V_\beta}(X \circ R(X,Y))
$$

для любых $X, Y \in \Im_0^1(M)$ и $\omega, \theta \in \Im_1^0(M)$, где R тензорное поле кривизны связности ∇. Таким образом, связность ${}^H\nabla$ имеет нетривиальное кручение даже для связности Леви-Чивита ∇_g, определяемой g, если только g не является локально плоским.

Пользуясь (3.1), (3.2), (3.3) и (6.1), для любых $X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ и $\omega, \theta, \varepsilon \in \Im_1^0(M)$, получим

$$\left({}^H\nabla_{V_{\alpha}\omega} {}^S g\right)\left({}^{V_\beta}\theta, {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) = {}^H\nabla_{V_{\alpha}\omega} {}^S g\left({}^{V_\beta}\theta, {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) -$$
$${}^S g\left({}^H\nabla_{V_{\alpha}\omega} {}^{V_\beta}\theta, {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) -$$
$$- {}^S g\left({}^{V_\beta}\theta, {}^H\nabla_{V_{\alpha}\omega} {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) = {}^H\nabla_{V_{\alpha}\omega} \delta^{\beta\gamma}{}^V\left(g^{-1}(\theta, \varepsilon)\right) =$$
$$\delta^{\beta\gamma}{}^{V_\alpha}\omega^V\left(g^{-1}(\theta, \varepsilon)\right) = 0,$$
$$\left({}^H\nabla_{{}^H X} {}^S g\right)\left({}^{V_\beta}\theta, {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) = {}^H\nabla_{{}^H X} {}^S g\left({}^{V_\beta}\theta, {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) -$$
$${}^S g\left({}^H\nabla_{{}^H X} {}^{V_\beta}\theta, {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) -$$
$$- {}^S g\left({}^{V_\beta}\theta, {}^H\nabla_{{}^H X} {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) = {}^H\nabla_{{}^H X} \delta^{\beta\gamma}{}^V\left(g^{-1}(\theta, \varepsilon)\right) -$$
$${}^S g\left({}^{V_\beta}(\nabla_X \theta), {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) -$$
$$- {}^S g\left({}^{V_\beta}\theta, {}^{V_\gamma}(\nabla_X \varepsilon)\right) = \delta^{\beta\gamma}{}^H X^V\left(g^{-1}(\theta, \varepsilon)\right) -$$
$$\delta^{\beta\gamma}{}^V\left(g^{-1}(\nabla_X \theta, \varepsilon)\right) -$$
$$- \delta^{\beta\gamma}{}^V\left(g^{-1}(\theta, \nabla_X \varepsilon)\right) = \delta^{\beta\gamma}{}^V\left(X g^{-1}(\theta, \varepsilon)\right) -$$
$$\delta^{\beta\gamma}{}^V\left(g^{-1}(\nabla_X \theta, \varepsilon)\right) -$$
$$- \delta^{\beta\gamma}{}^V\left(g^{-1}(\theta, \nabla_X \varepsilon)\right) = \delta^{\beta\gamma}{}^V\left(\nabla_X g^{-1}(\theta, \varepsilon)\right) - \delta^{\beta\gamma}{}^V\left(g^{-1}(\nabla_X \theta, \varepsilon)\right) -$$
$$- \delta^{\beta\gamma}{}^V\left(g^{-1}(\theta, \nabla_X \varepsilon)\right) =$$
$$\delta^{\beta\gamma}{}^V\left(\left(\nabla_X g^{-1}\right)(\theta, \varepsilon)\right),$$
$$\left({}^H\nabla_{V_{\alpha}\omega} {}^S g\right)\left({}^{V_\beta}\theta, {}^H Z\right) = {}^H\nabla_{V_{\alpha}\omega} {}^S g\left({}^{V_\beta}\theta, {}^H Z\right) -$$
$${}^S g\left({}^H\nabla_{V_{\alpha}\omega} {}^{V_\beta}\theta, {}^H Z\right) -$$
$$- {}^S g\left({}^{V_\beta}\theta, {}^H\nabla_{V_{\alpha}\omega} {}^H Z\right) = 0,$$
$$\left({}^H\nabla_{{}^H X} {}^S g\right)\left({}^{V_\beta}\theta, {}^H Z\right) = {}^H\nabla_{{}^H X} {}^S g\left({}^{V_\beta}\theta, {}^H Z\right) -$$
$${}^S g\left({}^H\nabla_{{}^H X} {}^{V_\beta}\theta, {}^H Z\right) -$$

$$-{}^{S}g\left({}^{V_\beta}\theta,{}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Z\right)=-{}^{S}g\left({}^{V_\beta}(\nabla_X\theta),{}^{H}Z\right)-{}^{S}g\left({}^{V_\beta}\theta,{}^{H}(\nabla_X Z)\right)=0,$$

$$\left({}^{H}\nabla_{{}^{V_\alpha}\omega}{}^{S}g\right)\left({}^{H}Y,{}^{V_\gamma}\varepsilon\right)={}^{H}\nabla_{{}^{V_\alpha}\omega}{}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{V_\gamma}\varepsilon\right)-$$
$${}^{S}g\left({}^{H}\nabla_{{}^{V_\alpha}\omega}{}^{H}Y,{}^{V_\gamma}\varepsilon\right)-$$
$$-{}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{H}\nabla_{{}^{V_\alpha}\omega}{}^{V_\gamma}\varepsilon\right)=0,$$

$$\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{S}g\right)\left({}^{H}Y,{}^{V_\gamma}\varepsilon\right)={}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{V_\gamma}\varepsilon\right)-$$
$${}^{S}g\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y,{}^{V_\gamma}\varepsilon\right)-$$
$$-{}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V_\gamma}\varepsilon\right)=-{}^{S}g\left({}^{H}(\nabla_X Y),{}^{V_\gamma}\varepsilon\right)-$$
$${}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{V_\gamma}(\nabla_X\varepsilon)\right)=0,$$

$$\left({}^{H}\nabla_{{}^{V_\alpha}\omega}{}^{S}g\right)\left({}^{H}Y,{}^{H}Z\right)={}^{H}\nabla_{{}^{V_\alpha}\omega}{}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{H}Z\right)-$$
$${}^{S}g\left({}^{H}\nabla_{{}^{V_\alpha}\omega}{}^{H}Y,{}^{H}Z\right)-$$
$$-{}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{H}\nabla_{{}^{V_\alpha}\omega}{}^{H}Z\right)={}^{H}\nabla_{{}^{V_\alpha}\omega}{}^{V}(g(Y,Z))=$$
$${}^{V_\alpha}\omega^{V}(g(Y,Z))=0,$$

$$\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{S}g\right)\left({}^{H}Y,{}^{H}Z\right)={}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{H}Z\right)-$$
$${}^{S}g\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y,{}^{H}Z\right)-$$
$$-{}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Z\right)={}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}(g(Y,Z))-$$
$${}^{S}g\left({}^{H}(\nabla_X Y),{}^{H}Z\right)-$$
$$-{}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{H}(\nabla_X Z)\right)={}^{H}X^{V}(g(Y,Z))-{}^{V}(g(\nabla_X Y,Z))-$$
$$-{}^{V}(g(Y,\nabla_X Z))={}^{V}(Xg(Y,Z))-{}^{V}(g(\nabla_X Y,Z))-$$
$${}^{V}(g(Y,\nabla_X Z))=$$
$$={}^{V}(\nabla_X g(Y,Z))-{}^{V}(g(\nabla_X Y,Z))-{}^{V}(g(Y,\nabla_X Z))=$$
$${}^{V}((\nabla_X g)(Y,Z))=0,$$

т.е. горизонтальный лифт ${}^{H}\nabla$ связности Леви-Чивита ∇_g является метрической связности метрики ${}^{D}g$.

Пусть ${}^{H}R$ - тензорное поле кривизны ${}^{H}\nabla$. По отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$ оно имеет компоненты

$${}^{H}R^{L}_{IJK}=2\left(D_{[I}{}^{H}\Gamma^{L}_{J]K}+{}^{H}\Gamma^{L}_{[I|P|}{}^{H}\Gamma^{P}_{J]K}\right)-\Omega_{IJ}{}^{P}\,{}^{H}\Gamma^{L}_{PK}.$$

.

Пользуясь (3.4), (3.5), (3.11), (6.2) и вычислив компоненты тензорного поля Риччи ${}^{H}R_{IJ} = {}^{H}R_{LIJ}^{L}$, получим:

$$\begin{cases} {}^{H}R_{ij} = {}^{H}R_{Lij}{}^{L} = {}^{H}R_{lij}{}^{l} + {}^{H}R_{l_{\delta}ij}{}^{l_{\delta}} = R_{lij}{}^{l} = R_{ij}, \\ {}^{H}R_{i_{\alpha}j_{\beta}} = {}^{H}R_{i_{\alpha}j} = {}^{H}R_{ij_{\beta}} = 0, \end{cases} \tag{6.3}$$

где R_{ij} тензорное поле Риччи связности Леви-Чивита ∇_g на M.

При помощи (6.3) и соотношений ${}^{D}g^{i_{\alpha}j} = {}^{D}g^{ij_{\beta}} = 0$, для скалярной кривизны связности ${}^{H}\nabla$ относительно метрики ${}^{D}g$ имеем

$${}^{H}r = {}^{D}g^{IJ}\,{}^{H}R_{IJ} = g^{ij}R_{ij} = r,$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть* (M, g) *-Риманово многообразие и расслоение линейных кореперов* $F^{*}(M)$ *снабжено метрикой* ${}^{D}g$. *Тогда расслоение* $F^{*}(M)$ *с метрической связностью* ${}^{H}\nabla$ *имеет нулевую скалярную кривизну* ${}^{H}r$ *относительно метрики* ${}^{D}g$ *тогда и только тогда, когда скалярная кривизна* r *связности* ∇_g *на* M *равна нулю.*

Отметим, что ${}^{H}\nabla = {}^{D}\nabla$ тогда и только тогда, когда (M, g) плоское.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cordero, L.A., Leon, M. On the curvature of the induced Riemannian metric on the frame bundle of a Riemannian manifold // J. Math. pures et appl., 1986, v.65, p. 81-91.
2. Fattayev H.D., Salimov A.A. Diagonal lift of metrics to coframe bundle // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, 2018, v. 44, № 2, p.328-337.
3. Kowalski O. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of Riemannian manifold // J. reine angew Math., 1971, v. 250, **p.**124-129,.
4. Kowalski O., Sekizawa M. On curvatures of linear frame bundle with naturally lifted metrics // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 2005, v. 63**,** № 3, p. 283-296.
5. Mok K.P. On the differential geometry of frame bundles of Riemannian Manifolds // J. reine angew Math., 1978, v.302, p.16-31.
6. Musso E., Tricerri F. Riemannian metrics on tangent bundles // Ann. Mat.Pura Appl., 1988, v. 150 № 4, p. 1-20.
7. Salimov A.A., Fattayev H.D. Connections On The Coframe Bundle // Inter. Elect. J. of Geom., 2019, v. 12, № 1, p. 93-101.
8. Salimov A.A., Gezer A., Akbulut K. Geodesics of Sasakian metrics on the tensor bundles // Mediterr. J. Math., 2009, v. 6 , № 2, p. 137-149.
9. Salimov A.A., Filiz A. Some properties of Sasakian metrics in cotangentbundles // Mediterr. J. Math., 2011, v. 8, p. 243-255.
10. Salimov A.A., Fattaev H.D. Coframe bundle and problems of lifts on its cross- sections // Turk J Math., 2018, v. 42, № 4, p. 2035-2044.
11. Salimov A.A., Fattayev H.D. On a new class of lifts in the coframe bundle // Comptes rendus de l'Acad´emie bulgare des Sciences, 2018, v.71, № 6, p. 743-750.
12. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds //

Tohoku Math. J., 1958, v. 10, p. 338-354.
13. Sato I. Complete lifts from a manifold to its cotangent bundle // Kodai Math. Sem. Rep., 1967, v. 20, p. 458-468.
14. Tondeur P. Structure presque kahlerianne naturalle sur le fibre des vecteurs covariants d'une variete riemannienne // C.R. Acad. Sci. Paris, 1982, v. 254, p. 407-408.
15. Yano K., Kobayashi S. Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles, 1. General theory // J. Math. Soc. Japan, 1966, v. 18, №2, p. 194-210.
16. Yano, K. and Ishihara, S., Tangent and cotangent bundles. New York: Marsel Dekker, Inc., 1973, 423 p.

XƏTTİ KOREPERLƏRİN LAYLANMASINDA RİMAN METRİKASININ DİAQONAL LİFTİNİN ƏYRİLİKLƏRİ

H.FƏTTAYEV

XÜLASƏ

İşdə Riman çoxobrazlısı üzərində xətti koreperlərin laylanmasında Riman metrikasının diaqonal lifti qurulur, bu metrikanın əyrilik xassələri və qeyri-trivial buruqluğa malik metrik rabitəsi tədqiq olunur.

Açar sözlər: Riman metrikası, koreperlərin laylanması, adaptə olunmuş reper, diaqonal lift, əyrilik tenzoru, skalyar əyrilik.

CURVATURES OF THE DIAGONAL LIFT OF THE RIEMANNIAN METRIC IN THE BUNDLE OF LINEAR COFRAMES

H.FATTAYEV

SUMMARY

In this paper, we construct a diagonal lift of the Riemannian metric in the bundle of linear coframes over the Riemannian manifold, investigate the properties of curvature and metric connection with nontrivial torsion of this metric.

Keywords: Riemannian metric, bundle of coframes, adapted frame, diagonal lift, curvature tensor, scalar curvature.