BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2020

УДК 517.53

О СКОРОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.А.ТАГИЕВА
Бакинский Государственный Университет
mtagiyeva@mail.ru

В статье дается характеристика скорости наилучшего равномерного приближения обобщенных аналитических функций обобщенными полиномами на компактных множествах комплексной плоскости на языке скорости роста ее коэффициентов разложения в ряд по обобщенным полиномам, и приводится сравнение со скоростью приближения частными суммами рядов по обобщенным полиномам.

Ключевые слова: обобщенные аналитические функции, скорость наилучшего равномерного приближения.

Пусть $E_n(w.\overline{G})$ - наилучшее равномерное приближение функции w, обобщенной аналитической в области G и непрерывной в $\overline{G}$, обобщенными полиномами степени $\le n$, т.е.

$$E_n(w,\overline{G}) = \inf_{\mathsf{P}_n} \sup_{z\in G} \left| w(z) - \mathsf{P}_n(z) \right|.$$

В [2] получены оценки $E_n(w.\overline{G})$ в зависимости от свойств функции $w(z)$ и гладкости границы области G (см. т.1,2). В настоящей статье скорость наилучшего равномерного приближения обобщенных аналитических функций обобщенными полиномами на компактных множествах $K \subset \mathsf{C}$ характеризуется на языке скорости роста ее коэффициентов разложения в ряд по обобщенным полиномам и сравнивается со скоростью приближения частными суммами рядов по обобщенным полиномам Фабера.

В качестве множества K рассматривается односвязная область комплексной плоскости C со спрямляемой границей Γ. Мы получаем аналоги результатов [3] в классе обобщенных аналитических функций.

Рассмотрим сначала случай, когда $K = \overline{U}_R = \{z : |z| \le R\}$.

Далее $U_{p,2}(\overline{U}_R)$, $p > 2$, обозначает класс функции, обобщенных аналитических в круге U_R и непрерывных в $\overline{U}_R$ ([1]); обобщенные полиномы для U_R обозначаются $w_k(z,0,R)$. Функции $w(z)$ сопоставляется ряд по обобщенным полиномам

$$w \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(z,0,R), \tag{1}$$

где

$$a_k = c_{2k} + ic_{2k+1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{w(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi, \quad k = 0,1,2,... \tag{2}$$

$T_n(w)$ - обозначает n-ю частичную сумму ряда (1) для функции $w(z)$.

Для описания скорости приближения элементов будут использованы следующие множества:

$$\Pi' = \{g \in C^2(0;\infty);\ g(x) > 0,\ g''(x) < 0,\ x > 0,\ \lim_{x\to\infty} g'(x) = 0,\ \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty\}.$$

Для каждой $g \in \Pi'$ справедливы следующие соотношения:

1) $g'(x) > 0,\ x > 0$;

2) $\lim_{x\to 0}(g')^{-1}(x) = \infty$; (3)

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$.

[3]

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $w(z) \in U_{p,2}(\overline{U}_r),\ p > 2,\ r > 0$. Тогда для $g \in \Pi'$ и $R > r$ следующие свойства эквивалентны

$i)$ $E_n(w, U_{p,2}(\overline{U}_r)) = \mathrm{O}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} e^{g(n+1)}\right),\ n \to \infty$;

$ii)$ $|a_k| = \mathrm{O}\left(e^{g(k)} / R^k\right),\ \ k \to \infty$;

$iii)$ $\|w - T_n(w)\|_{U_{p,2}(\overline{U}_r)} = \mathrm{O}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} e^{g(n+1)}\right),\ n \to \infty$.

Кроме того, если справедливо одно из этих свойств, то функция $w(z)$ является обобщенной аналитической в круге U_R.

Доказательство. Пусть справедливо (ii). Покажем, что $w(z)$ разлагается в ряд (1), равномерно сходящийся внутри круга U_R.

Для общего члена ряда (1) справедливо представление

$$c_{2k} w_{2k}(z,0,R) + c_{2k+1} w_{2k+1}(z,0,R) = Z^{(k)}(a_k;0,z). \tag{4}$$

[9]

Оценивая его, получим для $\forall z,\ |z| = r < R$

$$|c_{2k} w_{2k}(z,0,R) + c_{2k+1} w_{2k+1}(z,0,R)| = |Z^{(k)}(a_k;0,z)| \le$$

$$\le M|a_k||z|^k \le M e^{g(k)}/R^k \cdot r^k = M\left(e^{\frac{g(k)}{k}}\frac{r}{R}\right)^k,$$

где M - постоянная, зависящая от порождающей пары (F,G) [1].

Учитывая свойство (3) функции $g \in \Pi'$, выберем $\varepsilon > 0$, так чтобы

$$\frac{r}{R}e^{\varepsilon} = q < 1. \tag{5}$$

Тогда общий член ряда (1) мажарируется общим членом сходящейся геометрической прогрессии и, значит, ряд (1) сходится равномерно внутри U_R и представляет функцию $w(z)$, обобщенную аналитическую в U_R.

Получим теперь оценку (i).

Имеем для $r < R$

$$E_n(w, U_{p,2}(\overline{U}_r)) \le \|w - T_n(w)\|_{U_{p,2}(\overline{U}_r)} = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} Z^{(k)}(a_k;0,z)\right\|_{U_{p,2}(\overline{U}_r)} \le$$

$$\le M\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|r^k \le M\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} e^{g(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty} e^{g(k+n+1)-g(n+1)}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^k. \tag{6}$$

Используя теорему о среднем, найдем, что

$$e^{g(k+n+1)-g(n+1)} < e^{\varepsilon}.$$

Тогда (6) примет вид

$$E_n(w, U_{p,2}(\overline{U}_r)) \le M e^{g(n+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} e^{\varepsilon k}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^k,\ n > n_0,$$

что дает (i) и (iii), т.к. последняя сумма сходится в силу (5).

Пусть теперь $w(z)$ обладает свойством (i). Покажем, что она является обобщенной аналитической функцией в круге U_R, $R > r$. Имеем

$$E_n(w, U_{p,2}(\overline{U}_r)) \le M\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} e^{g(n+1)}\right), \tag{7}$$

откуда для $z \in \overline{U}_r$ получим

$$|w(z) - \mathsf{P}_n(z)| \le M\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} e^{g(n+1)}\right).$$

Но тогда

$$|\mathsf{P}_{n+1}(z) - \mathsf{P}_n(z)| \le |w(z) - \mathsf{P}_{n+1}(z)| + |w(z) - \mathsf{P}_n(z)| \le$$

$$\leq M\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} e^{g(n+2)} + M\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} e^{g(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{r}{R} e^{\frac{g(n+1)}{n+1}}\right)^{n+1} \left(M + M\left(\frac{r}{R}\right) e^{g(n+2)-g(n+1)}\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{r}{R} e^{\frac{g(n+1)}{n+1}}\right)^{n+1} \left(M + M\left(\frac{r}{R}\right) e^{\varepsilon}\right).$$

Последнее неравенство влечет равномерную сходимость последовательности $\{\mathsf{P}_n(z)\}$ внутри круга U_R к обобщенной аналитической функции. Но на K $\{\mathcal{F}_n(z)\}$ сходится к $w(z)$, следовательно, $w(z)$ допускает продолжение до функции $w(z)$, обобщенной аналитической в круге U_R.

Обозначая P_{k-1}^0 - обобщенный полином наилучшего приближения функции $w(z)$ в U_R.

Из формулы Коши для обобщенных аналитических функций [9] и (i) имеем

$$|a_k| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=\Gamma} Z^{(-k-1)}\left(\frac{w(z) - \mathsf{P}_{k-1}^{(0)}(z)}{i} dz, 0, 0\right)\right| \leq$$

$$\leq E_n(w, U_{p,2}(\overline{U}_r))/r^k = \mathrm{O}\left(e^{g(k)}/R^k\right),$$

что доказывает (ii).

Пусть справедливо (iii). Тогда свойство (i) следует из (iii) по определению.

Теорема 1 доказана.

Обобщим теорему 1 на случай более общих множеств.

Пусть K - односвязное компактное подмножество комплексной плоскости $\mathbf{C}$ со спрямляемой границей Γ, и пусть ψ - единственное конформное отображение внешности единичного круга на дополнение K с условием $\psi(\infty) = \infty$, $\psi'(\infty) = c > 0$. Пусть Γ_R, $R > 1$, - линия уровня, $\Gamma_R = \{z : |\Phi(z)| = R\}$, где $\Phi = \psi^{-1}$, и пусть E_R - внутренность Γ_R.

Для рассматриваемых множеств последовательность $\{\mathcal{F}_k(z,K)\}_{k\in P}$, $P = 0,1,2,...$ обобщенных полиномов Фабера $\mathcal{F}_k(z,K)$ определяется порождающими функциями

$$\Omega_1(z,t,K)\psi'(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_{2k}(z,K) - i\mathcal{F}_{2k+1}(z,K)}{\tau^{k+1}},$$

$$\Omega_2(z,t,K)\overline{\psi'(t)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{\mathscr{P}}_{2k}(z,K)+i\tilde{\mathscr{P}}_{2k+1}(z,K)}{\bar{\tau}^{k+1}}.$$

Для функции $w\in U_{p,2}(k)$ ее ряд по обобщенным полиномам Фабера определяется

$$w\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}\tilde{\mathscr{P}}_{2k}(z,K)+c_{2k+1}\tilde{\mathscr{P}}_{2k+1}(z,K). \quad (8)$$

Числа

$$a_k=c_{2k}+ic_{2k+1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{w(\psi(t))dt}{t^k}$$

или

$$a_k=\frac{\overset{(k)}{w}(0)}{k!},\ k\in P,$$

называются коэффициентами Фабера обобщенной аналитической функции $w(z)$, n-я частичная сумма ряда (8) обозначается $S_n(w;z)$.

Обобщенным оператором Фабера называется оператор вида

$$w=(\mathrm{F}\tilde{w})(z,K)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,\xi,K)\tilde{w}(\Phi(\xi))d\xi-$$
$$-\Omega_2(z,\xi,K)\overline{\tilde{w}(\Phi(\xi))d\xi},$$

который каждую функцию $\tilde{w}\in U_{p,2}(\bar{U}_1)$ переводит в функцию $w\in U_{p,2}(K)$.

Обратный обобщенный оператор Фабера имеет вид

$$\tilde{w}(\eta)=F^{-1}(w)(\eta,U_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(\eta,t,U_1)w(\psi(t))dt-$$
$$-\Omega_2(\eta,t,U_1)\overline{w\psi(t)dt}$$

и переводит каждую функцию $w\in U_{p,2}(K)$ в функцию $\tilde{w}\in U_{p,2}(\bar{U}_1)$.

Множества K, для которых обобщенный оператор Фабера ограничен, называются Фаберовыми множествами. В дальнейшем, мы будем полагать, что граница Γ - кривая Альпера, что обеспечивает ограниченность обобщенного оператора F.

Из свойств обобщенного оператора F следует

1) $\mathrm{F}(w_{2n})(z,U_1)=\tilde{\mathscr{P}}_{2n}(z,K)$

2) $\mathrm{F}(w_{2n+1})(z,U_1)=\tilde{\mathscr{P}}_{2n+1}(z,K)$

3) $\mathrm{F}(T_n)(z,U_1)=\sum_{k=0}^{1/2}c_{2k}\tilde{\mathscr{P}}_{2k}(z,K)+c_{2k+1}\tilde{\mathscr{P}}_{2k+1}(z,K)$

(см.[4]-[8]).

Для дальнейшего изложения нам потребуются следующие теоремы.

Теорема 2. Если обобщенный полином $\mathsf{P}_n(z)$ на K удовлетворяет неравенству

$$\left|\mathsf{P}_n(z)\right| \le L, \quad z \in K,$$

то

$$\left|\mathsf{P}_n(z)\right| \le MR^n \quad \text{для } z \text{ на и внутри } \Gamma_R,$$

где M - постоянная, зависящая от порождающей пары (F,G).

Доказательство этой теоремы следует из принципа подобия и соответствующего результата для голоморфных функций [1].

Теорема 3. Пусть $1 < r < R$, и предположим, что

$$\left\|w - \mathsf{P}_n\right\|_{U_{p,2}(K)} = \mathrm{O}\left(e^{g(n+1)} / R^{(n+1)}\right), \; n \to \infty \tag{10}$$

для некоторой функции $g' \in \Pi'$, где $\mathsf{P}_n(z)$ - произвольный обобщенный полином степени $\le n$. Тогда

$$\left\|w - \mathsf{P}_n\right\|_{U_{p,2}(\overline{E}_r)} = \mathrm{O}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} e^{g(n+1)}\right), \; n \to \infty. \tag{11}$$

Доказательство. Из соотношения (10) следует, что для $z \in K$

$$\left\|w(z) - \mathsf{P}_n(z)\right\| \le M\left(e^{g(n+1)} / R^{n+1}\right), \; n > n_0$$

$$\left\|w(z) - \mathsf{P}_{n+1}(z)\right\| \le M\left(e^{g(n+2)} / R^{n+2}\right), \; n > n_0$$

откуда для $z \in K$

$$\left|\mathsf{P}_{n+1}(z) - \mathsf{P}_n(z)\right| \le M\, e^{g(n+1)} / R^{n+1}\left(1 + \frac{e^{g(n+2)-g(n+1)}}{R}\right) \le M\left(\frac{e^{\frac{g(n+1)}{n+1}}}{R}\right)^{n+1}\left(1 + \frac{e^{\varepsilon}}{R}\right).$$

Тогда по теореме 3 для $z \in \overline{E}_r$

$$\left|\mathsf{P}_{n+1}(z) - \mathsf{P}_n(z)\right| \le M\,\frac{\left(e^{\frac{g(n+1)}{n+1}}\right)^{n+1}}{R^{n+1}}\left(1 + \frac{e^{\varepsilon}}{R}\right) r^{n+1} < M_1\left(e^{\frac{g(n+1)}{n+1}} \cdot \frac{r}{R}\right)^{n+1}$$

(см (i) в теореме 1).

Из последнего неравенства следует, что последовательность $\{\mathsf{P}_n(z)\}$ сходится равномерно внутри E_R и функция $w(z)$ является обобщенной аналитической в E_R.

Покажем, что справедливо (11).

Имеем

$$\|w-\mathsf{P}_n\|_{U_{p,2}(\bar{E}_r)} \le \sup_{z\in\bar{E}_r}\left(|\mathsf{P}_n(z)|+\sum_{k=n}^{\infty}|\mathsf{P}_{k+1}-\mathsf{P}_k|\right) \le \sup_{z\in\bar{E}_r}|\mathsf{P}_n(z)|+$$

$$+M\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{r}{R}e^{\frac{g(k+1)}{k+1}}\right)^k \le M\left(\frac{r}{R}e^{\frac{g(n+1)}{n+1}}\right)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}e^{\frac{g(k+1)}{k+1}}\right)^k =$$

$$=\mathrm{O}\left(e^{g(n+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}\right).$$

Теорема доказана.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1 на случай множеств K, определенных выше.

Теорема 4. Пусть K Фаберово множество такое, что F^{-1} ограничен. Для каждой обобщенной аналитической функции $w(z)\in U_{p,2}(K)$, $g\in\Pi'$ и $R>1$, следующие условия эквивалентны

i) $E_n(w,U_{p,2}(K))=\mathrm{O}\left(e^{g(n+1)}/R^{n+1}\right)$, $n\to\infty$;

ii) $|a_k(w)|=\mathrm{O}\left(e^{g(k)}/R^k\right)$, $k\to\infty$;

iii) $\|w-S_n(w)\|_{U_{p,2}(K)}=\mathrm{O}\left(e^{g(n+1)}/R^{n+1}\right)$, $n\to\infty$.

Доказательство. Из условия (*i*), в силу теоремы 3 следует, что $w(z)$ является обобщенной аналитической функцией в E_R и, следовательно существует $\tilde{w}\in U_{p,2}(\bar{U}_1)$ такая, что $\mathsf{F}\tilde{w}=w$. Кроме того, из $\mathsf{F}(w_{2n})=\mathcal{P}_{2n}(z,K)$, $\mathsf{F}(w_{2n+1})=\mathcal{P}_{2n+1}(z,K)$ и ограниченности обобщенного оператора F^{-1} следует, что

$$E_n(\tilde{w},U_{p,2}(\bar{U}_1))\le ME_n(w,U_{p,2}(K))=\mathrm{O}\left(e^{g(n+1)}/R^{n+1}\right).$$

Таким образом $\tilde{w}$ является обобщенной аналитической функцией в U_R и

$$\left|\frac{\tilde{w}^{(k)}(0)}{k!}\right|=\mathrm{O}\left(e^{g(k)}/R^k\right),\quad k\to\infty \tag{12}$$

в силу теоремы 1.

Но

$$a_k(w)=\frac{\tilde{w}^{(k)}(0)}{k!}, \tag{13}$$

так что из (12) следует (*ii*).

Пусть справедливо (*ii*). Покажем, что $w(z)$ является обобщенной аналитической функцией в E_R.

Возьмем произвольное r, $1 < r < R$, и оценим общий член ряда (8). Имеем

$$\left|c_{2k}\mathscr{F}_{2k}(z,K) + c_{2k+1}\mathscr{F}_{2k+1}(z,K)\right| \le |a_k|\left(\left|\mathscr{F}_{2k}(z,K) + \mathscr{F}_{2k+1}(z,K)\right|\right) \le$$

$$\le M\, e^{g(k)}/R^k \cdot r^k = M\left(e^{\frac{g(k)}{k}}\ \frac{r}{R}\right)^k .$$

Выберем ε столь малым, чтобы

$$\left(e^{\varepsilon} \cdot \frac{r}{R}\right) = q < 1 .$$

Тогда ряд (8) сходится равномерно на $\overline{E}_r$, а потому и на K к обобщенной аналитической функции $w(z)$ и по (i) $w(z)$ является обобщенной аналитической функцией в E_R. Но тогда справедливо (13).

Теперь из теоремы 1 имеем

$$\left\|\widetilde{w} - T_n(\widetilde{w})\right\|_{U_{p,2}(\overline{U}_1)} = \mathrm{O}\left(e^{g(n+1)}/R^{n+1}\right), \ n \to \infty .$$

Из (13) и свойств обобщенного оператора Фабера получим

$$\mathsf{F}(T_n(\widetilde{w})) = S_n w,\ \ n \in P ,$$

так что ограниченность F дает (iii). Из $(iii) \to (\ i)$ следует тривиально, и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988, 512 с.
2. Тагиева М.А. О суммировании рядов по обобщенным полиномам Фабера // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2012, №4, с.86-90.
3. Freund H. The degree of polynomial inter polation and approximation of analytic function. Result math. 1988, т.13, №1-2, с.81-98.
4. Тагиева М.А. Обобщённый оператор Фабера и его свойства // Сборник «Линейные операторы и их приложения», АГУ, 1989, с.76-80.
5. Тагиева М.А. Об обратном обобщенном операторе Фабера // БГУ, 1994, с.176-179.
6. Тагиева М.А. О равномерной сходимости ряда по обобщенным полиномам Фабера внутри области // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2004, №1, с.41-45.
7. Тагиева М.А. Обобщённый оператор Фабера в пространстве голоморфных функций // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2010, №4, с.65-65.
8. Тагиева М.А. О разложении обобщённых аналитических функций в ряд по обобщённым полиномам Фабера в замкнутой области // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2011, №4, с.55-60.
9. Тагиева М.А. О связи между некоторыми понятиями и формулами Векуа и Берса // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2013, №3, с.25-32.

ÜMUMİLƏŞMİŞ ANALİTİK FUNKSİYALARIN ÇOXHƏDLİLƏRLƏ YAXINLAŞMASI HAQQINDA

M.Ə.TAĞIYEVA

XÜLASƏ

İşdə ümumiləşmiş analitik funksiyaların kompakt çoxluqlarda ümumiləşmiş çoxhədlilərlə ən yaxşı yaxınlaşma sürəti xarakterizə edilir. Burada ümumiləşmiş çoxhədlilərə görə sıraya ayrılış əmsalların artım tərtibindən istifadə olunur və ümumiləşmiş Faber çoxhədlilərinə görə sıraya ayrılışının xüsusi cəmlərlə yaxınlaşma tərtibi ilə müqayisə olunur.

Açar sözləri: ümumiləşmiş analitik funksiyalar, ən yaxşı yaxınlaşma sürəti.

ON DEGREE OF POLYNOMIAL APPROXIMATIONS OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

M.A.TAGIYEVA

SUMMARY

In this paper the rate of best polynomial approximation of a generalized analytic function on a compact Faber set is characterized in terms of the rate of growth of its Faber coefficients and compared with the rate of approximation by the partial sums of the Faber series.

Key words: the generalized analytic functions, the degree of polynomial approximations.

Поступила в редакцию: 10.02.2020 г.
Подписано к печати: 22.10.2020 г.