BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2020

УДК 517.97

ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.Ф.КУЛИЕВ, З.Р.САФАРОВА
Бакинский Государственный Университет
Нахичеванский Государственный Университет
hkuliyev@rambler.ru, seferovazumrud@gmail.com

В работе исследуется задача быстродействия для одного нелинейного гиперболического уравнения второго порядка. Доказывается теорема существования оптимального управления, дифференцируемость функционала по Фреше и выводится необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

Ключевые слова: задача быстродействия, нелинейное гиперболическое уравнение, условие оптимальности

Как известно, задача быстродействия является первой задачей математической теории оптимального управления. Возникнув как обобщение ряда практических задач построения оптимальных систем управления, в силу удачного сочетания содержащегося в ней комплекса вопросов, она стала одной из основных. В теории оптимального управления для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, задачи быстродействия достаточно хорошо изучены [1-4]. Но относительно процессов, описываемых уравнениями с частными производными, эти задачи сравнительно мало изучены [5-8]. Поэтому исследования задач быстродействия для различных нестационарных уравнений с частными производными, которые возникают в практических задачах, несомненно, являются актуальными. Для систем с распределенными параметрами исследование таких задач наталкивается на ряд принципиальных трудностей, при этом сами постановки задач могут быть более разнообразными и содержать особенности, которых нет в случае систем с сосредоточенными параметрами.

В настоящей работе изучается задача быстродействия для одного нелинейного гиперболического уравнения второго порядка, прототипом которого является уравнение, возникающее в релятивисткой квантовой механике [9]. Доказывается теорема существования оптимального управления и выводится необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

Постановка задачи

Рассмотрим систему, состояние которой определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|u + vu = f(x,t) \text{ в } Q = \Omega \times (0,T) \tag{1}$$

с граничным и начальными условиями

$$u\big|_s = 0,\ u\big|_{t=0} = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x),\ x \in \Omega, \tag{2}$$

где Δ оператор Лапласа по x, $\Omega \subset R^n$, ($n=3$ или $n=4$) – ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ, Q - цилиндр в R^{n+1}, $S = \Gamma \times (0,T)$- боковая поверхность цилиндра Q, $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $u_1 \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(\mathrm{Q})$ -заданные функции, $v = v(x,t)$ функция, определяющая управления. Класс допустимых управлений определим множеством

$V = \{v(x,t) \big| v \in L_4(Q),\ a \le v(x,t) \le b$ почти всюду (п.в) на $Q\}$, $a < b$, a, b -заданные числа.

Отметим, что аналогично работе [9, 20-29] можно показать, что для каждого управления $v \in V$ задача (1), (2) имеет единственное решение $u = u(x,t) = u(x,t;v)$, причем

$$u \in L_\infty\left(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_3(\Omega)\right),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L_\infty\left(0,T;L_2(\Omega)\right).$$

Но мы рассматриваем случаи, когда $n=3$ или 4, поэтому из теоремы вложения [10, 83] следует, что $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \subset L_6(\Omega)$ при $n=3$ и $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ при $n=4$. Тогда $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_3(\Omega) = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ и, поэтому, решение $u = u(x,t)$ задачи (1), (2) принадлежит пространству

$$U = \left\{ u = u(x,t) \big| u \in L_\infty\left(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right), \frac{\partial u}{\partial t} \in L_\infty\left(0,T;L_2(\Omega)\right) \right\}.$$

Под решением задачи (1), (2) при каждом фиксированном управлении $v \in V$ будем понимать функцию $u = u(x,t) = u(x,t,v)$ из U равную $u_0(x)$ при $t=0$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q \left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u|u\eta + vu\eta \right] dxdt - \int_\Omega u_1(x)\eta(x,0)dx = \int_Q f\eta dxdt$$

при всех $\eta \in U$, равных нулю при $t = T$.

Аналогично работе [9, 20-24] методом Фаэдо – Галёркина можно доказать, что для решения $u = u(x,t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)} \le c\left[\|u_0\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)}\right],\ t \in [0,T], \qquad (3)$$

здесь и далее через c будем обозначать различные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и от допустимых управлений.

Рассмотрим следующую задачу: требуется найти такую пару $(v,\tau) \in V \times (0,T)$, чтобы она за наименьшее время приводила систему (1), (2) из начального состояния $(u_0(x),\ u_1(x))$ в заданное множество K , где K - слабо замкнутое подмножество в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ (4)

Предположим, что существует такая пара $(v,\tau) \in V \times (0,T)$ что для соответствующего решения задачи (1), (2) выполняется условие

$$\left\{u(x,\tau;v), \frac{\partial u(x,\tau;v)}{\partial t}\right\} \in K . \qquad (5)$$

Оптимальное время определяется из условия

$$\tau_0 = inf\{\tau\}, \qquad (6)$$

т.е. τ_0 - нижняя грань всех значений τ, удовлетворяющих условию (5).

Теорема существования оптимальной поры

Теорема 1. Пусть выполнены выше положенные условия на данные задачи (1), (2) и условия (4), (5). Тогда существует такая пара $(v_0,\tau_0) \in V \times (0,T)$, что

$\left\{u(x,\tau_0;v_0), \dfrac{\partial u(x,\tau_0;v_0)}{\partial t}\right\} \in K$ и выполнено условие (6).

Доказательство. Пусть последовательность $(v_k;\tau_k) \in V \times (0,\tau)$ такова, что для решений задач (1), (2) выполняются:

$\left\{u(x,\tau_k;v_k), \dfrac{\partial u(x,\tau_k;v_k)}{\partial t}\right\} \in K, \quad \tau_k \to \tau_0, \quad v_k \to v_0$ слабо в $L_4(Q)$.

Положим $u_k = u(v_k) = u(x,t;v_k)$. Тогда из (1), (2), записанных при $v = v_k$, учитывая оценку (3), получим

$$\|u_k\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)} \le c\left[\|u_0\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)}\right],\ t\in[0,T]$$

Отсюда следует, что

u_k (соответственно $\dfrac{\partial u_k}{\partial t}$) остаются в ограниченном подмножестве пространства $L_\infty(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$ (соответственно $L_\infty\left(0,T;\ L_2(\Omega)\right)$)
и что

$$\|u_k(\tau_k)\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u_k(\tau_k)}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)} \le c\left[\|u_0\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)}\right]. \quad (8)$$

Следовательно, из последовательности $\{v_k, \tau_k, u_k\}$ можно извлечь такую последовательность, которую, не умаляя общности, обозначим снова через $\{v_k, \tau_k, u_k\}$, для которой при $k\to\infty$

$$v_k \to v_0 \text{ слабо в } L_4(Q),\ v_0\in V,\ \tau_k\to\tau_0 \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} &u_k \to u_0 \quad *-\text{слабо в } L_\infty\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right) \\ &\frac{\partial u_k}{\partial t} \to \frac{\partial u_0}{\partial t} \quad *-\text{слабо в } L_\infty\left(0,T;\ L_2(\Omega)\right) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Из (7) в частности, следует, что u_k принадлежит ограниченному множеству из $W_2^1(Q)$. Тогда в силу компактности вложения $W_2^1(Q)$ в $L_2(Q)$[10, 84] , можно считать, что $u_k\to u_0$ сильно в $L_2(Q)$и п.в. в Q. Но в силу теоремы вложения $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\subset L_4(\Omega)$, u_k ограничены в $L_\infty\left(0,T;\ L_4(\Omega)\right)$, поэтому $\left\||u_k|u_k\right\|_{L_{2(Q)}} \le c$. Тогда согласно лемме 1.3. из [9, 25] следует, что при $k\to\infty$

$$|u_k|u_k \to |u_0|u_0 \text{ слабо в } L_2(Q). \quad (11)$$

Поскольку оператор Лапласа Δ действует из $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $W_2^{-1}(\Omega)$[9, 21], где $W_2^{-1}(\Omega)$ сопряженное пространство к пространству $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, имеем

$$\Delta u_k \in L_\infty\left(0,T;\ W_2^{-1}(\Omega)\right). \quad (12)$$

Так как, $\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = f + \Delta u_k - |u_k| u_k - v_k u_k$, то из соотношений (9), (10), (11), (12) следует, что при $k \to \infty$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \to \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = f + \Delta u_0 - |u_0| u_0 - v_0 u_0 \text{ слабо в } L_2\left(0, T;\ W_2^{-1}(\Omega)\right) \quad (13)$$

Согласно оценке (8), можно считать, что слабо в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$, $\{\chi_0,\ \chi_1\} \in K$. (14)

Покажем, что

$$u_k(\tau_k) \to u_0(\tau_0) \text{ слабо в } L_2(\Omega)$$

$$\frac{\partial u_k(\tau_k)}{\partial t} \to \frac{\partial u_0(\tau_0)}{\partial t} \text{ слабо в } W_2^{-1}(\Omega). \quad (15)$$

Действительно,

$$u_k(\tau_k) - u_0(\tau_0) = u_k(\tau_k) - u_k(\tau_0) + u_k(\tau_0) - u_0(\tau_0) \quad (16)$$

Согласно первому из соотношений (10), имеем, в частности, $u_k(\tau_0) \to u_0(\tau_0)$ слабо в $L_2(\Omega)$ и

$$\left\| u_k(\tau_k) - u_k(\tau_0) \right\|_{L_2(\Omega)} = \left\| \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{\partial u_k(t)}{\partial t} dt \right\|_{L_2(\Omega)} \le \left(\int_\Omega \int_{\tau_0}^{\tau_k} dt \cdot \int_{\tau_0}^{\tau_k} \left| \frac{\partial u_k(t)}{\partial t} \right|^2 dt dx \right)^{1/2} \le$$

$$\le c\left|\tau_k - \tau_0\right|^{1/2} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Отсюда и из (16) следует, что справедливо первое соотношение из (15).

Аналогично, применяя соотношение (13), можно получить второе соотношение из (15).

Сравнивая соотношения (14) и (15), заключаем, что

$$\left\{ u_0(\tau_0), \frac{\partial u_0(\tau_0)}{\partial t} \right\} \to \{\chi_0,\ \chi_1\} \in K.$$

Запишем интегральные тождества для решений задачи (1), (2) при $v = v_k$

$$\int_Q \left[-\frac{\partial u_k}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u_k| u_k \eta + v_k u_k \eta \right] dxdt - \int_\Omega u_1(x)\eta(x,0)\,dx = \int_Q f\eta\, dxdt$$

при всех $\eta \in U$, равных нулю при $t = T$.

Если в этих интегральных тождествах перейти к переделу при

$k \to \infty$ и учесть соотношения (9), (10), (11) и, что $u_k \to u_0$ сильно в $L_2(Q)$, получим

$$\int_Q \left[-\frac{\partial u_0}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u_0| u_0 \eta + v_0 u_0 \eta \right] dxdt - \int_\Omega u_1(x)\eta(x,0)\,dx = \int_Q f\eta\, dxdt$$

при всех $\eta \in U$, равных пулю при $t = T$. Отсюда следует, что $u_0 = u(v_0) = u(x,t;v_0)$, т.е. функция $u_0 = u_0(x,t)$ является решением задачи (1), (2) при $v = v_0(x,t)$, причем приведения системы из начального состояния $(u_0(x), u_1(x))$ во множество K равно $\tau = \tau_0 \in (0,T)$.

Теорема 1 доказана.

Дифференцируемость функционала $J(v,\tau) = \tau(v)$.

Поскольку, если функция $u = u(x,t;v)$ является обобщенным решением из U задачи (1), (2) в цилиндре $Q = \Omega \times (0,T)$, то она является обобщённым решением этой задачи и в области $\Omega \times (0,\tau)$, где $\tau \times (0,T)$ произвольное фиксированное время. Тогда при $t = 0$ выполняется условие $u(x,0;v) = u_0(x)$ и интегральное тождество

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u| u\eta + vu\eta - f\eta \right] dxdt - \int_\Omega u_1(x)\eta(x,0)\,dx = 0$$

$\forall \eta \in U$, причем $\eta(x,t) = 0,\ t \in [\tau, T]$.

Ясно, что

$$J(v,\tau) = \int_0^\tau dt + \int_0^\tau \int_\Omega \left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u| u\eta + vu\eta - f\eta \right] dxdt - \int_\Omega u_1(x)\eta(x,0)\,dx$$

.

Пусть управлению $v \in V$ соответствует время $\tau \in (0,T)$ приведения системы из начального состояния $(u_0(x), u_1(x))$ во множество K, а управлению $v + \delta v \in V$ соответствует время $\tau + \delta\tau \in (0,T)$ приведения системы из начального состояния $(u_0(x), u_1(x))$ во множество K.

Обозначим $\delta u(x,t) = u(x,t;\, v + \delta v) - u(x,t;\, v)$. Из (1), (2) следует, что $\delta u(x,t)$ является обобщенным решением из U задачи.

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \Delta(\delta u) + 2|u + \theta\delta u|\delta u + (v + \delta v)\delta u = -u\delta v,\ (x,t) \in Q, \qquad (17)$$

$$\delta u\big|_S = 0,\quad \delta u\big|_{t=0} = 0,\quad \left.\frac{\partial \delta u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\quad x \in \Omega \tag{18}$$

где $0 \le \theta \le 1$.

Докажем, что относительно решения задачи (17), (18) справедлива следующая лемма.

Лемма. При выше принятых условиях на данные задачи (17), (18) справедлива оценка

$$\|\delta u\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2} + \left\|\frac{\partial \delta u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le c\|\delta v\|^2_{L_4(Q)'} \ ,t \in [0, T]. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть полное семейство линейно независимых элементов пространства $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$. В соответствии с методом Фаэдо-Галёркина приближенное решение задачи (17), (18) порядка N определим следующим образом:

$$\delta u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \xi_{kN}(t) w_k(x),\ N = 1,2,...,$$

где функции $\xi_{kN}(t)$ таковы, что удовлетворяются соотношения

$$\int_\Omega \frac{\partial \delta u^N}{\partial t^2} w_j dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \delta u^N}{\partial x_i}\frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx + 2\int_\Omega \left|u + \theta \delta u^N\right| \delta u^N w_j dx + \int_\Omega (v + \delta v)\delta u^N w_j dx =$$

$$= -\int_\Omega u \delta v w_j dx,\ j = 1,...,N, \tag{20}$$

$$\xi_{kN}(0) = 0,\ \left.\frac{d\xi_{kN}(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{21}$$

Соотношения (20) представляют собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $(\xi_{1N}(t),...,\xi_{NN}(t))$. Известные результаты относительно нелинейных систем гарантируют существование единственного решения задачи (20), (21) на отрезке $[0, t_N]$; а из априорных оценок следует, что $t_N = T$ $[9, c\,24]$

Умножим j-ое равенство (20) на $\frac{d\xi_{jN}(t)}{dt}$ и просуммируем результат по $j = 1,...,N$. Тогда

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial t^2}\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\delta u^N}{\partial x_i}\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial t\partial x_i}\right]dx=-2\int_{\Omega}\left|u+\theta\delta u^N\right|\delta u^N\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}dx-$$

$$-\int_{\Omega}(v+\delta v)\delta u^N\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}dx-\int_{\Omega}u\delta v\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}dx.$$

К обеим частям этого равенства прибавим слагаемое $2\int_{\Omega}\left|\theta\delta u^N\right|\delta u^N\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}dx$ и проведем некоторые преобразования

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\left[\left|\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}\right|^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\delta u^N}{\partial x_i}\right)^2+\frac{4\theta}{3}\left|\delta u^N\right|^3\right]dx\le 2\int_{\Omega}\left\|\theta\delta u^N\right|-\left|u+\theta\delta u^N\right\|\left|\delta u^N\right|\left|\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}\right|dx+$$

$$+\int_{\Omega}\left|v+\delta v\right|\left|\delta u^N\right|\left|\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}\right|dx+\int_{\Omega}|u||\delta v|\left|\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}\right|dx.$$

Отсюда, интегрируя по t в силу условий (21), используя элементарные неравенства и определение класса допустимых управлений, имеем

$$\int_{\Omega}\left[\left|\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}\right|^2+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\delta u^N}{\partial x_i}\right|^2\right]dx\le c\int_0^t\int_{\Omega}|u|\left|\delta u^N\right|\left|\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}\right|dxds+$$

$$+c\int_0^t\int_{\Omega}\left[\left|\delta u^N\right|^2+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\delta u^N}{\partial x_i}\right|^2+\left|\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}\right|^2\right]dxds+c\|\delta v\|^2_{L_4(Q)},\ t\in[0,T] \qquad (22)$$

Из неравенства Гёлдера следует

$$\left|\int_{\Omega}\xi\eta\varsigma dx\right|\le c\|\xi\|_{L_p(\Omega)}\|\eta\|_{L_r(\Omega)}\|\varsigma\|_{L_s(\Omega)}, \qquad (23)$$

где $c>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$.

Для $n=3$ или 4 в неравенстве (23) положим $p=n,\ r=\frac{2n}{n-2},\ s=2$ и $\xi=|u|,\ \eta=\left|\delta u^N\right|,\ \varsigma=\left|\frac{\partial\delta u^N}{\partial t}\right|$.

Отметим, что при выполнении условий теоремы, из теоремы Соболева следует, что вложение $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\subset L_r(\Omega)$ непрерывно, а значит, $U\subset L_\infty(0,T;\ L_r(\Omega))$. Тогда справедливо включение $u\subset L_\infty(0,T;\ L_r(\Omega))$. Учитывая, что $n\le r$, установим, что $u\subset L_\infty(0,T;\ L_n(\Omega))$. Пользуясь неравенством (23), в силу эквивалентности норм в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, из (22) имеем

$$\left\|\delta u^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le c\int_0^t \left\|u(s)\right\|_{L_n(\Omega)} \cdot \left\|\delta u^N(s)\right\|_{L_r(\Omega)} \cdot \left\|\frac{\partial \delta u^N(s)}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)} ds +$$

$$+c\int_0^t \left[\left\|\delta u^N(s)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial \delta u^N(s)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right] ds + c\left\|\delta v\right\|^2_{L_4(\Omega)} \le$$

$$\le c\int_0^t \left[\left\|\delta u^N(s)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial \delta u^N(s)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\delta u^N(s)\right\|^2_{L_r(\Omega)}\right] ds + c\left\|\delta v\right\|^2_{L_4(\Omega)}.$$ Отсюда, в силу вложения $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$, имеем

$$\left\|\delta u^N(t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial \delta u^N(t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le c\int_0^t \left[\left\|\delta u^N(s)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial \delta u^N(s)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right] ds + c\left\|\delta v\right\|^2_{L_4(Q)}.$$

откуда по лемме Гронуолла получим

$$\left\|\delta u^N(t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial \delta u^N(t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le c\left\|\delta v\right\|^2_{L_4(Q)},\ t \in [0,T]. \tag{24}$$

Из неравенства (24) следует, что последовательность $\{\delta u^N(x,t)\}$ ограничена в U. Поэтому можно считать, что при $N \to \infty$, $\delta u^N \to \delta u$ *-слабо в $L_\infty\left(0,\,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$, $\frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \to \frac{\partial \delta u}{\partial t}$ *-слабо в $L_\infty(0,\,T;\,L_2(\Omega))$.

Известно, что норма слабо полунепрерывна снизу в банаховых пространствах. Поэтому для предельной функции $\delta u(x,t)$ выполняется оценка (19).

Лемма доказана.

Вычислим приращение функционала $J(v,\tau)$:

$$\Delta J(v,\tau) = J(v+\delta v;\tau+\delta\tau) + J(v,\tau) = \int_\tau^{\tau+\delta\tau} dt +$$

$$+\int_0^{\tau+\delta\tau}\int_\Omega \left[-\frac{\partial(u+\delta u)}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(u+\delta u)}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + |u+\delta u|(u+\delta u)\eta + (v+\delta v)(u+\delta u)\eta - f\eta\right] dxdt -$$

$$-\int_0^{\tau}\int_{\Omega}\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}+|u|u\eta+vu\eta-f\eta\right]dxdt=$$

$$=\int_{\tau}^{\tau+\delta\tau}dt+\int_0^{\tau}\int_{\Omega}\left[-\frac{\partial \delta u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \delta u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}+2|u+\theta\delta u|\delta u\eta+(v+\delta v)\delta u\eta-u\delta v\eta\right]dxdt+$$

$$+\int_{\tau}^{\tau+\delta\tau}\int_{\Omega}\left[-\frac{\partial(u+\delta u)}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(u+\delta u)}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}+|u+\delta u|(u+\delta u)\eta+(v+\delta v)(u+\delta u)\eta-f\eta\right]dxdt$$

Отсюда, учитывая, что $\eta\in \dot{U}$, после несложных преобразований получим

$$\Delta J(v,\tau)=\int_0^{\tau}\int_{\Omega}u\eta\delta v dxdt+\left(1+\int_{\Omega}\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}+|u|u\eta+uv\eta-f\eta\right]dx\right)\Bigg|_{t=\tau}\delta\tau+$$

$$+\int_0^{\tau}\int_{\Omega}\left[-\frac{\partial \delta u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \delta u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}+2|u|\delta u\eta+v\delta u\eta\right]dxdt+R \qquad (25)$$

Здесь

$$R=\int_0^{\tau}\int_{\Omega}2\big[|u+\theta\delta u|-|u|\big]\delta u\eta dxdt+\int_0^{\tau}\int_{\Omega}\delta u\delta v\eta dxdt+$$

$$+\int_{\tau}^{\tau+\delta\tau}\int_{\Omega}\left[-\frac{\partial \delta u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \delta u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}+2|u+\theta\delta u|\delta u\eta+(v+\delta v)\delta u\eta+u\delta v\eta\right]dxdt+o(\delta\tau).$$

является остаточным членом.

Если в формуле (25) в качестве произвольной функции $\eta(x,t)$ выберем обобщенное решение следующей сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\Delta\psi+2|u|\psi+v\psi=0,\ (x,t)\in\Omega\times(0,\tau), \qquad (27)$$

$$\psi\big|_{S=0},\quad \psi(x,\tau)=0,\ x\in\Omega, \qquad (28)$$

то для приращения функционала получим:

$$\Delta J(v,\tau)=\int_0^{\tau}\int_{\Omega}u\psi\delta v dxdt+\left(1-\int_{\Omega}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}\frac{\partial \psi(x,\tau)}{\partial t}dx\right)\delta\tau+R. \qquad (29)$$

Поскольку условия на функции $\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$ при $t=\tau$ отсутствуют, то сопряженная задача (27), (28) имеет бесконечное множество решений.

Отметим, что под обобщенным решением задачи (27), (28) при заданной паре (v,t) понимается такая функция $\psi(x,t)\in U$, что она равна нулю при $t=\tau$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^\tau\int_\Omega\left[-\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t}+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}+2|u|\psi g+v\psi g\right]dxdt+\int_\Omega\frac{\partial\psi(x,\tau)}{\partial t}g(x,\tau)dx=0\cdot$$

при всех $g\in U$, для которых $g(x,0)=0.$

Из выражения (26) следует, что

$$|R|\le 2\int_0^\tau\int_\Omega|\delta u|^2|\psi|dxdt+\int_0^\tau\int_\Omega|\delta u||\delta v||\psi|dxdt+$$

$$+\int_\tau^{\tau+\delta\tau}\int_\Omega\left[\left|\frac{\partial\delta u}{\partial t}\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|+\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial\delta u}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right|+2|u||\delta u||\psi|+2|\delta u|^2|\psi|+|v+\delta v||\delta u||\psi|+|u||\delta v||\psi|\right]dxdt+$$

$$+|o(\delta\tau)|.$$

Применяя неравенство Гёлдера, отсюда имеем

$$|R|\le 2\int_0^\tau\left(\int_\Omega|\delta u|^4dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|\psi|^2dx\right)^{1/2}dt+\int_0^\tau\left(\int_\Omega|\delta u|^4dx\right)^{1/4}\left(\int_\Omega|\delta v|^4dx\right)^{1/4}\left(\int_\Omega|\psi|^2dx\right)^{1/2}dt+$$

$$+\int_\tau^{\tau+\delta\tau}\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial\delta u}{\partial t}\right|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2dx\right)^{1/2}dt+\int_\tau^{\tau+\delta\tau}\sum_{i=1}^n\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial\delta u}{\partial dx_i}\right|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2dx\right)^{1/2}dt+$$

$$+2\int_\tau^{\tau+\delta\tau}\left(\int_\Omega|\delta u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|u||\psi|^2dx\right)^{1/2}dt+2\int_\tau^{\tau+\delta\tau}\left(\int_\Omega|\delta u|^4dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|\psi|^2dx\right)^{1/2}dt+$$

$$+2max(|a|,|b|)\int_\tau^{\tau+\delta\tau}\left(\int_\Omega|\delta u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|\psi|^2dx\right)^{1/2}dt+\int_\tau^{\tau+\delta\tau}\left(\int_\Omega|\delta v|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|\psi|^2dx\right)^{1/2}dt+|o(\delta\tau)|\cdot$$

Если здесь учесть, непрерывности вложений $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\subset L_4(\Omega)\subset L_2(\Omega)$, оценку (19), и того, что $\psi\in U$ получим

$$|R|\le c\left[\|\delta v\|_{L_4(Q)}|\delta\tau|+\|\delta v\|_{L_4(Q)}^2\right]\le c\left[\|\delta v\|_{L_4(Q)}^2+|\delta\tau|^2\right]+|o(\delta\tau)|. \qquad (30)$$

Тогда из формулы (29) и оценки (30) следует, что функционал $J(v,\tau)$ дифференцируем по Ферме на $V\times(0,T)$ и справедлива формула

$$\langle J'(w),\delta w\rangle=\int_0^\tau\int_\Omega u\psi\delta v dx+\left(1-\int_\Omega\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial t}\frac{\partial\psi(x,\tau)}{\partial t}dx\right)\delta\tau, \qquad (31)$$

где $w=(v,\tau)$.

Теорема 2. Пусть выполнены наложенные условия на данные задачи (1), (2). Тогда для оптимальности пары $(v_*,\tau_*)\in V\times(0,T)$ в задаче быстродействия необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^{\tau_*}\int_\Omega u_*(x,t)\psi_*(x,t)\big(v(x,t)-v_*(x,t)\big)dxdt+\left(1-\int_\Omega \frac{\partial u_*(x,\tau_*)}{\partial t}\frac{\partial\psi_*(x,\tau_*)}{\partial t}\partial x\right)(\tau-\tau_*)\ge 0$$

$$\forall(v,\tau)\in V\times(0,T), \tag{32}$$

где $u_*(x,t)$ и $\psi_*(x,t)$ нетривиальные решения задач (1), (2) и (27), (28) соответственно при $(v,\tau)=(v_*,\tau_*)$.

Доказательство. Множество $V\times(0,T)$ выпукло в $L_4(Q)\times R$. Кроме того, функционал $J(v,\tau)$ дифференцируем по Ферме и его дифференциал в точке (v,τ) определяется равенством (31). Тогда на оптимальном элементе $w_*=(v_*,\tau_*)$ необходимо выполнение неравенства

$\langle J'(w_*),w-w_*\rangle\ge 0 \quad \forall w=(v,\tau)\in V\times(0,T)$ [4, с.28].

Отсюда и из (31) следует справедливость неравенства (32). Теорема 2 доказана.

Заключение

Таким образом, в работе рассматриваются проблемы задач оптимального управления в смысле быстродействия в процессе описываемого нелинейного гиперболического уравнения. Доказана теорема существования оптимального управления. Предложена схема вывода необходимого условия оптимальности, а именно вычислен дифференциал функционала, доказан, что функционал дифференцируем по Фреше и выводится необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтягин Л.С., Болтянский В.Г., Гомкрелидзе Р.В., Мищенко Е. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969, 384 с.
2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 576 с.
3. Габасов Р., Киримова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: БГУ, 1981, 350 с.
4. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
5. Буковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 476 с.
6. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 416 с.
7. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределёнными параметрами. М.: Наука,1977
8. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловымии диффузионными процессами. М.: Наука, 1978, 464 с.
9. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач М.: Наука, 1972, 587 с.
10. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.

BİR İKİTƏRTİBLİ QEYRİ-XƏTTİ HİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN ƏN TEZ TƏSİR MƏSƏLƏSİ

H.F.QULİYEV, Z.R.SƏFƏROVA

XÜLASƏ

İşdə bir ikitərtibli qeyri-xətti hiperbolik tənlik üçün ən tez təsir məsələsi tədqiq olunub. Optmial idarəedicinin varlığı teoremi, funksionalın Freşe mənada diferensiallanan olması isbat olunub və optimallıq üçün variosional bərabərsizlik şəklində zəruri şərt çıxarılıb.

Açar sözlər: ən tez təsir məsələsi, qeyri-xətti hiperbolik tənlik, optimallıq şərti

THE SPEEDACTİON PROBLEM FOR THE ONE NONLINEAR SECOND-ORDER HYPERBOLIC EQUATION

H.F.GULIYEV, Z.R.SAFAROVA

SUMMARY

The paper investigates the speed action problem for one nonlinear second-order hyperbolic equation. The existence theorem of optimal control is proved, differentiability of functional in the Freche sense and derived the necessary optimality condition in view of a variational inequality.

Keywords: speed action problem, nonlinear hyperbolic equation, optimality condition