UOT 519.633

SƏRHƏD ŞƏRTİNDƏ PARAMETR OLAN STEKLOV TİPLİ MƏSƏLƏLƏRİN ƏDƏDİ ÜSULLA HƏLLİ

N.S.SÜLEYMANOV
Bakı Dövlət Universiteti
Bsu.edu.az

Məhdud oblastda qeyri-lokal sərhəd şərtində Steklov tipli məsələlər araşdırılıb.Bir sərhəd məsələsində məxsusi ədədlər və məxsusi funksiyalar hesablanıb.

Açar sözlər: Spektral parametr, analtik həll, ədədi üsullar, qeyri-lokal, məxsusi ədədlər

Sərhəd şərtində spektral parametr olan qeyri-lokal məsələlərin analitik həllini tapmaq çətin və ya mümkün olmur. Ona görə bu tip məsələlərin effektiv həlləri ədədi üsulların köməyilə olur. Misal üçün bu tip məsələlərə [1]-[2]-də baxılmışdır. Son dövrlərdə müəyyən oblastda sərhəd şərtinə parametr daxil olan Steklov tipli məsələlərin məxsusi ədədlərinin hesablanması [3]-də verilmişdir. Burada müəyyən oblastda bu tip məsələləri həll etmək üçün variyasiya inteqral tənliklərin, kompleks dəyişənlərin üsullarından istifadə edilib.

Qeyd olunan iş [4]-ün davamıdır.Aşağıdakı məsələyə baxaq:

$$\Delta U = 0 \quad \text{в } D \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \lambda U, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{S} = 0, \tag{3}$$

harada D - n ölçülü fəzada məhdud oblastdır,sərhəd iki hissədən ibarətdir: $\partial D = \Gamma U S$;

n - D oblastının sərhəd normalının ortudur. Görmək olar ki, (1)-(3) məsələsi üçün sonsuz sayda $0 \le \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$ məxsusi ədədləri var və $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$ olduqda.

Variyasiya üsullarından məlumdur ki, (1)-(3) məsələsinə aşağıdakı funksionalın min-un tapılmasına ekvivalentdir.

$$F(u) = \frac{\int_D \frac{\partial u}{\partial n} u ds}{\int_\Gamma u^2 ds} \tag{4}$$

harada ki, $$\int_{\Gamma} u dx = 0 \qquad (5)$$
ortoqonallıq şərti ödənilməlidir. (4) funksionalı üçün variyasiya məsələsini Rits üsulu ilə həll etmək üçün koordinatlar funksiyası sistemi kimi harmonik polinomları seçək.

$$C_n^m = b_{mn} P_n^m(\cos\theta)\cos m\eta R^n;$$

$$S_n^m = b_{mn} R^n P_n^m(\cos\theta)\sin m\eta;$$

harada ki, $b_{mn} = \dfrac{2^m m!(n-m)!}{(m+n)!}$

Polinomlar üçün aşağıdakı rekurent düsturlar doğrudur:

$$C_m^m = r^m \cos m\eta; \quad C_{m+1}^m = xC_m^m;$$

$$S_m^m = r^m \sin m\eta; \quad S_{m+1}^m = xS_m^m;$$

$$S_{m+1}^m = \frac{1}{n+m+1}\left[(2n+1)xS_n^m - (n-m)R^2 S_{n-1}^m\right];$$

$$C_{n+1}^m = \frac{1}{n+m+1}\left[(2n+1)xC_n^m - (n-m)R^2 C_{n-1}^m\right];$$

törəmələri üçün isə

$$\frac{\partial S_n^m}{\partial x} = (n-m)S_{n-1}^m; \quad \frac{\partial C_n^m}{\partial x} = (n-m)C_{n-1}^m;$$

$$\frac{\partial S_n^m}{\partial y} = \frac{y}{r^2}\left[nS_n^m - (n-m)xS_{n-1}^m\right] - \frac{zmC_n^m}{r^2};$$

$$\frac{\partial S_n^m}{\partial z} = \frac{z}{r^2}\left[nS_n^m - (n-m)xS_{n-1}^m\right] + \frac{ymC_n^m}{r^2};$$

$$\frac{\partial C_n^m}{\partial y} = \frac{y}{r^2}\left[nC_n^m - (n-m)xC_{n-1}^m\right] + \frac{zmS_n^m}{r^2};$$

$$\frac{\partial C_n^m}{\partial z} = \frac{z}{r^2}\left[nC_n^m - (n-m)xC_{n-1}^m\right] - \frac{y}{r^2};$$

harada ki, $r = \sqrt{y^2 + z^2}$; $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Məxsusi ədədləri aşağıdakı tənlikdən təyin edək:

$$\det(a_{ij} - \lambda\beta_{ij}) = 0 \qquad (6)$$

α_{ij} və β_{ij} konkret formula ilə təyin olunur.

Qeyd olunan alqoritm (4) məsələsinin həllinin S sərhəd şərtində ödəməsi üçün əvvəlcədən təyin olunan sistem koordinat funksiyalarının qurulmasına əsaslanır. Deməli, Γ sərhəd şərtini ödəyən Laplas tənliyinin həllini də tapmaq olar.

Tutaq ki, Γ səthini saxlayan hər hansı D oblastında ikiqat kəsilməz diferensiallanan $u(x,y,z)$ harmonik funksiyası verilib və aşağıdakı şərti ödəyir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu u \text{ при } x = 0, \tag{7}$$

harada ki, $$u(x,y,z) = \frac{\partial \psi(x,y,z)}{\partial x} + \mu\psi(x,y,z) \tag{8}$$

$$\psi(0,y,z)\big|_{\Gamma} = 0\,, \tag{9}$$

$\psi(x,y,z)$- x dəyişəninə görə üçqat, y və z arqumentlərinə görə isə ikiqat kəsilməz diferensiallanan, harmonik funksiyadır. $\psi(x,y,z)$ funksiyasını və μ parametrini tapmaq üçün aşağıdakı funksionalının minumunun tapılması məsələsini alırıq

$$K(u) = \frac{\int\limits_D \left(\nabla \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 dD + 2\mu \int\limits_{S+\Gamma} \left(\nabla \frac{\partial\psi}{\partial x}, \nabla\psi\right) dD + \mu^2 \int\limits_{S+\Gamma} (\nabla\psi)^2 dD}{\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 dS} \tag{10}$$

$\psi(x,y,z)$ funksiyası D oblastında harmonikdir və aşağıdakı şərti ödəyir:

$$\psi(0,y,z)\big|_{\Gamma} = 0 \tag{11}$$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial\psi}{\partial x} ds = 0 \tag{12}$$

Qeyd olunan parametr isə həmin funksionalının minumunun zəruri şərtindən alınır.

$$\frac{\partial k(u)}{\partial\mu} = 0 \tag{13}$$

Buradan çıxır ki,

$$\int\limits_D \left(\nabla\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mu\psi\right), \nabla\psi\right) dD = \int\limits_D \nabla u \nabla\psi dD = 0 \tag{14}$$

μ parametrinin verilmiş qiymətində Rits üsulundan istifadə etsək, məsələnin axtarılan həlli aşağıdakı cəm şəklində tapılar:

$$\Psi^N = \sum_{k=1}^{N} a_k W_k \tag{15}$$

Burada a_k - sabitlərdir və (10) funksionalının zəruri şərtlərindən

$$\frac{\partial K(u)}{\partial a_i} = 0, \ i = 1,2,...,N \tag{16}$$

aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alırıq

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_{ij}(\mu) - \lambda(\mu)\beta_{ij} \right) a_j = 0, \quad i = \overline{1, N}, \tag{17}$$

harada ki, $\alpha_{ij}(\mu) = \alpha_{ij}^{(1)} + 2\mu\alpha_{ij}^{(2)} + \mu^2\alpha_{ij}^{(3)}$,

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \int_S \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial n} \frac{\partial W_i}{\partial x} ds, \qquad \alpha_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\int_S \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial n} W_i ds + \int_S \frac{\partial^2 W_j}{\partial x \partial n} W_i ds \right);$$

$$\alpha_{ij}^{(3)} = \int_S \frac{\partial W_i}{\partial n} \partial W_j ds, \qquad \beta_{ij} = \int_\Gamma \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial W_j}{\partial x} ds;$$

$\alpha_{ij}^{(1)}, \alpha_{ij}^{(2)}, \alpha_{ij}^{(3)}, \beta_{ij}$ - kafi sayda nöqtələrdə inteqralın təqribi hesablanması üçün Qaus və düzbucaqlılar üsulu vasitəsilə analoji hesablanır.

(17) sistemini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\left(A_1 + 2\mu A_2 + \mu^2 A_3 - \lambda B \right) x = 0, \tag{18}$$

harada A_1, A_2, A_3, B - $\alpha_{ij}^{(1)}, \alpha_{ij}^{(2)}, \alpha_{ij}^{(3)}, \beta_{ij}$; - əmsallarından ibarət matrisdir, μ - verilmiş parametrdir λ - axtarılan parametrdir, x - isə α_j - dan ibarət sütundur.

Rits üsulunda biz əmsallara heç bir məhdudiyyət qoymadıq. Amma, demək olar ki, (4) funksionalının minumumu (10) funksionalının minumumundan çox deyil. Amma (7) şərti birinci halda təqribi, ikinci halda isə dəqiq ödənir. İkinci şərt isə hər iki halda təqribi ödənir. μ parametrinin qiymətini tapmaq üçün cəbri tənliklər sisteminə aşağıdakı tənliyi əlavə etmək lazımdır.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \left(\alpha_{ij}^{(2)} a_i a_j + \mu\alpha_{ij}^{(3)} a_i a_j \right) = 0, \tag{19}$$

hansı ki, (16) şərtindən alınır. Müəyyən hesablamalardan sonra μ, λ arasında aşağıdakı əlaqəni almaq olar.

$$\lambda = \mu + \frac{\int \frac{\partial u}{\partial n} u ds}{\int_\Gamma u^2 ds}, \tag{20}$$

Deməli, əgər S səthində $\frac{\partial u}{\partial n}$ qismən sıfırdan fərqli olsa, onda λ məxsusi ədədi μ parametrinin qiymətinə yaxın olur. Ona görə (18) matris məsələsində $\mu = \lambda$ yazsaq, aşağıdakı məxsusi ədədlərin hesablanması məsələsinin həll edilməsinə gələrik.

$$\left(A_1 + 2\lambda A_2 + \lambda^2 A_3 - \lambda B\right)x = 0,$$

Burada (1)-(3) məsələsinin tapılmış təqribi həlli Γ sərhəd şərtini dəqiq ödəyəcəyək.

Deməli, qeyd olunan variyasiya üsulunun modifikasiya olunmuş variantından istifadə etməklə dəqiq həllə yaxın olan təqribi həlli tapmaq olar. Qeyd edək ki, bu modifikasiya olunmuş alqoritm vasitəsilə alınmış məxsusi ədədlər və məxsusi funksiyalar əvvəlki variantlara nisbətən daha dəqiqdir, istifadə olunan yaddaş sahəsi, kompüterdə realizə olunma vaxtı daha effektlidir. Tərtib olunan proqramlar C++ dilində yazılmışdır.

ƏDƏBİYYAT

1. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Итоги науки и техники, математической анализ, т.14 ВИНИТИ, 1997, с. 5-58.
2. Комаренко А.Н., Луковский И.А., Фешенко С.Ф. К задаче собственных значениях с параметром в краевых условиях УМЖ, 1965, Иб, с. 22-30.
3. Dittmar Bodo. Uber Steklofsche Eigenwerte wiss. Pad. Hochsch N.K. Krupskaya, Hall-Kotlen 1988, 26, N 8, с. 3-8.
4. Сулейманов Н.С., Гусейнов Э.А. Нелокальные задачи со спектральным параметром в краевых условиях. Известия СГУ, том 2, №1, 2002.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Н.С.СУЛЕЙМАНОВ

РЕЗЮМЕ

Исследованы краевые задачи типа Стеклова в ограниченной области с нелокальными граничными условиями. На примере одной граничной задачи вычисляются собственные значения и собственной функций.

Ключевые слова: спектральный параметр, аналитическое решение нелокальные, численные методы.

THE ANALYTICAL SOLUTION OF TASKS WITH SPECTRAL PARAMETER IN REGIONAL CONDITIONS BY MEANS OF NUMERICAL METHODS

N.S.SULEYMANOV

SUMMARY

Boundary problems of Steklov type are investigated in a bounded domain with nonlocal boundary conditions. In the example of one boundary value problem the eigenvalues and eigenfunctions are calculated.

Keywords: analytical solution, spectral parameter, numerical methods, nonlocal, eigenvalues.

Redaksiyaya daxil oldu: 03.02.2020-ci il
Çapa imzalandı: 22.10.2020-ci il