RİYAZİYYAT

УДК 519.634

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С.Дж.АЛИЕВ*, А.Г.АЛИЕВА**

Бакинский Государственный Университет

****Институт Математики и Механики НАНА***

samed59@bk.ru, arzualiyeva@bk.ru

Доказана теорема существования решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью.

Ключевые слова: смешанная задача, метод Фурье, решение почти всюду, априорная оценка.

В работе изучается вопрос существования решения почти всюду следующей многомерной смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} L(u(t,x)) = \mathscr{F}(u(t,x)) \quad (t \in [0,T], x \in \Omega), \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad (x \in \Omega), \; u_t(0,x) = \psi(x) \;\; (x \in \Omega), \tag{2}$$

$$u(t,x)\big|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

где $0 < T < +\infty$; $x = (x_1, ..., x_n)$, $\Omega - n$-мерная ограниченная область с достаточно гладкой границей S, $\Gamma = [0,T] \times S$;

$$L(u(t,x)) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j}\right) - a(x)u(t,x), \tag{4}$$

причём функции $a_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1,n})$ и $a(x)$ измеримы и ограничены в Ω и в области Ω удовлетворяют условиям

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \; a(x) \geq 0, \; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \;\; (\alpha = const > 0),$$

ξ_i - любые действительные числа; φ, ψ - заданные функции; $\mathscr{F}$ - некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор, а $u(t,x)$ - искомая функция.

При исследовании решения почти всюду задачи (1)-(3) будем пользоваться приводимыми ниже классами функций $\overset{\circ}{\mathscr{D}}$ и $\overset{\circ}{\mathscr{D}}_1$, введёнными К.Фридрихсом (см.[8, с.38]).

Замыкание множества всех непрерывно дифференцируемых финитных в Ω функций в норме $W_2^1(\Omega)$ назовём классом $\overset{\circ}{\mathscr{D}}(\Omega)$. Очевидно, что $\overset{\circ}{\mathscr{D}}(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$.

Обозначим через $\dot{\mathscr{D}}_1(Q_T)$ $(Q_T \equiv [0,T]\times\Omega)$ совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю в δ-окрестности боковой поверхности цилиндра Q_T, имеющей вид: $Q_{T,\delta} = [0,T]\times\Omega_\delta$, где Ω_δ есть совокупность точек Ω, удалённых от границы Ω на расстояние, не больше δ. Замыкание $\dot{\mathscr{D}}_1(Q_T)$ в норме $W_2^1(Q_T)$ обозначим $\overset{\circ}{\mathscr{D}}_1(Q_T)$. Очевидно, что $\overset{\circ}{\mathscr{D}}_1(Q_T) \subset W_2^1(Q_T)$.

Определение. Решением почти всюду задачи (1)-(3) назовём функцию $u(t,x) \in \overset{\circ}{\mathscr{D}}_1(Q_T)$, принадлежащую пространству $L_2(Q_T)$ вместе со всеми своими производными $u_t(t,x), u_{x_i}(t,x)$ $(i=\overline{1,n})$, $u_{tx_i}(t,x)$ $(i=\overline{1,n})$, $u_{x_ix_j}(t,x)$ $(i,j=\overline{1,n})$, $u_{tt}(t,x)$, $u_{tx_ix_j}(t,x)$ $(i,j=\overline{1,n})$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в Q_T и принимающую начальные значения (2) почти всюду в Ω.

Следует отметить, что многие задачи теории упругости, в частности, задача о продольном колебании упруго-вязкого неоднородного стержня, задача о продольном ударе абсолютно твёрдым телом по упруго-вязкому неоднородному стержню конечной длины и переменного сечения, распространение волн в вязко-упругом теле, распространение импульсов вдоль нервных аксонов (нейронов) и др., сводятся к решению смешанных задач для различных частных случаев уравнения (1).

Сначала отметим некоторые работы, связанные с задачей (1)-(3).

В работе [4] рассмотрена смешанная задача для уравнения

$$u_{tt}(t,x) - \alpha\Delta u(t,x) - \Delta u_t(t,x) =$$

$$= f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),\mathscr{D}u(t,x),\mathscr{D}u_t(t,x),\mathscr{D}^2u(t,x),\mathscr{D}^2u_t(t,x)).$$

При определённых специальных условиях относительно нелинейной функции f доказано существование решения рассматриваемой задачи при всех $t>0$.

В работе [5] рассмотрена смешанная задача для уравнения

$$u_{tt}(t,x)-\alpha\Delta u_t(t,x)-\Delta u(t,x)=f(t,x,u(t,x))$$

с нелинейностью типа $|u|^{p-1}\cdot u$. Указаны условия существования глобального слабого решения этой задачи.

Далее, в работах [1,2,3] рассмотрен частный случай задачи (1)-(3), когда оператор $\mathscr{F}$, фигурирующий в правой части уравнения (1), является оператором типа функции, порождённым функцией $f(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})$. В работах [1] и [2] исследован вопрос существования и единственности решения почти всюду задачи (1)-(3), а именно, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера для любых размерностей n доказывается теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) и единственности в целом (т.е. справедливая для любого конечного значения T) решения почти всюду задачи (1)-(3), а с помощью метода априорных оценок для любых размерностей n доказана теорема существования в целом решения почти всюду задачи (1)-(3). А в работе [3] исследован вопрос существования классического решения задачи (1)-(3) и с помощью принципа сжатых отображений для любых размерностей n доказывается теорема существования в малом классического решения задачи (1)-(3).

С целью исследования решения почти всюду задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Как известно, оператор L, порождённый дифференциальным выражением (4) и краевым условием (3), имеет счётную систему отрицательных собственных чисел

$$0>-\lambda_1^2\geq-\lambda_2^2\geq\ldots\geq-\lambda_s^2\geq\ldots\quad(0<\lambda_s\to+\infty \text{ при } s\to\infty)$$

и соответствующую полную ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему обобщённых собственных функций $\vartheta_s(x)$, причём под обобщённой собственной функцией $\vartheta_s(x)$ оператора L понимаем такую не равную тождественно нулю функцию $\vartheta_s(x)$, которая принадлежит классу $\overset{\circ}{\mathscr{D}}(\Omega)$ и для любой функции $\Phi(x)$ из $\overset{\circ}{\mathscr{D}}(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega\left\{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial\vartheta_s(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_j}+a(x)\vartheta_s(x)\Phi(x)\right\}dx=\lambda_s^2\int_\Omega\vartheta_s(x)\Phi(x)dx.$$

Очевидно, что каждое решение почти всюду задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{s=1}^\infty u_s(t)\vartheta_s(x), \tag{5}$$

где $u_s(t)=\int\limits_{\Omega} u(t,x)\vartheta_s(x)dx \quad (s=1,2,...)$. Тогда, после применения формальной схемы метода Фурье, нахождение коэффициентов Фурье $u_s(t)$ искомого решения почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_s(t)=\varphi_s+\frac{1}{\lambda_s^2}\left(1-e^{-\lambda_s^2 t}\right)\psi_s+$$

$$+\frac{1}{\lambda_s^2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\mathscr{F}(u(\tau,x))\cdot\left[1-e^{-\lambda_s^2(t-\tau)}\right]\cdot\vartheta_s(x)dxd\tau \;\left(s=1,2,...;t\in[0,T]\right), \tag{6}$$

где $\quad \varphi_s=\int\limits_{\Omega}\varphi(x)\vartheta_s(x)dx, \qquad \psi_s=\int\limits_{\Omega}\psi(x)\vartheta_s(x)dx$.

2. Исходя из определения решения почти всюду задачи (1)-(3), легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t,x)$ является решением почти всюду задачи (1)-(3) и обобщённые производные $\frac{\partial}{\partial x_k}a_{ij}(x)\ (i,j,k=\overline{1,n})$ ограничены в Ω, то функции $u_s(t)\ (s=1,2,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (6).

3. Обозначим через $B^{\alpha_0,...,\alpha_l}_{\beta_0,...,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида (5), рассматриваемых в $[0,T]\times\Omega$, для которых все функции $u_s(t)\in C^{(l)}\left([0,T]\right)$ и

$$J_T(u)\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_s^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<+\infty,$$

где $\alpha_i\ge 0,\ 1\le\beta_i\le 2\ \left(i=\overline{0,l}\right)$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\|=J_T(u)$. Очевидно, что все эти пространства банаховы ([7, с.50]).

4. Примем следующие обозначения:

$$\mathscr{D}(u(t,x),V(t,x))\equiv\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_j}+a(x)u(t,x)V(t,x)\right]dx,$$

$$\mathscr{D}(u(t,x),u(t,x))\equiv\mathscr{D}(u(t,x))=\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j}+a(x)u^2(t,x)\right]dx.$$

Тогда очевидно, что для любого $s\ (s=1,2,...)$

$$\mathscr{D}\left(\frac{\vartheta_s(x)}{\lambda_s}\right)=\frac{1}{\lambda_s^2}\cdot\mathscr{D}(\vartheta_s(x))=1.$$

Так как для любого натурального числа N

$$0 \le \mathscr{D}\left(z(t,x) - \sum_{s=1}^{N} \mathscr{D}(z(t,x), \frac{1}{\lambda_s} \boldsymbol{v}_s(x)) \cdot \frac{\boldsymbol{v}_s(x)}{\lambda_s} \right) =$$

$$= \mathscr{D}(z(t,x)) - 2\sum_{s=1}^{N} \left[\mathscr{D}(z(t,x), \frac{1}{\lambda_s} \boldsymbol{v}_s(x)) \right]^2 +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N} \left[\mathscr{D}(z(t,x), \frac{1}{\lambda_s} \boldsymbol{v}_s(x)) \right]^2 \cdot \mathscr{D}\left(\frac{\boldsymbol{v}_s(x)}{\lambda_s} \right) = \mathscr{D}(z(t,x)) - \sum_{s=1}^{N} \left[\mathscr{D}(z(t,x), \frac{1}{\lambda_s} \boldsymbol{v}_s(x)) \right]^2,$$

то

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left[\mathscr{D}(z(t,x), \frac{1}{\lambda_s} \boldsymbol{v}_s(x)) \right]^2 \le \mathscr{D}(z(t,x)). \tag{7}$$

Аналогично (7) доказывается справедливость следующего неравенства:

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_s \psi_s)^2 \le \mathscr{D}(\psi(x), \psi(x)). \tag{8}$$

Теорема. Пусть

1. $a_{ij}(x) \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ $(i, j = \overline{1,n})$; $a(x) \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$; $S \in C^3$; собственные функции $\boldsymbol{v}_s(x)$ оператора L при граничном условии $\boldsymbol{v}_s(x)\big|_S = 0$ трижды непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$; $\varphi(x) \in W_2^3(\Omega)$, $\varphi(x)$, $L\varphi(x) \in \overset{\circ}{\mathscr{D}}(\Omega)$; $\psi(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathscr{D}}(\Omega)$.
2. Оператор $\mathscr{F}$ действует из шара $\mathscr{K}\left(\| u - W \|_{B_{2,T}^1} \le R \right)$ в $L_2(Q_T)$ непрерывно и ограниченно, где $0 < R < +\infty$,

$$W(t,x) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \varphi_s + \frac{1}{\lambda_s^2} \left[1 - e^{-\lambda_s^2 t} \right] \psi_s \right\} \cdot \boldsymbol{v}_s(x).$$

3. $\dfrac{\sqrt{T}}{\lambda_1^2} \cdot \sup\limits_{u \in \mathscr{K}} \left\{ \| \mathscr{F}(u) \|_{L_2(Q_T)} \right\} \le R.$

4. Для каждого $u \in \overset{\circ}{\mathscr{D}}_1(Q_T)$ $\mathscr{F}(u) \in \overset{\circ}{\mathscr{D}}_1(Q_T)$.

Тогда задача (1)-(3) имеет решение почти всюду.

Доказательство. Сначала примем следующие обозначения:

$$\mathscr{P}(u(t,x)) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s^2} \int_0^t \int_{\Omega} u(\tau,\xi) \boldsymbol{v}_s(\xi) \cdot \left[1 - e^{-\lambda_s^2 (t-\tau)} \right] d\xi \, d\tau \cdot \boldsymbol{v}_s(x), \tag{9}$$

$$Q(u(t,x)) \equiv W(t,x) + \mathscr{PF}(u(t,x)) . \tag{10}$$

Из условия 1 данной теоремы следует, что $W(t,x) \in B^1_{2,T}$. Если для каждого $u(t,x) \in \mathscr{K}$ обозначить $\mathscr{PF}(u(t,x)) = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{u}_s(t) \boldsymbol{v}_s(x)$, где

$$\tilde{u}_s(t) = \frac{1}{\lambda_s^2} \int_0^t \int_\Omega \mathscr{F}(u(\tau,\xi)) \boldsymbol{v}_s(\xi) \cdot \left[1 - e^{-\lambda_s^2 (t-\tau)}\right] d\xi \, d\tau ,$$

то легко получить, что для любых натуральных s, N и для любых $u \in \mathscr{K}$, $t \in [0,T]$:

$$\left|\tilde{u}_s(t)\right| \le \frac{1}{\lambda_s^2} \cdot \sqrt{T} \cdot a_0 , \qquad \left|\tilde{u}'_s(t)\right| \le \sqrt{T} \cdot a_0 , \tag{11}$$

$$\left\{ \sum_{s=N}^{\infty} \left(\lambda_s \cdot \max_{0 \le t \le T} \left|\tilde{u}_s(t)\right| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_N^2} \cdot \left\{ \int_0^T \int_\Omega [\mathscr{F}(u(t,x))]^2 dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_N^2} \cdot a_0 , \tag{12}$$

где $\quad a_0 \equiv \sup_{u \in \mathscr{K}} \left\{ \left\| \mathscr{F}(u) \right\|_{L_2(Q_T)} \right\}$.

Из соотношений (11) и (12), в силу теоремы 1.1 работы [6, с.45] о критерии компактности множеств в пространствах $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$, следует компактность множества $\mathscr{PFK}$ в $B^1_{2,T}$.

Далее, для любых $u, \boldsymbol{v} \in \mathscr{K}$ имеем:

$$\left\| Q(u) - W \right\|_{B^1_{2,T}} \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_1^2} \cdot \left\| \mathscr{F}(u) \right\|_{L_2(Q_T)} \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_1^2} \cdot a_0 \le R , \tag{13}$$

$$\left\| Q(u) - Q(\boldsymbol{v}) \right\|_{B^1_{2,T}} \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_1^2} \cdot \left\| \mathscr{F}(u) - \mathscr{F}(\boldsymbol{v}) \right\|_{L_2(Q_T)} , \tag{14}$$

где оператор Q определён соотношением (10).

Из (13) видно, что оператор Q преобразует шар $\mathscr{K}$ в себя, а из (14) следует непрерывность оператора Q в шаре $\mathscr{K}$. Таким образом, оператор Q вполне непрерывно преобразует шар $\mathscr{K}$ в себя. Следовательно, в силу принципа Шаудера, оператор Q имеет в шаре $\mathscr{K} \subset B^1_{2,T}$ по крайней мере одну неподвижную точку $u(t,x)$. По определению оператора Q:

$$u = Q(u) .$$

Из (9) и (10) видно, что $u_s(t) = \int_\Omega u(t,x) \boldsymbol{v}_s(x) dx$, т.е. коэффициенты Фурье функции $u(t,x)$ по системе $\{\boldsymbol{v}_s(x)\}_{s=1}^{\infty}$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (6). Пользуясь этим, покажем, что найденная функция $u(t,x) =$

$=\sum_{s=1}^{\infty}u_s(t)\boldsymbol{v}_s(x)$ является решением почти всюду задачи (1)-(3). Легко показать, что $u(t,x)\in\overset{\circ}{\mathscr{D}}_1(Q_T)$. Тогда, в силу условия 4 данной теоремы, $\mathscr{F}(u(t,x))\in\overset{\circ}{\mathscr{D}}_1(Q_T)$. Пользуясь этим и соотношением $L\boldsymbol{v}_s(x)=-\lambda_s^2\boldsymbol{v}_s(x)$ преобразуем (интегрируя по частям) систему (6) к следующему виду:

$$u_s(t)=\varphi_s+\frac{1}{\lambda_s^2}(1-e^{-\lambda_s^2 t})\psi_s+\frac{1}{\lambda_s^3}\int_0^t\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{F}(u(\tau,x))\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\boldsymbol{v}_s(x)}{\lambda_s}\right)+\right.$$

$$\left.+a(x)\mathscr{F}(u(\tau,x))\cdot\frac{\boldsymbol{v}_s(x)}{\lambda_s}\right]\cdot[1-e^{-\lambda_s^2(t-\tau)}]dxd\tau,\ s=1,2,...;\ t\in[0,T]. \tag{15}$$

Из (15), пользуясь неравенствами (8) (для функций $\psi(x)$, $L\varphi(x)$) и (7) (для функции $z(t,x)=\mathscr{F}(u(t,x))$), получаем:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^3\cdot\max_{0\le t\le T}|u_s(t)|\right)^2\le 3\cdot\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^3\cdot\varphi_s\right)^2+\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s\cdot\psi_s\right)^2+T\cdot\int_0^T\sum_{s=1}^{\infty}\left(\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\frac{\partial\mathscr{F}(u(\tau,x))}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\boldsymbol{v}_s(x)}{\lambda_s}\right)+a(x)\mathscr{F}(u(\tau,x))\cdot\frac{\boldsymbol{v}_s(x)}{\lambda_s}\right]dx\right)^2d\tau\right\}\le$$

$$\le 3\cdot\left\{\mathscr{D}(L\varphi(x),L\varphi(x))+\mathscr{D}(\psi(x),\psi(x))\ +\ T\cdot\int_0^T\sum_{s=1}^{\infty}\left[\mathscr{D}\left(\mathscr{F}(u(\tau,x)),\frac{\boldsymbol{v}_s(x)}{\lambda_s}\right)\right]^2d\tau\right\}\le$$

$$\le 3\cdot\left\{\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial L\varphi(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial L\varphi(x)}{\partial x_j}+a(x)(L\varphi(x))^2\right]dx+\right.$$

$$+\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}+a(x)\psi^2(x)\right]dx+T\cdot\int_0^T\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\cdot\frac{\partial\mathscr{F}(u(\tau,x))}{\partial x_i}\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{\partial\mathscr{F}(u(\tau,x))}{\partial x_j}+a(x)(\mathscr{F}(u(\tau,x)))^2\right]dxd\tau\right\}, \tag{16}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^2\cdot\max_{0\le t\le T}|u_s'(t)|\right)^2\le 2\cdot\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^2\cdot\psi_s\right)^2+\frac{1}{2}\int_0^T\sum_{s=1}^{\infty}\left(\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\cdot\frac{\partial\mathscr{F}(u(\tau,x))}{\partial x_i}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\boldsymbol{v}_s(x)}{\lambda_s}\right)+a(x)\mathscr{F}(u(\tau,x))\cdot\frac{\boldsymbol{v}_s(x)}{\lambda_s}\right]dx\right)^2d\tau\right\}\le 2\cdot\left\|\left\{L\psi(x)\right)\right\|_{L_2(\Omega)}^2\ +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\int_0^T\sum_{s=1}^{\infty}\left[\mathscr{D}\left(\mathscr{F}(u(\tau,x)),\frac{\vartheta_s(x)}{\lambda_s}\right)\right]^2 d\tau\Bigg\}\le 2\cdot\left\{\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\cdot\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}\right)-a(x)\psi(x)\right]^2 dx+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\cdot\frac{\partial\mathscr{F}(u(\tau,x))}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\mathscr{F}(u(\tau,x))}{\partial x_j}+a(x)(\mathscr{F}(u(\tau,x)))^2\right]dxd\tau\right\}. \qquad (17)$$

Таким образом, из (16) и (17) следует, что $u(t,x)\in B^{3,2}_{2,2,T}$.

Примем следующие обозначения:

$$u_{p,q}(t,x)=\sum_{s=p}^{q}u_s(t)\vartheta_s(x) \qquad (1\le p\le q).$$

Теперь, пользуясь неравенством (18) (для $k=0,1,2,3$) и неравенством (21) (для $r=1$) из [8, с.84, 88], получаем, что для любых $t\in[0,T]$ и $1\le p\le q$:

$$\left\|u_{p,q}(t,x)\right\|^2_{W_2^3(\Omega)}\le C_1\cdot\left\{J_0(u_{p,q})+J_1(u_{p,q})+J_2(u_{p,q})+J_3(u_{p,q})\right\}\le$$

$$\le C_2\cdot\left\{J_0(u_{p,q})+J_0(Lu_{p,q})+J_1(u_{p,q})+J_1(Lu_{p,q})\right\}=C_2\cdot\left\{\int_\Omega u^2_{p,q}(t,x)dx+\right.$$

$$+\int_\Omega(Lu_{p,q}(t,x))^2dx+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u_{p,q}(t,x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u_{p,q}(t,x)}{\partial x_j}dx+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\times$$

$$\left.\times\frac{\partial Lu_{p,q}(t,x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial Lu_{p,q}(t,x)}{\partial x_j}dx\right\}\le C_2\cdot\left\{\sum_{s=p}^{q}u_s^2(t)+\sum_{s=p}^{q}(\lambda_s^2\cdot u_s(t))^2+\sum_{s=p}^{q}\lambda_s^2\cdot u_s^2(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=p}^{q}(\lambda_s^3\cdot u_s(t))^2\right\}\le C_2\cdot\left\{\frac{1}{\lambda_1^6}+\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_1^4}+1\right\}\cdot\sum_{s=p}^{q}\left(\lambda_s^3\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_s(t)\right|\right)^2, \qquad (18)$$

где $C_1>0, C_2>0$ - некоторые постоянные числа.

Из (18), в силу сходимости числового ряда $\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^3\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_s(t)\right|\right)^2$, следует, что $\left\|u_{p,q}(t,x)\right\|_{W_2^3(\Omega)}\to 0$ равномерно по $t\in[0,T]$ при $p,q\to+\infty$.

Следовательно, ряд $u(t,x)=\sum_{s=1}^{\infty}u_s(t)\vartheta_s(x)$ и ряды, полученные его почленным дифференцированием по $x_1,...,x_n$ три раза, сходятся в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t\in[0,T]$.

Далее, пользуясь неравенством (18) (для $k=0,1,2$) и неравенством (21) (для $r=1$) из [8, с.84, 88], получаем, что для любых $t\in[0,T]$ и $1\le p\le q$:

$$\left\|\frac{\partial u_{p,q}(t,x)}{\partial t}\right\|^2_{W_2^2(\Omega)} \le C_3\cdot\left\{J_0\left(\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t}\right)+J_1\left(\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t}\right)+J_2\left(\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t}\right)\right\}\le C_4\cdot\left\{J_0\left(\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t}\right)+\right.$$

$$\left.+J_0\left(L\left(\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t}\right)\right)+J_1\left(\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t}\right)\right\}\le C_4\cdot\left\{\sum_{s=p}^{q}\left(u_s'(t)\right)^2+\sum_{s=p}^{q}(\lambda_s^2\cdot u_s'(t))^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=p}^{q}\left(\lambda_s\cdot u_s'(t)\right)^2\right\}\le C_4\cdot\left\{\frac{1}{\lambda_1^4}+1+\frac{1}{\lambda_1^2}\right\}\cdot\sum_{s=p}^{q}\left(\lambda_s^2\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_s'(t)\right|\right)^2, \qquad (19)$$

где $C_3>0, C_4>0$ - некоторые постоянные числа.

Из (19), в силу сходимости числового ряда $\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^2\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_s'(t)\right|\right)^2$, следует, что $\left\|\frac{\partial u_{p,q}(t,x)}{\partial t}\right\|_{W_2^2(\Omega)}\to 0$ равномерно по $t\in[0,T]$ при $p,q\to+\infty$. Следовательно, ряд $u_t(t,x)=\sum_{s=1}^{\infty}u_s'(t)\boldsymbol{v}_s(x)$ и ряды, полученные его почленным дифференцированием по $x_1,...,x_n$ два раза, сходятся в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t\in[0,T]$.

Как видно из оценок (18) и (19):

$$u(t,x)\in C\left([0,T];W_2^3(\Omega)\right),\ u_t(t,x)\in C\left([0,T];W_2^2(\Omega)\right).$$

Далее, из системы (6) легко получить, что $\forall t\in[0,T]$ и натурального N, почти всюду в Ω:

$$\frac{\partial^2 u_N(t,x)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}(L(u_N(t,x))=\sum_{s=1}^{N}\left(\int_\Omega \mathscr{F}(u(t,\xi))\boldsymbol{v}_s(\xi)d\xi\right)\cdot\boldsymbol{v}_s(x), \qquad (20)$$

где $u_N(t,x)=\sum_{s=1}^{N}u_s(t)\boldsymbol{v}_s(x)$. Так как $\forall t\in[0,T]$ $\mathscr{F}(u(t,x))\in L_2(\Omega)$, то перейдя к пределу по метрике $L_2(\Omega)$ в обеих частях (20), получаем, что $\forall t\in[0,T]$ почти всюду в Ω:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}(L(u(t,x))=\mathscr{F}(u(t,x)).$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(t,x)\in L_2(Q_T)$ и функция $u(t,x)$ удовлетворяет почти всюду в Q_T уравнению (1). А начальные условия (2) удовлетворяются в ещё более сильном смысле, а именно:

$$\left\|u(t,x)-\varphi(x)\right\|_{W_2^3(\Omega)}\to 0,\ \left\|u_t(t,x)-\psi(x)\right\|_{W_2^2(\Omega)}\to 0 \text{ при } t\to+0.$$

Таким образом, функция $u(t,x)$ является решением почти всюду задачи (1)-(3). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев С.Дж. О существовании в малом и единственности в целом решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. I // Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2003, №3, с.36-42.
2. Алиев С.Дж. О глобальном существовании решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. II // Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2003, №4, с.35-43.
3. Aliyev S.J., Aliyeva A.Q. The study of multidimensional mixed problem for one class of third order semilinear psevdohyperbolic equations // European Journal of Pure and Applied Mathematics, 2017, v.10, No5, p.1078-1091.
4. Ebihara Yukiyoshi. On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation. III // J.Different.Equat., 1982, v.45, № 3, p.332-355.
5. Tao Yu, Hai-ou Yang. Initial boundary value problem for a a class of strongly damped nonlinear wave equation. Harbin gongcheng daxue xuebao // J. Harbin Eng. Univ., 2004, v.25, № 2, p.254-256.
6. Худавердиев К.И., Алиев С.Дж. Многомерная смешанная задача для одного класса полулинейных псевдогиперболических уравнений третьего порядка. Баку: Азтехуниверситет, 2012, 252 с.
7. Худавердиев К.И. Многомерная смешанная задача для нелинейных гиперболических уравнений. Баку: Азтехуниверситет, 2011, 611 с.
8. Ладыженская О.А.Смешанная задача для гиперболического уравнения. Москва: Гостехиздат, 1953, 296 с.

BİR SİNİF ÜÇÜNCÜ TƏRTİB QEYRİ-XƏTTİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QOYULMUŞ ÇOXÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN TƏDQİQİ

S.C.ƏLİYEV, A.Q.ƏLİYEVA

XÜLASƏ

İşdə sağ tərəfi qeyri-xətti operator olan bir sinif üçüncü tərtib diferensial tənliklər üçün qoyulmuş çoxölçülü qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin varlığı haqqında teorem isbat edilmişdir.

Açar sözlər: qarışıq məsələ, Furye metodu, sanki hər yerdə həll, aprior qiymətləndirmə.

THE STUDY OF MULTIDIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF THIRD ORDER NONLINEAR DIFFERENTIONAL EQUATIONS

S.J.ALIYEV, A.Q.ALIYEVA

SUMMARY

The existence theorem of almost everywhere solution of a multidimensional mixed problem for one class of third order differentional equations with nonlinear operator on the right-hand side has been proved.

Key words: mixed problem, Fourier method, almost everywhere solution, a priori estimate.

Поступила в редакцию: 03.02.2020 г.
Подписано к печати: 22.10.2020 г.