УДК 517.95

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Н.А.АЛИЕВ, М.Б.МУРСАЛОВА
Бакинский Государственный Университет
nihan@aliyev.info, metanet.mursalova@mail.ru

Излагаемая работа посвящена исследованию граничной задачи для двумерного уравнения Лапласа с нелокальными граничными условиями на прямоугольной области.

Ключевые слова: Нелокальные граничные условия, фундаментальное решение, основные соотношения, необходимые условия, сингулярность, регуляризация, фредгольмовость.

Как известно, в [1]-[3] для различных областей были исследованы граничные задачи для уравнения эллиптического 1-го порядка с нелокальными граничными условиями в случае, когда одновременное движение двух точек по границе области удовлетворяет условию Карлемана [4]-[6]. Далее, в [7], [8] были исследованы граничные задачи с нелокальными граничными условиями для уравнений гиперболического и параболического типов.

Представленная работа посвящена исследованию решений граничной задачи для двумерного уравнения Лапласа в случае, когда одновременное движение по границе прямоугольной области четырех точек удовлетворяет условию Карлемана. С помощью фундаментального решения исходного уравнения получены основные соотношения. Далее, из этих соотношений выделяются необходимые условия, содержащие сингулярные слагаемые. Принадлежащей нам методикой эти сингулярности регуляризируются и, с использованием уже регулярных соотношений и граничных условий, доказывается фредгольмовость поставленной граничной задачи.

Постановка задачи: Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\Delta u(x_1, x_2) = 0 \qquad x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2 \tag{1}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}^{(1)}(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+\alpha_{i0}^{(1)}(x_1)u(x)\right]\Bigg|_{\substack{x_1=at\\x_2=0}}+$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}^{(2)}(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_j}+\alpha_{i0}^{(2)}(x_2)u(x)\right]\Bigg|_{\substack{x_1=a\\x_2=b(1-t)}}+$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}^{(3)}(x_1)\frac{\partial u}{\partial x_j}+\alpha_{i0}^{(3)}(x_1)u(x)\right]\Bigg|_{\substack{x_1=a(1-t)\\x_2=b}}+$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}^{(4)}(x_2)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+\alpha_{i0}^{(4)}(x_2)u(x)\right]\Bigg|_{\substack{x_1=0\\x_2=bt}}=\varphi_i(t), \tag{2}$$

где $t\in[0;1]$, $i=\overline{1,4}$. Здесь $D=\{(0;a)\times(0;b)\}$-прямоугольник, расположенный в первой четверти, $x_1\in[0;a]; x_2\in[0;b]$; все данные в граничных условиях (2) непрерывные вещественные функции, а сами условия линейно независимые и выбраны так, чтобы они удовлетворяли условию Карлемана при $t\in[0;1]$.

Умножая уравнение (1) на фундаментальное решение

$$\cup(x-\xi)=-\frac{1}{2\pi}\ln|x-\xi|, \tag{3}$$

интегрируя по области D, применив формулу Остроградского-Гаусса, с учетом свойства дельта-функции Дирака, получим первое основное соотношение:

$$-\int_0^b\left\{\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}U(x-\xi)-u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\right]\Bigg|_{x_1=a}-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}U(x-\xi)-u(x)\frac{\partial u(x-\xi)}{\partial x_1}\right]\Bigg|_{x_1=0}\right\}dx_2-$$

$$-\int_0^a\left\{\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}U(x-\xi)-u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}\right]\Bigg|_{x_2=b}-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}U(x-\xi)-u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}\right]\Bigg|_{x_2=0}\right\}dx_1=$$

$$=\int_D u(x)\left[\frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_2^2}\right]dx=$$

$$= \int_D \delta(x-\xi) u(x) dx = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D \\ \frac{1}{2} u(\xi), & \xi \in \partial D \end{cases}. \tag{4}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Каждая гармоническая в области D функция удовлетворяет первому основному соотношению (4).

Формула (4) состоит из двух частей, первая из которых определяет произвольную гармоническую в области D функцию, а вторая часть, связанная с границей области, является первым необходимым условием, не содержащим сингулярных интегралов.

Последовательно умножая уравнение (1) на $\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}$, интегрируя по области D, по аналогу 2-й формулы Грина получим второе и третье основные соотношения. Выделяя из них необходимые условия, связанные с границей области D, получим выражения, содержащие сингулярные интегралы:

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_2=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^a \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} \frac{\partial x_1}{x_1-\xi_1} + \ldots \\ \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_2=b} = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=b} \frac{\partial x_1}{x_1-\xi_1} + \ldots \\ \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_1=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^b \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_1=0} \frac{\partial x_2}{x_2-\xi_2} + \ldots \\ \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_1=a} = \frac{1}{\pi} \int_0^b \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{x_1=0} \frac{\partial x_2}{x_2-\xi_2} + \ldots \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2=0} \frac{\partial x_1}{x_1-\xi_1} + \ldots \\ \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=b} = \frac{1}{\pi} \int_0^a \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{x_2=b} \frac{\partial x_1}{x_1-\xi_1} + \ldots \\ \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_1=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^b \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} \frac{\partial x_2}{x_2-\xi_2} + \ldots \\ \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_1=a} = -\frac{1}{\pi} \int_0^b \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{x_1=a} \frac{\partial x_2}{x_2-\xi_2} + \ldots \end{cases} \tag{6}$$

где многоточием обозначены регулярные слагаемые. Таким образом, доказана

Теорема 2. Каждая гармоническая в области D функция удовлетворяет в ней сингулярным необходимым условиям (5), (6).

С учетом граничных условий (2) проведем в (5), (6) целесообразные замены:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\substack{\xi_2=0\\ \xi_1=a\tau}} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_2=0\\ x_1=at}} \dfrac{dt_1}{t-\tau}+\ldots \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \xi_1}\right|_{\substack{\xi_2=b\\ \xi_1=a(1-\tau)}} = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_2=b\\ x_1=a(1-t)}} \dfrac{dt}{t-\tau}+\ldots \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \xi_1}\right|_{\substack{\xi_1=0\\ \xi_2=b\tau}} = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1=0\\ x_2=bt}} \dfrac{dt}{t-\tau}+\ldots \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \xi_1}\right|_{\substack{\xi_1=a\\ \xi_2=b(1-\tau)}} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1=a\\ x_2=b(1-t)}} \dfrac{\partial t}{t-\tau}+\ldots \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial \xi_2}\right|_{\substack{\xi_2=0\\ \xi_1=a\tau}} = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_2=0\\ x_1=at}} \dfrac{dt}{t-\tau}+\ldots \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \xi_2}\right|_{\substack{\xi_2=b\\ \xi_1=a(1-\tau)}} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_2=b\\ x_1=a(1-t)}} \dfrac{dt}{t-\tau}+\ldots \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \xi_2}\right|_{\substack{\xi_1=0\\ \xi_2=b\tau}} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1=0\\ x_2=bt}} \dfrac{dt}{t-\tau}+\ldots \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \xi_2}\right|_{\substack{\xi_1=a\\ \xi_2=b(1-\tau)}} = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1=a\\ x_2=b(1-t)}} \dfrac{\partial t}{t-\tau}+\ldots \end{cases} \tag{8}$$

После необходимых преобразований и вычислений, получим:

$$\alpha_{i2}^{(1)}(a\tau)\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\substack{\xi_1=a\tau\\ \xi_2=0}} - \alpha_{i1}^{(1)}(a\tau)\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\substack{\xi_1=a\tau\\ \xi_2=0}} + \alpha_{i2}^{(2)}(b(1-\tau))\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\substack{\xi_1=a\\ \xi_2=b(1-\tau)}} -$$

$$-\alpha_{i1}^{(2)}(b(1-\tau))\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\substack{\xi_1=a\\ \xi_2=b(1-\tau)}} - \alpha_{i2}^{(3)}(a(1-\tau))\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\substack{\xi_1=a(1-\tau)\\ \xi_2=b}} -$$

$$-\alpha_{i1}^{(3)}(a(1-\pi t))\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\substack{\xi_1=a(1-\tau)\\ \xi_2=b}} - \alpha_{i2}^{(4)}(b\tau)\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\right|_{\substack{\xi_1=0\\ \xi_2=b\tau}} + \alpha_{i1}^{(4)}(b\tau)\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\substack{\xi_1=0\\ \xi_2=b\tau}} =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \{\varphi_i(t)-\alpha_{i0}^{(1)}(at)u(at,0)-\alpha_{i0}^{(2)}(b(1-t))u(a_1 b(1-t))-$$

$$
-\alpha_{i0}^{(3)}(a(1-t))u(a(1-t),b)-\alpha_{i0}^{(4)}(bt)u(0,bt)\}\frac{dt}{t-\tau}+\ldots, \tag{9}
$$

где $\tau\in[0;1]$, $i=\overline{1,4}$.

Подставляя в правую часть вместо граничных значений $u(x)$ ее значения из регулярных необходимых условий, и, поменяв порядок интегрирования, регуляризируем все двойные интегралы. Отметим при этом, что первое слагаемое в правой части существует в смысле главного значения Коши. Если предположить, что

$$
\left.\begin{array}{l}
\varphi_i\in C^1(0;1)\\
\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0\quad (i=\overline{1,4})
\end{array}\right\} \tag{10}
$$

то тогда это слагаемое существует в обычном смысле. Таким образом, доказана

Теорема 3: Пусть заданные линейно независимые граничные условия (2) удовлетворяют следующим ограничениям:

$$
\alpha_{i0}^{(s)}(x_1)\in C[0;a],\ \ i,s=\overline{1,4}
$$

$$
\alpha_{ij}^{(1)}(x_1);\ \alpha_{ij}^{(3)}(x_1);\ \alpha_{ij}^{(2)}(x_2);\ \alpha_{ij}^{(4)}(x_2)
$$

принадлежат классу Гельдера $H^{(\mu)}$, $\mu\in(0;1)$, $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,2}$ а функции $\varphi_i(t)$ удовлетворяют условиям (10). Тогда соотношения (9) являются регулярными.

Объединяя граничные условия (2) с полученными регулярными выражениями (9) получим достаточное условие разрешимости этой системы относительно неизвестных функций

$$
\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|_{\substack{x_1=at\\x_2=0}};\ \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|_{\substack{x_1=a\\x_2=b(1-t)}};\ \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|_{\substack{x_1=a(1-t)\\x_2=b}};\ \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|_{\substack{x_1=0\\x_2=bt}};\ t\in[0;1],\ j=1,2.
$$

Предположим, что

$\Delta(t)=$

$$
=\begin{vmatrix}
\alpha_{11}^{(1)}(at) & \alpha_{12}^{(1)}(at) & \alpha_{11}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{12}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{11}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{12}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{11}^{(4)}(bt) & \alpha_{12}^{(4)}(bt)\\
\alpha_{21}^{(1)}(at) & \alpha_{22}^{(1)}(at) & \alpha_{21}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{22}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{21}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{22}^{(3)}(a(1-t)) & a_{21}^{(4)}(bt) & \alpha_{22}^{(4)}(bt)\\
\alpha_{31}^{(1)}(at) & \alpha_{32}^{(1)}(at) & \alpha_{31}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{32}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{31}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{32}^{(3)}(a(1-t)) & a_{31}^{(4)}(bt) & \alpha_{32}^{(4)}(bt)\\
\alpha_{41}^{(1)}(at) & a_{42}^{(1)}(at) & \alpha_{41}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{42}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{41}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{42}^{(3)}(a(1-t)) & a_{41}^{(4)}(bt) & \alpha_{42}^{(4)}(bt)\\
\alpha_{12}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{11}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{12}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{11}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{12}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{11}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{12}^{(4)}(b\tau) & \alpha_{11}^{(4)}(b\tau)\\
\alpha_{22}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{21}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{22}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{21}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{22}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{21}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{22}^{(4)}(b\tau) & \alpha_{21}^{(4)}(b\tau)\\
\alpha_{32}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{31}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{32}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{31}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{32}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{31}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{32}^{(4)}(b\tau) & \alpha_{31}^{(4)}(b\tau)\\
\alpha_{42}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{41}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{42}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{41}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{42}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{41}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{42}^{(4)}(b\tau) & \alpha_{41}^{(4)}(b\tau)
\end{vmatrix}\neq 0 \tag{11}
$$

Тогда справедлива

Теорема 4: Пусть выполнены условия Теоремы 3 и условие (11). Тогда граничная задача (1)-(2) фредгольмова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sajjadmanest M., Jahanshahi M., Aliyev N. "Tikhonov-Lavrentyev type inverse problem including Cauchy-Riemann equation", Azerb. Journal of Mathematics, Baku, January 2013, vol. 3, N 1, pp. 104-110.
2. Aliyev N.A., Mustafayeva Y.Y., Murtuzaeva S.M., "The Influence of the Carleman Condition of the Fredholm Property of the Boundary Value Problem for Cauchy-Riemann Equation", Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Baku, vol. 1, N 2, pp. 153-162, 2012.
3. Aliyev N., Fatehi M.H. Jahanshahi M. Analytic Solution for the Cauchy-Riemann Equation with Non-local Boundary Conditions in the First Semi-Quarter, Quarterly Journal of Science Tarbiat Moallem University, vol. 9, N 1, Winter 2010, Jrak. Pp. 29-40.
4. Aliyev N.A., Abbasova A. Kh., Zeynalov R.M. Non-local boundary condition for Steklov problem for the Laplace equation in boundary domain, Science Journal of Applied Mathematics and statistics, New York USA, vol. 1, N 1, 2013, pp. 1-6.
5. Huseynov R.V., Aliyev N.A, Murtuzayeva M. Influence of Karleman Condition by Investigating Boundary Value Problem for Laplace Equation. Transactions of NA of Sciences of Azerb. Vol. XXXI, N 4, 2011, pp. 73-84.
6. Aliyev N.A., Jahashanhi M., Solution of Poisson's Equation with global, local and nonlocal boundary conditions. International Journal of Mathematical Equation in Science and Technology 33 (2002), N 2, pp. 241-247.
7. Aliyev N.A., Aliquliev R.M. A boundary value problem for an equation of hyperbolic type., Spectral Theory of differential operators, Proceedings of Azerb. State University, Ser. phys. Math. Baku, 1984, pp. 3-9.
8. Aliyev N.A., Hossieni S.M. An analysis of a parabolic problem with a general (non-local and global) supplementary linear conditions. II Italian Journal of Pure and Applied Mathematics N 13 (2003), pp. 115-127.

İKİÖLÇÜLÜ LAPLAS TƏNLİYİ ÜÇÜN DÜZBUCAQDA QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

N.A.ƏLİYEV, M.B.MÜRSƏLOVA

XÜLASƏ

Təqdim olunan məqalədə düzbucaqlı oblastının sərhədboyu 4 nöqtənin hərəkəti Karleman şərtini ödəyən halda ikiölçülü Laplas tənliyi üçün baxılan qeyri-lokal sərhəd məsələsinin həlli öyrənilmişdir.

Açar sözlər: qeyri-lokal sərhəd şərtləri, fundamental həll, zəruri şərtlər, sinqulyarlıq, requlyasiya, Fredholmluq

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR TWO-DIMENSIONAL LAPLACE EQUATION WITH THE NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS ON RECTANGLE

N.A.ALİYEV, N.B.MURSALOVA

SUMMARY

The presented article deals with investigation of Solutions of the Boundary Value problem for the two-dimensional Laplace equation in case when the simultaneous motion of the four points along the boundary satisfies the Carleman condition.

Keywords: Nonlocal boundary conditions, fundamental solution, basic relations, necessary conditions, singularity, regularization, Fredholm property.