## RİYAZİYYAT

**УДК 517.977.57**

# ОБ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Р.К.ТАГИЕВ, Ш.И.МАГЕРРАМЛИ**
***Бакинский Государственный Университет***
***r.tagiyev@list.ru, semedli.shehla@gmail.com***

*Рассматривается обратная задача типа управления об определении старшего коэффициента одномерного параболического уравнения с интегральным граничным условием. Доказана существование решение задачи, получена формула для градиента целевого функционала и установлено необходимое условие оптимальности.*

**Ключевые слова:** обратная задача, параболическое уравнение, интегральное граничное условие

Коэффициентные обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть поставлены как задачи оптимального управления соответствующими системами. В таких постановках коэффициентных обратных задач искомые коэффициенты рассматриваемых уравнений играют роль управления и целевые функционалы составляются на основе заданных дополнительных условий. Коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений с классическими краевыми условиями изучены в работах [1-4] и др. Однако такие постановки обратных задач для параболических уравнений с интегральными условиями исследованы существенно слабее [5,6].

В данной работе изучается обратная задача типа управления об определении старшего коэффициента параболического уравнения с интегральным граничным и дополнительным суммарным условием. Доказана существование решение задачи, найдена формула для градиента целевого функционала и установлено необходимое условие оптимальности управления.

## 1. Постановка обратной задачи типа управления

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(\upsilon)=\int_0^l \left|\sum_{i=1}^{N}\alpha_i u(x,t_i;\upsilon)-\chi(x)\right|^2 dx \qquad (1)$$

на множестве

$$V=\left\{\upsilon=\upsilon(x)\in W_2^1(0,l): 0<\nu\le\upsilon(x)\le\mu, |\upsilon'(x)|\le d \quad п.в.на \quad (0,l)\right\} \qquad (2)$$

при условиях

$$u_t-(\upsilon(x)u_x)_x+a(x,t)u=f(x,t), \quad (x,t)\in Q=\{(x,t):0<x<l, 0<t\le T\}, \qquad (3)$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l, \qquad (4)$$

$$u(0,t)=0, \qquad \upsilon(l)u_x(l,t)=\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx, \quad 0<t\le T\,. \qquad (5)$$

Здесь $N\ge1, \alpha_i>0\ (i=\overline{1,N}), \quad l,T,\nu,\mu,d>0, t_i>0\ (i=\overline{1,N}), 0<t_1<t_2<\ldots<t_N=T$ - заданные числа, $\upsilon=\upsilon(x)$-управление, $u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$-решение краевой задачи (3)-(5), соответствующее управлению $\upsilon\in V$, $a(x,t), f(x,t), H(x,t), \chi(x), \varphi(x)$ - известные функции, удовлетворяющие условиям

$$|a(x,t)|\le\mu, \quad |H(x,t)|\le\mu_1, |H_t(x,t)|\le\mu_2 \quad п.в.на \quad Q;$$

$$f\in L_2(Q), \varphi\in W_{2,0}^1(0,l), \chi\in L_2(0,l), \mu_1,\mu_2=const>0\,. \qquad (6)$$

Используемые в работе обозначения функциональных пространств и их норм соответствует $[7, \text{с.}\ 21-26]$. Ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначаются через $M_j,\ j=1,2,\ldots$ .

Принадлежащую пространству $V_{2,0}^{1,0}(Q)=\{u: u\in V_2^{1,0}(Q), u(0,t)=0\}$ функцию $u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$ назовем обобщенным решением краевой задачи (3)-(5) из $V_2^{1,0}(Q)$, соответствующую управлению $\upsilon\in V$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint_Q[-u\eta_t+\upsilon(x)u_x\eta_x+a(x,t)u\eta]dxdt-\int_0^T\left[\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx\right]\eta(l,t)dt=$$

$$=\int_0^l\varphi(x)\eta(x,0)dx+\iint_Q f(x,t)\eta dxdt\ , \qquad (7)$$

для всех $\eta=\eta(x,t)\in\hat{W}_{2,0}^1(Q)=\{\eta:\eta\in W_2^1(Q), \eta(0,t)=0, \eta(x,T)=0\}$.

Используя метод Галеркина и результаты монографии [7, с.202-210] можно показать, что при каждом заданном $\upsilon\in V$ существует единственное обобщенное решение $u=u(x,t)$ из $V_2^{1,0}(Q)$ краевой задачи (3)-(5), это решение принадлежит также пространству $W_{2,0}^1(Q)$ и верна оценка

$$\|u\|_{2,Q}^{(1)} \le M_1 \left[ \|\varphi\|_{2,(0,l)}^{(1)} + \|f\|_{2,Q} \right]. \tag{8}$$

Задача (1)-(5) тесно связана с обратной задачей, заключающейся об определении функций $\{u(x,t), \upsilon(x)\}$, удовлетворяющих условиям (2)-(5) и дополнительному суммарному условию

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u(x,t_i) = \chi(x), \quad 0 < x < l\ . \tag{9}$$

Если в задаче (1)-(5) окажется, что существует управление $\upsilon_* \in V_*$ доставляющее функционалу (1) нулевое значение, то пара $\{u(x,t;\upsilon_*), \upsilon_*(x)\}$ будет решением задачи (2)-(5), (9).

## 2. Существование решение задачи

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (6). Тогда задача (1)-(5) имеет хотя бы одно решение.

**Доказательство.** Возьмем некоторый элемент $\upsilon \in V$ и произвольную последовательность $\{\upsilon_k\} \subset V$ такую, что

$$\upsilon_k \to \upsilon \quad \text{слабо в } W_2^1(0,l). \tag{10}$$

Из (10) следует [7,с.78], что

$$\upsilon_k \to \upsilon \quad \text{сильно в } C[0,l]. \tag{11}$$

Положим $u_k = u_k(x,t) = u(x,t;\upsilon_k)$ и из (3)-(5), записанных при $u = u_k, \upsilon = \upsilon_k$, учитывая оценку (8), получим

$$\|u_k\|_{2,Q}^{(1)} \le M_2 \quad (k = 1,2,\ldots). \tag{12}$$

Тогда в силу теоремы вложения [7, с.78], не ограничивая общности, может считать, что

$$u_k(x,t) \to u(x,t) \quad \text{слабо в } W_2^1(Q) \text{ и}$$

$$\text{сильно в } L_2(Q), \tag{13}$$

$$u_k(x,t_i) \to u(x,t_i) \quad \left(i = \overline{1,N}\right) \text{ сильно в } L_2(0,l), \tag{14}$$

где $u = u(x,t) \in W_{2,0}^1(Q)$-некоторый элемент.

Для функций $u_k = u_k(x,t)$ справедливы тождества

$$\int_Q [-u_k\eta_t + \upsilon_k(x)u_{kx}\eta_x + a(x,t)u_k\eta]dxdt - \int_0^T \left[ \int_0^l H(x,t)u_k(x,t)dx \right] \eta(l,t)dt =$$

$$= \int_0^l \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int_Q f(x,t)\eta dxdt \quad (k = 1,2,\ldots),\ \forall \eta = \eta(x,t) \in \hat{W}_2^1(Q). \tag{15}$$

Проводя обычное преобразование, пользуясь неравенством Коши-Буняковского и соотношения (11)-(13), имеем

$$\left|\int_Q \upsilon_k u_{kx}\eta_x dxdt - \int_Q \upsilon u_x \eta_x dxdt\right| = \left|\int_Q \upsilon(u_{kx} - u_x)\eta_x dxdt + \int_Q u_{kx}(\upsilon_k - \upsilon)\eta_x dxdt\right| \le$$

$$\le \left|\int_Q \upsilon(u_{kx} - u_x)\eta_x dxdt\right| + \|\upsilon_k - \upsilon\|_{C[0,l]} \times \|u_k\|_{2,Q} \|\eta\|_{2,Q} \to 0\,. \tag{16}$$

Кроме того, используя неравенство Коши-Буняковского, ограниченность вложения $W_2^1(Q) \to L_2(0,T)$ и соотношение (13) получим

$$\left|\int_0^T \left[\int_0^l H(x,t)u_k(x,t)dx\right]\eta(l,t)dt - \int_0^T \left[\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx\right]\eta(l,t)dt\right| \le$$

$$\le \mu_1 \|u_k - u\|_{2,Q} \|\eta(l,t)\|_{2,Q} \le \mu_1 \sqrt{l} M_3 \|u_k - u\|_{2,Q} \|\eta\|_{2,Q}^{(1)} \to 0\,. \tag{17}$$

Тогда переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве (15) и учитывая соотношения (13), (16), (17) получим, что функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет тождеству (7), т.е. $u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$. Таким образом, соотношения (13), (14) справедливы с функцией $u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$ и в частности

$$u(x,t_i;\upsilon_k) \to u(x,t_i;\upsilon) \quad \left(i = \overline{1,n}\right) \text{ сильно в } L_2(0,l)\,. \tag{18}$$

Тогда из равенства (1) и соотношение (18) следует, что $J(\upsilon_k) \to J(\upsilon)$ при $k \to \infty$. Таким образом, функц ал $J(\upsilon)$ слабо непрерывен на слабо компактном множестве $V$. Потому из [8, с.49 ] следует, что функционал $J(\upsilon)$ достигает своей нижней грани на $V$. Теорема 1 доказана.

### 3.Градиент целевого функционала и условие оптимальности

Введем сопряженную краевую задачу для задачи (1)-(5)

$$\psi_t + (\upsilon(x)\psi_x)_x - a(x,t)\psi + H(x,t)\psi(l,t) = 0, \quad (x,t) \in Q = \{(x,t): 0 < x < l, 0 \le t < T\}, \tag{19}$$

$$[\psi]_{t=t_k} \equiv \psi(x,t_k+0) - \psi(x,t_k-0) = 2\alpha_k \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i u(x,t_i) - \chi(x)\right], \quad k = \overline{1,N-1},$$

$$\psi(x,T) = \text{-}2\alpha_N \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i u(x,t_i) - \chi(x)\right], \quad 0 \le x \le l\,, \tag{20}$$

$$\psi(0,t) = 0, \quad \psi_x(l,t) = 0, \quad 0 \le t < T\,. \tag{21}$$

Под решением краевой задачи (19)-(21), при фиксированном $\upsilon \in V$, понимаем обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q)$. Это решение принадлежит пространству $V_{2,0}^{1,0}(Q)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q [\psi\eta_t + \upsilon(x)\psi_x\eta_x + a(x,t)\psi\eta - H(x,t)\psi(l,t)\eta]dxdt =$$

$$= -\sum_{k=1} 2\alpha_k \int_0^l \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_i u(x,t_i) - \chi(x) \right] \eta(x,t_k)dx,$$

$$\forall \eta = \eta(x,t) \in \breve{W}_{2,0}^1(Q) = \{\eta : \eta \in W_2^1(Q), \eta(0,t) = 0, \eta(x,0) = 0\}. \qquad (22)$$

Применяя метод Галеркина и используя результаты из [7,с. 202-212] можно показать, что при каждом заданном $\upsilon \in V$ краевая задача (19)-(21) однозначно разрешима в пространстве $V_{2,0}^{1,0}(Q)$ и верна оценка

$$|\psi|_Q \equiv \|\psi\|_{V_2^{1,0}(Q)} \le M_4 \left\| \sum_{k=1}^N 2\alpha_k \int_0^l \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_i u(x,t_i) - \chi(x) \right] dx \right\|_{2,(0,l)}.$$

Оценивая правую часть этого неравенства и учитывая (8), получаем оценку

$$|\psi|_Q \le M_5 \left[ \alpha \left( \|\varphi\|_{2,(0,l)}^{(1)} + \|f\|_{2,Q} \right) + \|\chi\|_{2,(0,l)} \right], \qquad (23)$$

где $\alpha = \left( \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \right)^{1/2}$.

Пусть функция $\theta = \theta(x;\upsilon) \in W_2^1(0,l)$ является обобщенным решением из $W_2^1(0,l)$ следующей вспомогательной краевой задачи:

$$-\theta'' + \theta = \int_0^T u_x(x,t;\upsilon)\psi_x(x,t;\upsilon)dt, \quad 0 < x < l, \qquad (24)$$

$$\theta'(0) = \theta'(l) = 0. \qquad (25)$$

Обобщенное решение краевой задачи (24), (25) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^l (\theta'\eta' + \theta\eta)dx = \int_0^l \left( \int_0^T u_x(x,t;\upsilon)\psi_x(x,t;\upsilon)dt \right) \eta dx, \quad \forall \eta = \eta(x) \in W_2^1(0,l). \qquad (26)$$

Нетрудно проверить, что для задачи (24), (25) выполняются все условия теоремы 4 из [9 , с. 39] и поэтому эта задача имеет единственное решение из $W_2^1(0,l)$ при каждом фиксированном $\upsilon \in V$.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (6). Тогда функционал (1) непрерывно дифференцируем по Фреше на множестве $V$ и его градиент имеет вид

$$J'(\upsilon) = \theta(x;\upsilon), \quad 0 < x < l. \qquad (27)$$

**Доказательство.** Пусть $\upsilon \in V$ - некоторый элемент и $\Delta\upsilon \in W_2^1(0,l)$- приращение этого элемента такое, что $\upsilon + \Delta\upsilon \in V$. Положим $\Delta u(x,t) = u(x,t;\upsilon + \Delta\upsilon) - u(x,t;\upsilon)$. Тогда из (3)-(5) следует, что $\Delta u$ является обобщенным решением из $W_2^1(Q)$ краевой задачи

$$\Delta u_t - \left((\upsilon+\Delta\upsilon)\Delta u_x\right)_x + a\Delta u = \left(\Delta\upsilon u_x\right)_x, \quad (x,t)\in Q, \tag{28}$$

$$\Delta u(x,0)=0, \quad 0\le x\le l, \tag{29}$$

$$\Delta u(0,t)=0,$$

$$(\upsilon(l)+\Delta\upsilon(l))\Delta u_x(l,t)=\int_0^l H(x,t)\Delta u(x,t)dx - \Delta\upsilon(l)u_x(l,t),\ 0<t\le T. \tag{30}$$

Обобщенное решение краевой задачи (28)-(30) удовлетворяет тождеству

$$\int_Q \left[\Delta u_t\eta + (\upsilon+\Delta\upsilon)\Delta u_x\eta_x + a\Delta u\eta - H\Delta u\eta(l,t)\right]dxdt = -\int_Q \Delta\upsilon u_x\eta_x dxdt, \quad \forall\eta=\eta(x,t)\in \hat{W}^1_{2,0}(Q). \tag{31}$$

и можно показать, что для него верна оценка

$$|\Delta u|_Q \equiv \|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(Q)} \le M_6\|\Delta\upsilon u_x\|_{2,Q}.$$

Отсюда учитывая ограниченность вложения $W_2^1(0,l)\to C[0,l]$ и оценки (8), имеем

$$|\Delta u|_Q \le M_6\|\Delta\upsilon u_x\|_{2,Q} \le M_6\|\Delta\upsilon\|_{C[0,l]}\|u_x\|_{2,Q} \le M_7\|\Delta\upsilon\|^{(1)}_{2,(0,l)}. \tag{32}$$

Приращение функционала (1) представим в виде

$$\Delta J(\upsilon)=J(\upsilon+\Delta\upsilon)-J(\upsilon)=\sum_{k=1}^N 2\alpha_k\int_0^l\left[\sum_{i=1}^N \alpha_i u(x,t_i)-\chi(x)\right]\Delta u(x,t_k)dx+\int_0^l\left|\sum_{k=1}^N\alpha_k\Delta u(x,t_k)\right|^2 dx. \tag{33}$$

Если в (22) положим $\eta=\Delta u$, в (31) положим $\eta=\psi$ и вычтем полученные равенства, то придем к равенству

$$\sum_{k=1}^N 2\alpha_k\int_0^l\left[\sum_{i=1}^N \alpha_i u(x,t_i;\upsilon)-\chi(x)\right]\Delta u(x,t_k)dx=\int_Q(u_x+\Delta u_x)\psi_x dxdt.$$

Подставляя это выражение в (33), получим

$$\Delta J(\upsilon)=\int_Q u_x\psi_x\Delta\upsilon dxdt + R, \tag{34}$$

где

$$R=\int_0^l\left|\sum_{k=1}^N\alpha_k\Delta u(x,t_k)\right|^2 dx+\int_Q\Delta u_x\psi_x\Delta\upsilon dxdt. \tag{35}$$

Если в (26) положим $\eta=\Delta\upsilon$ и полученное равенство учтем в (34), то имеем

$$\Delta J(\upsilon)=\int_0^l(\theta'\Delta\upsilon'+\theta\Delta\upsilon)dx+R. \tag{36}$$

Используя неравенства Коши-Буняковского для интеграла и суммы, ограниченность вложения $V_2^{1,0}(Q)\to L_2(0,l)$ и оценки (23), (32), имеем

$$|R| \le \int_0^l \left| \sum_{k=1}^N \alpha_k \Delta u(x,t_k) \right|^2 dx + \int_Q |\Delta u_x \psi_x \Delta \upsilon| dx dt \le \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \cdot \int_0^l \sum_{k=1}^N |\Delta u(x,t_k)|^2 dx + \|\Delta \upsilon\|_{C[0,l]} \|\Delta u_x\|_{2,Q} \|\psi_x\|_{2,Q} \le$$

$$\le \alpha^2 M_8 |\Delta u|_2^Q + M_9 \left( \|\Delta \upsilon\|_{2,(0,l)}^{(1)} \right)^2 \le M_{10} \left( \|\Delta \upsilon\|_{2,(0,l)}^{(1)} \right)^2 .$$

Отсюда и из (36) следует, что функционал (1) дифференцируем по Фреше на $V$ и его градиент имеет вид (27). Используя формулы (27) можно показать, что отображение $J' : V \to W_2^1(0,l)$ непрерывно. Теорема 2 доказана.

Утверждение следующей теоремы следует из теоремы 5 работы [8, с. 28] с использованием формулы (27).

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (6). Тогда для оптимальности управления $\upsilon_* \in V$ в задаче (1)-(5) необходимо выполнение неравенство

$$\int_0^l [\theta'(x;\upsilon_*)(\upsilon'(x) - \upsilon'_*(x)) + \theta(x;\upsilon_*)(\upsilon(x) - \upsilon_*(x))] dx \ge 0, \quad \forall \upsilon = \upsilon(x) \in V .$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Искендеров А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // ДАН СССР, 1984, т. 274, №3, с. 531-533.
2. Алифанов О.А. Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988, 285 с.
3. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское Научное Издательство, 2009, 457 с.
4. Isgenderov A.D., Tagiyev R.K. Variational method solving the problem of identification of the coefficients of quasilinear parabolic problem // The 7th International Conference “Inverse Problems: modelling and simulation” (IMPS-2014), May 26-31,Turkey.-pp.31.
5. Тагиев Р.К., Касумов Р.А. Об оптимизационной постановке коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017, №45, с.49-59.
6. Габибов В.М. Коэффициентная обратная задача типа управления для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием// Вестник Бакинского Университета. Сер.физ.-матем.наук.-2017, №2, с.80-91.
7. Ладыженская О.А. Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967, 736 с.
8. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М., 1981, 400с.
9. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высш. шк., 1987, 296 с.