UOT 517.928

ANTİPERİODİK SƏRHƏD ŞƏRTLİ BİR QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNİN TAPILMASI HAQQINDA

S.Z.ƏHMƏDOV
Bakı Dövlət Universiteti
salehmedov0@gmail.com

Dörd tərtibli tənlik üçün qarışıq məsələyə baxılmışdır. Bu məsələyə uyğun spektral məsələ tətqiq olunmuşdur. Verilənlər üzərinə qoyulmuş müəyyən şərtlər daxilində məxsusi ədədlərin asimptotikası tapılmış və məsələnin Qrin funksiyasının vacib xassələri öyrənilmişdir. Məqalədə ayrılış teorem isbat olunmuş və qarışıq məsələnin həlli qurulmuşdur.

Açar sözlər. Fundamental həll, asimptotika, analitik funksiya, məxsusi ədəd, asimptotik düstur

Dörd tərtibli tənlik üçün qarışıq məsələyə baxılmışdır. Bu məsələyə uyğun spektral məsələ tətqiq olunmuşdur. Verilənlər üzərinə qoyulmuş müəyyən şərtlər daxilində məxsusi ədədlərin asimptotikası tapılmış və məsələnin Qrin funksiyasının vacib xassələri öyrənilmişdir. Məqalədə ayrılış teoremi isbat olunmuş və qarışıq məsələnin həlli qurulmuşdur.

Açar sözlər: Fundamental həll, asimptotika, analitik funksiya, məxsusi ədəd, asimptotik düstur

İşdə aşağıdakı məsələyə baxılır:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\,p\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + q(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ ,\ 0<x<1,\ t>0 \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \tag{2}$$

$$L_k(u) \equiv \frac{\partial^{k-1}u(0,t)}{\partial x^{k-1}} + \frac{\partial^{k-1}u(1,t)}{\partial x^{k-1}} = 0,\ k=\overline{1,4}\ ,\ 0<x<1,\ t>0 \tag{3}$$

Burada $p>0$ həqiqi ədəd, $q(x)$ və $\varphi(x)$ kompleks qiymətli funksiyalardır.

(1)-(3) qarışıq məsələsinə uyğun spektral məsələ aşağıdakı şəkildədir

$$ipy^{IV} + q(x)y'' - \lambda^4 y = -\varphi(x),\quad 0<x<1 \tag{4}$$

$$L_k(y)=0\ ,\quad k=\overline{1,4} \tag{5}$$

(4) tənliyinə uyğun Birkhof mənada xarakteristik tənliyin kökləri aşağıdakı kimi tapılır [2,3]

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{p}} e^{-\frac{\pi}{8}i},\ \omega_2 = i\,\omega_1,\ \omega_3 = -\omega_1,\ \omega_4 = -i\,\omega_1$$

(4) tənliyinin fundamental həllərinin asimptotikasını tapmaq məqsədi ilə kompleks müstəvini aşağıdakı qayda ilə səkkiz sektora bölək:

$$S_k = \left\{\lambda : \lambda_1\, tg\frac{3\pi}{8} < (-1)^k \lambda_2 < \lambda_1 tg\frac{5\pi}{8}\right\},\ k = 1,2,$$

$$S_k = \left\{\lambda : \lambda_1\, tg\frac{\pi}{8} < (-1)^k \lambda_2 < \lambda_1 tg\frac{3\pi}{8}\right\},\ k = 3,4,$$

$$S_k = \left\{\lambda : \lambda_1\, tg\left(-\frac{\pi}{8}\right) < (-1)^k \lambda_2 < \lambda_1 tg\frac{\pi}{8}\right\},\ k = 5,6,$$

$$S_k = \left\{\lambda : \lambda_1\, tg\left(-\frac{3\pi}{8}\right) < (-1)^k \lambda_2 < \lambda_1 tg\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right\},\ k = 7,8$$

Əgər $q(x) \in C^1[0,1]$ olarsa $S_k\ \left(k = \overline{1,8}\right)$ sektorların hər birində $|\lambda|$-nın böyük qiymətlərində (4) tənliyinin fundamental həllərinin asimptotikası aşağıdakı göstərişə malikdir [6]

$$\frac{d^m y_n(x,\lambda)}{dx^m} = (\lambda\omega_n)^m \left[1 + \frac{1}{4\lambda\omega_n}\int_0^x q(\tau)d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] e^{\lambda\omega_n x};$$

$$|\lambda| \to +\infty,\ \lambda \in S_n\ \left(n = \overline{1,8}\right),\ \ n = \overline{1,4};\ m = \overline{0,3}; \tag{6}$$

(4), (5) spektral məsələsinin Qrin funksiyası

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)};\ \ \lambda \in S_k,\ k = \overline{1,8} \tag{7}$$

kimi tapılır. [3]

$\Delta(\lambda)$ xarakteristik determinantı adlanır və aşağıdakı şəkildədir [2]

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) \\ L_3(y_1) & L_3(y_2) & L_3(y_3) & L_3(y_4) \\ L_4(y_1) & L_4(y_2) & L_4(y_3) & L_4(y_4) \end{vmatrix} \tag{8}$$

$\Delta(x,\xi,\lambda)$ köməkçi determinantı isə aşağıdakı göstərişə malikdir

$$\Delta(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & y_3(x,\lambda) & y_4(x,\lambda) \\ L_1(g)_x & L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) \\ L_2(g)_x & L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) \\ L_3(g)_x & L_3(y_1) & L_3(y_2) & L_3(y_3) & L_3(y_4) \\ L_4(g)_x & L_4(y_1) & L_4(y_2) & L_4(y_3) & L_4(y_4) \end{vmatrix}$$

Burada $g(x,\xi,\lambda)$ Koşi funksiyası [1]

$$g(x,\xi,\lambda)=\pm\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} z_k(\xi,\lambda)y_k(x,\lambda)$$

"+" əgər $0\le\xi\le x\le 1$, "-" əgər $0\le x\le\xi\le 1$ kimi tapılır.

$$Z_k(\xi,\lambda)=\frac{V_{4k}(\xi,\lambda)}{V(\xi,\lambda)},\ k=\overline{1,4}$$

$V_{4k}(\xi,\lambda)$ funksiyası $V(\xi,\lambda)$ Vronski determinantının dördüncü sətir elementlərinin cəbri tamamlayıcısıdır.

(4), (5) spektral məsələnin məxsusi ədədlərinin asimptotikasını tapmaq üçün aşağıdakı teoremi isbat edilmişdir.

Teorem 1: Əgər $p>0,\ q(x)\in C^1[0,1]$, olarsa, onda $\Delta(\lambda)$ xarakteristik determinantının sıfırları yeganə limit nöqtəsi $\lambda=\infty$ olan hesabi çoxluqdur və bu sıfırların asimptotikası üçün aşağıdakı göstərişə malikdir [7].

$$\mu_n=\frac{2\pi n+\pi}{2\omega_2}i,\quad n\to\infty$$

$$\lambda_n^4=\mu_n^4-4\frac{1}{\omega_2}\mu_n^2 b_2(1)+O(n)\quad n\to\infty \tag{9}$$

Yuxarıda tapılan (9) məxsusi ədədlərin asimptotikasından istifadə etməklə ayrılış teoremini verək:

Teorem 2: Fərz edək ki, $q(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları aşağıdakı şərtləri ödəyir. $q(x)\in C^1[0,1],\ \varphi(x)\in C^2[0,1],.\ \varphi(0)=\varphi(1)=\varphi'(0)=\varphi'(1)=0$. Onda $\varphi(x)$ funksiyası üçün aşağıdakı ayrılış düsturu doğrudur.

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_{kn}}\lambda^3\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\frac{\varphi(\xi)}{i\,p}d\xi \tag{10}$$

c_k -sadə kontur olub λ-kompleks müstəvisində Qrin funksiyasının ancaq bir polyusunu öz daxilində saxlayır.

İsbatı:

Əvvəlcə $\theta_k\ \left(k=\overline{1,4}\right)$ ədədlərini elə seçək ki, hər bir $S_p\ \left(p=\overline{1,8}\right)$ sektorlarda

$$\operatorname{Re}\theta_1\lambda\le\operatorname{Re}\theta_2\lambda\le 0\le\operatorname{Re}\theta_3\lambda\le\operatorname{Re}\theta_4\lambda,\ \lambda\in S_p\ \left(p=\overline{1,8}\right)$$

bərabərsizlik ödənilsin. Bunun üçün aşağıdakı kimi seçimi aparmaq kifayətdir.

$\theta_1=\omega_3;\ \theta_2=\omega_4;\ \theta_3=\omega_2;\ \theta_4=\omega_1;\quad \lambda\in S_1;$

$\theta_1=\omega_3;\ \theta_2=\omega_2;\ \theta_3=\omega_4;\ \theta_4=\omega_1;\quad \lambda\in S_2;$

$\theta_1=\omega_2;\ \theta_2=\omega_3;\ \theta_3=\omega_1;\ \theta_4=\omega_4;\quad \lambda\in S_3;$

$\theta_1=\omega_2;\ \theta_2=\omega_1;\ \theta_3=\omega_3;\ \theta_4=\omega_4;\quad \lambda\in S_4;$

$\theta_1=\omega_1;\ \theta_2=\omega_2;\ \theta_3=\omega_4;\ \theta_4=\omega_3;\quad \lambda\in S_5;$

$\theta_1=\omega_1;\ \theta_2=\omega_4;\ \theta_3=\omega_2;\ \theta_4=\omega_3;\quad \lambda\in S_6;$

$\theta_1=\omega_4;\ \ \theta_2=\omega_1;\ \ \theta_3=\omega_3;\ \ \theta_4=\omega_2;\qquad \lambda\in S_7;$

$\theta_1=\omega_4;\ \ \theta_2=\omega_3;\ \ \theta_3=\omega_1;\ \ \theta_4=\omega_2;\qquad \lambda\in S_8;$

$\Delta(x,\xi,\lambda)$ determinantının ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, sütunlarını uyğun olaraq $\frac{1}{2}z_1(\xi,\lambda)$, $\frac{1}{2}z_2(\xi,\lambda)$, $-\frac{1}{2}z_3(\xi,\lambda)$, $-\frac{1}{2}z_4(\xi,\lambda)$ funksiyalarına vurub birinci sütunun üzərinə gələk. bu çevirmələrdən sonra birinci sütun elementlərini $g_0(x,\xi,\lambda)$ və $g_p(\xi,\lambda)$ $\left(p=\overline{1,4}\right)$ işarə etsək alarıq:

$$g_0(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} z_1(\xi,\lambda)y_1(x,\lambda)+z_2(\xi,\lambda)y_2(x,\lambda), 0\le\xi\le x\le 1\\ -z_3(\xi,\lambda)y_3(x,\lambda)-z_4(\xi,\lambda)y_4(x,\lambda), 0\le x\le\xi\le 1\end{cases}$$

$$g_{p+1}(\xi,\lambda)=-\sum_{k=1}^{2}z_k(\xi,\lambda)\left.\frac{d^p y_k(x,\lambda)}{dx^p}\right|_{x=1}-\sum_{k=3}^{4}z_k(\xi,\lambda)\left.\frac{d^p y_k(x,\lambda)}{dx^p}\right|_{x=0}\qquad p=\overline{0,3}$$

burada

$$z_k(\xi,\lambda)=\frac{1}{\lambda^3}\frac{V_{4k}}{V}\left[1-\frac{1}{4\lambda\theta_k}\int_0^{\xi}q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]e^{-\lambda\theta_k\xi}\quad,\ |\lambda|\to\infty,$$

$\lambda\in S_p\ \left(p=\overline{1,8}\right)$

V - θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 ədədlərindən düzəlmiş Vandermant determinantıdır.

V_{4k} - V -determinantının $(4,k)$elementinin cəbri tamamlayıcıdır.

$\Delta(x,\xi,\lambda)$ determinantını əvvəlcə birinci sətrə görə, sonra alınmış determinantların hər birini birinci sütuna görə açsaq, alarıq:

$$\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=g_0(x,\xi,\lambda)+\sum_{m=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}y_m(x,\lambda)g_k(\xi,\lambda)\frac{\Delta_{km}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\tag{11}$$

λ-kompleks müstəvisində mərkəzləri koordinat başlanğıcında radiusları monoton artan və $\lim\limits_{k\to\infty}r_k=+\infty$ şərtlərini ödəyən çevrələrardıcıllığını O_k $(k=1,2,3,...)$ ilə işarə edək. O_k $(k=1,2,3,...)$ çevrələr ardıcıllığının radiuslarını elə seçək ki, bu çevrələr $\Delta(\lambda)$ determinantının sıfırlarının δ ətrafını kəsməsin. (11) düsturunun hər tərəfini $\varphi(\xi)$ funksiyasına vurub, 0-dan 1-ə kimi inteqrallayaq:

$$\int_0^1\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\varphi(\xi)d\xi=\sum_{k=1}^{2}y_k(x,\lambda)\int_0^1 z_k(\xi,\lambda)\varphi(\xi)d\xi-\sum_{k=3}^{4}y_k(x,\lambda)\int_0^1 z_k(\xi,\lambda)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{m=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}y_m(x,\lambda)\int_0^1 g_k(\xi,\lambda)\varphi(\xi)d\xi\tag{12}$$

(12) bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqralları hissə-hissə inteqrallasaq, alarıq:

$$\int_0^1 \frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\varphi(\xi)d\xi = \frac{i\,p}{\lambda^4}\varphi(x)+\frac{M(x,\xi,\lambda)}{\lambda^5} \tag{13}$$

Burada $M(x,\xi,\lambda)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında x və ξ-yə görə məhdud, $\lambda \in S_p \left(p=\overline{1,8}\right)$ sektorlarında λ - kompleks parametrinə görə analitikdir.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2i\pi p}\int_{O_k}\lambda^3\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)d\xi d\lambda = \sum_{k=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\lambda=\lambda_{kn}}{res}\,\lambda^3\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\frac{\varphi(\xi)}{i\,p}d\xi \tag{14}$$

$M(x,\xi,\lambda)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında x və ξ-yə görə məhdud olduğunu nəzərə almaqla (13) düsturundan istifadə etsək, alarıq.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2i\pi p}\int_{O_k}\lambda^3\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)d\xi d\lambda = \varphi(x) \tag{15}$$

(14) və (15) bərabərliklərini tutuşdursaq, ayrılış düsturunu alarıq.

Teorem isbat olundu.

Məlumdur ki, $\operatorname{Re} q(x) > 0$, $0 \le x \le 1$ olduqda (1) tənliyi Şilov mənada parabolikdir. Aşağıdakı teoremdə (1)-(3) məsələsinin həlli daha geniş sinifdə tapılmışdır. Xüsusi qeyd etmək lazımdır ki, həllin varlığı üçün əmsallar üzərinə qoyulan kafi şərt tədqiq olunan tənliyin Şilov mənada parabolik olmadığı halları da əhatə edir.

Teorem 3. Fərz edək ki, $q(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları aşağıdakı şərtləri ödəyir. $q(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi(x)\in C^3[0,1]$, $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi'(0)=\varphi'(1)=0$. $\operatorname{Re}\int_0^1 q(\tau)d\tau > 0$.

Onda (1)-(3) qarışıq məsələsinin aşağıdakı düsturla tapılan həlli var.

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\lambda=\lambda_{kn}}{res}\,\lambda^3 e^{\lambda^4 t}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\frac{\varphi(\xi)}{i\,p}d\xi \tag{16}$$

burada λ_{kn} $\left(k=\overline{1,4}; n=1,2,3,...\right)$ ədədləri uyğun spektral məsələsinin Qrin funksiyasının bütün sıfırları işarə olunub. Harada ki, məxsusi ədədləri asimptotikası (9) düsturu ilə tapılıb

İsbatı.

Qarışıq məsələnin həllini

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}\underset{\lambda=\lambda_{km}}{res}\,\lambda^3\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)z(\xi,t,\lambda)d\xi \tag{17}$$

şəklində axtarılır. Burada $z(\xi,t,\lambda)$ naməlum funksiyadır. Bu funksiyanı tapmaq üçün (17)-ni (1), (2)-də nəzərə alsaq parametrdən asılı adi diferensial tənlik üçün Koşi məsələsini alarıq:

$$\frac{dz(\xi,t,\lambda)}{dt}=\lambda^4 z(\xi,t,\lambda) \tag{18}$$

$$z(\xi,0,\lambda)=\frac{1}{i\,p}\varphi(\xi) \tag{19}$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki (18) və (19) Koşi məsələsinin həlli

$$z(\xi,t,\lambda)=\frac{1}{i\,p}e^{\lambda^4 t}\varphi(\xi) \tag{20}$$

düsturu ilə tapılır.

(20) həllini (17) sırasında nəzərə alsaq (16) düsturunu alarıq. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, (16) sırası (1)-(3) qarışıq məsələnin formal həllidir.

(9) düsturundan istifadə etsək aşağıdakı qiymətləndirməni aparmaq olar.

$$\left|e^{\lambda_{kn}^4 t}\right|=e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_{kn}^4 t}=e^{-t\pi^2 n^2\int_0^1 q(\tau)d\tau+O(n)}.$$

Bu onu göstərir ki, əgər $\mathrm{Re}\int_0^1 q(\tau)d\tau>0$, $t>0$, olduqda $x\in[0,1]$ olduqda (16) sırası ilə təyin olunan $u(x,t)$ funksiyası və onun x-ə görə dördüncü, t-yə görə birinci tərtib törəmələri mütləq və müntəzəm yığılır. Bu onu göstərir ki, (17) düsturu ilə tapılmış sıra (1)-(3) qarışıq məsələnin əsaslandırılmış həllidir.
Teorem isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Садовничий В.А., Любишкин В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциалного типа, Докл. АН, СССР, 1981, т. 256, №4, с. 794-798
2. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла// М.: Наука, 1964, 462 с.
3. Расулов М.Л. Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений // Баку: Элм, 1989, 328 с.
4. Мамедов Ю.А., Ахмедов С.З. Исследование характеристического определителя, связанного с решением спектральной задачи// Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук. 2005, №2, с.5-12
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969
6. Əhmədov S.Z., Ələsgərova S.T. $\lambda-$kompleks parametrindən asılı dördüncü tərtib tənliyin fundamental həllərinin asimptotikasının qurulması, Bakı Dövlət Universiteti Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2012, №1, s.70-77.
7. Əhmədov S.Z. Dördüncü tərtib kompleks parametrdən asılı tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin xarakteristik determinantının sıfırlarının asimptotikası haqqında, Bakı Dövlət Universiteti Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2018, №2, s.97-100.

О РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШЕННОЙ ЗАДАЧИ С АНТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ

С.З. АХМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена смешанное задача для уравнение четвертово порядка. Исследована соответсшвующае спектральная задача. При определенных условиях на данные найдена асимптотика собственных значений и изучена важные свойства функции Грина поставленной задачи. В работе дана теорема разложения и найдено решение задачи.

Ключевые слова: Собственных значения, Функция Грина, фундаментальные решения, характеристический детерминант, спектральная задача.

ABOUT THE SOLUTION OF ONE MIXED PROBLEM WITH AN ANTIPERIODIC BOUNDARY CONDITION

S.Z.AHMADOV

SUMMARY

For the equation with four portion, mixed problem was reviewed. Spectral task appropriate to this task was investigated. At some condition on dates the asymptotic of eigenvalues is found and important properties of Green's function of the stated problem is investigated. In article, separation theorem was proven and one solution of mixed problem was settled.

Keywords: Eigenvalues, Green function, fundamental solution, characteristic determinant, spectral problem.

Redaksiyaya daxil oldu: 05.02.2020-ci il
Çapa imzalandı: 22.10.2020-ci il