УДК 517.9.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.В.КЕРИМОВА
Бакинский государственный университет
aytac.mensimli@mail.ru

Рассматривается одна система линейных неоднородных разностных уравнений типа Вольтерра с запаздыванием. Найдено представление решения основной начальной задачи для рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: разностное уравнение, запаздывание, линейное уравнение, Вольтерра, аналог задачи Коши, представление решения.

При исследовании различных задач оптимального управления непрерывными или же дискретными системами существенную роль играет представление решений соответствующих систем линейных или же линеаризованных уравнений (см., напр., [1-3]). Исходя из этих соображений в статье рассматривается аналог основной начальной задачи (см., напр., [1, 3, 4]) для одного класса линейных разностных уравнений типа Вольтерра с запаздыванием.

Найдено представление решения рассматриваемой задачи.

Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных неоднородных разностных уравнений типа Вольтерра с запаздыванием

$$y(t+1)=A(t)y(t)+B(t)y(t-h)+\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\left(C(t,\tau)y(\tau)+D(t,\tau)y(\tau-h)\right)\right]+\sum_{\tau=t_0}^{t} f(t,\tau),$$

$$t\in T=\{t_0,t_0+1...,t_1-1\} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(t)=\varphi(t), t\in E_{t_0}=\{t_0-h,t_0-h+1,...,t_0-1\},$$

$$y(t_0)=y_0 \tag{2}$$

Здесь $A(t), B(t), C(t,\tau), D(t,\tau)$ - заданные дискретные $(n\times n)$ матричные функции, $f(t,\tau)$ заданная n- мерная дискретная вектор функция, y_0- заданный постоянный вектор, а $\varphi(t)$ - заданная n- мерная дискретная вектор-функция.

Целью работы является нахождение представления решения аналога основной начальной задачи (1) -(2) с помощью аналога матрицы Коши.

Пусть $y(t)$ является решением основной начальной задачи (1) – (2). Тогда ясно, что имеет место тождество

$$y(\tau+1)=A(\tau)y(\tau)+B(\tau)y(\tau-h)+\sum_{s=t_0}^{\tau}[(C(\tau,s)y(s)+D(\tau,s)y(s-h))]+\sum_{s=t_0}^{\tau}f(\tau,s) \quad (3)$$

Умножая обе части тождества (3) слева на пока произвольную $n\times n$ дискретную матричную функцию $F(t,\tau)$ и затем суммируя по τ от t_0 до $t-1$ получим

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau)y(\tau+1)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau)[A(\tau)y(\tau)+B(\tau)y(\tau-h)]+$$

$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\left[\sum_{s=t_0}^{\tau}F(t,\tau)(C(\tau,s)y(s)+D(\tau,s)y(s-h)\right]+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=t_0}^{\tau}F(t,\tau)f(\tau,s). \quad (4)$$

На основе дискретного аналога теоремы Фубини получаем, что

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=t_0}^{\tau}[F(t,\tau)C(\tau,s)y(s)]=\sum_{s=t_0}^{t-1}\left[\sum_{s=\tau}^{t-1}F(t,s)C(s,\tau)\right]y(\tau).$$

Далее сделая замену переменных $s-h=\alpha$, и учитывая (2), получаем, что

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=t_0}^{\tau}F(t,\tau)D(\tau,s)y(s-h)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=\tau}^{t-1}F(t,s)D(s,\tau)y(\tau-h),$$

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau)B(\tau)y(\tau-h)=\sum_{\tau=t_0-h}^{t-1-h}F(t,\tau+h)B(\tau+h)y(\tau)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0-t}^{t-1}F(t,\tau+h)B(\tau+h)\varphi(\tau)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1-h}F(t,\tau+h)B(\tau+h)y(\tau). \quad (5)$$

Пусть по определению

$$Q(t,\tau)=\sum_{s=\tau}^{t-1}F(t,s)D(s,\tau)$$

С делая задачу переменных $\tau-h=\alpha$ получаем, что

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}Q(t,\tau)y(\tau-h)=\sum_{\tau=t_0-h}^{t-1-h}Q(t,\tau+h)y(\tau)=\sum_{\tau=t_0-h}^{t_0-1}Q(t,\tau+h)\varphi(\tau)+\sum_{\tau=t_0}^{t_0-1-h}Q(t,\tau+h)y(\tau). \quad (6)$$

Далее легко доказать, что

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau)y(\tau+1)=F(t,t-1)y(t)-F(t,t_0-1)y(t_0)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau-1)y(\tau) \quad (7)$$

Учитывая тождества (5) – (7) в (3) получим, что

$$F(t,t-1)y(t)-F(t,t_0-1)y_0+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau-1)y(\tau)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau)A(\tau)y(\tau)+\sum_{\tau=t_0-h}^{t_0-1}F(t,\tau+h)B(\tau+h)\varphi(\tau)+$$

$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1-h}F(t,\tau+h)B(\tau+h)y(\tau)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\left[\sum_{s=\tau}^{t-1}F(t,s)C(s,\tau)\right]y(\tau)+$$

$$+\sum_{\tau=t_0-h}^{t_0-1}Q(t,\tau+h)\varphi(\tau)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1-h}Q(t,\tau+h)y(\tau)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=\tau}^{t-1}F(t,s)f(s,\tau). \quad (8)$$

Группируя подобные члены имеем

$$F(t,t-1)y(t)-F(t,t_0-1)y_0+\sum_{\tau=t_0}^{t-1-h}[F(t,\tau-1)-F(t,\tau)A(\tau)-F(t,\tau+h)B(\tau+h)-$$

$$-\sum_{s=\tau}^{t-1}F(t,s)C(s,\tau)-Q(t,\tau+h)]y(\tau)+\sum_{\tau=t-h}^{t-1}[F(t,\tau-1)-F(t,\tau)A(\tau)-\sum_{s=\tau}^{t-1}F(t,s)C(s,\tau)]y(\tau)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0-h}^{t_0-1}[F(t,\tau+h)B(\tau+h)+Q(t,\tau+h)]\varphi(\tau)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=\tau}^{t-1}F(t,s)f(s,\tau) \quad (9)$$

Если предполагать, что матричная функция $F(t,\tau)$ удовлетворяет соотношениям.

$$F(t,\tau-1)=F(t,\tau)A(\tau)+\sum_{s=\tau}^{t-1}F(t,s)C(s,\tau),\ t-h\le\tau\le t-1,$$

$$F(t,\tau-1)=F(t,\tau)A(\tau)+F(t,\tau+h)B(\tau+h)+F(t,s)C(s,\tau)+\sum_{s=\tau}^{t-1}F(t,s)C(s,\tau)+Q(t,\tau+h),$$

$t_0\le t\le t-1-h,\quad F(t,t-1)=E,$

то из (9) получим следующее представление для $y(t)$.

$$y(t)=F(t,t_0-1)y_0+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=\tau}^{t-1}F(t,s)f(s,\tau)+\sum_{\tau=t_{0-h}}^{t_0-1}[(F(t,\tau+h)B(\tau+h)+Q(t,\tau+h))]\varphi(\tau). \quad (10)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. При сделанных предположениях решение основной локальной задачи (1) – (2) допускает представление в виде (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: БГУ, 1973, 561 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974, 272 с.
3. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: Бакинский университет, 2013, 151 с.
4. Беллман Р., Кук К. Дифференциально разностные уравнения. М.: Наука, 1967.

GECİKMƏYƏ MALİK VOLTERRA TİP XƏTTİ FƏRQ TƏNLİYİNİN HƏLLİNİN GÖSTƏRİLİŞİ HAQQINDA

A.V.KƏRİMOVA

XÜLASƏ

Məqalədə gecikməyə malik bir Volterra tipli xətti bircins olmayan tənliklər sisteminə baxılır. Baxılan tənlik üçün əsas başlanğıc məsələnin həllinin göstərilişi tapılmışdır.

Açar sözlər: fərq tənliyi, gecikmə, xətti tənlik, Volterra, Koşi məsələsinin analoqu, həllin göstərilişi.

ON THE REPRESENTION SOLUTION THE VOLTERRA TYPE DELAY TIME LINEAR DIFFERENCE EQUATION

A.V.KARIMOVA

SUMMARY

One system of linear inhomogeneous difference equations of the Volterra type with delay is considered. A representation of the solution of the main initial problem for the equation is found.

Keywords: difference equation, delay, linear equation, Volterra, analogue of the Cauchy problem, representation of a solution.

Поступила в редакцию: 12.02.2020 г.
Подписано к печати: 22.10.2020 г.