BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2020

УДК 539.3

О СОБСТВЕННОМ КОЛЕБАНИИ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Г.ГАСЫМОВ
Бакинский Государственный Университет
husameddinqasimov@gmail.com

В работе рассматривается собственное колебание неоднородной цилиндрической оболочки, с учетом неоднородно вязко упругого сопротивления внешней среды.

Предполагается, что модуль упругости, плотность и характеристики основания являются непрерывными функциями координаты длины оболочки.

При решении применены метод разделения переменных, и метод Бубнова-Галеркина.

Ключевые слова: колебание, оболочка, частота, упругий.

Известно, что цилиндрические оболочки кругового поперечного сечения, изготовленные из различных материалов являются наиболее распространенными элементами конструкций, которые довольно широко используются в инженерной практике.

Последние годы среди вышеуказанных наиболее распространенными являются неоднородные и анизотропные материалы [1]. В случае, когда элементы конструкции лежат на упругом основании расчет на устойчивость и анализ собственных колебаний играет первостепенную роль.

Предположим, что замкнутая цилиндрическая оболочка кругового поперечного сечения находится под действием сжимающее усилие приложенное по торцам и лежит на неоднородно вязко упругом основании.

Предполагается, что модуль упругости E является со своими производными до четвертого порядка, непрерывной функцией координаты длины, а коэффициент Пуассона является постоянной величиной:

$$E = E_0\left(1+\varepsilon\, f(x)\right),\ \nu = const\ ,\ \varepsilon \in [0,1]$$

здесь E_0 – соответствует к однородному случаю.

Рассмотрим осесимметричную форму собственной колебании. Тогда уравнение движения и уравнение совместности деформаций записываются в следующем виде [2]:

$$D_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(1+\varepsilon f(x))\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+k_1(x)W+k_2(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\rho(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{1}{E_0(1+\varepsilon f(x))h}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}=\frac{1}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Здесь D_0 – цилиндрическая жесткость однородной оболочки, Φ – функция напряжений, R – радиус, h – толщина оболочки, $W(x,t)$ – прогиб, $\rho(x)$ – плотность, $k_1(x)$ и $k_2(x)$ характеризуют соответственно упругие и вязкие свойства основания, t - время.

Системы (1) можно записать в следующем виде:

$$D_0\left[(1+\varepsilon f(x))\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\varepsilon\frac{df(x)}{dx}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+\varepsilon\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]-$$

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+k_1(x)W+k_2(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\rho(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}=\frac{E_0(1+\varepsilon f(x))h}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

Исключая Φ, из системы (2) получаем:

$$D_0\left[(1+\varepsilon f(x))\frac{\partial^6 W}{\partial x^6}+4\varepsilon\frac{df(x)}{dx}\frac{\partial^5 W}{\partial x^5}+6\varepsilon\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\right.$$

$$\left.+4\varepsilon\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+\varepsilon\frac{d^4 f(x)}{dx^4}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]-\left[\frac{E_0(1+\varepsilon f(x))h}{R^2}-k_1(x)\right]\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+$$

$$+2\frac{dk_1(x)}{dx}\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{d^2 k_1(x)}{dx^2}W+\left[\frac{d^2 k_2(x)}{dx^2}+\frac{d^2\rho(x)}{dx^2}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+2\left[\frac{dk_2(x)}{dx}+\frac{d\rho(x)}{dx}\right]\times$$

$$\times\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial t^2}+\left[k_2(x)+\rho(x)\right]\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial t^2}=0. \qquad (3)$$

Для простоты анализа рассмотрим следующие случаи:

$$f(x)=\bar{x};\quad k_1(x)=k_1^0(1+\alpha\bar{x});\quad k_2(x)=k_2^0(1+\alpha\bar{x});\quad \rho(x)=\rho_0(1+\delta\bar{x}),$$

$\bar{x}=xl^{-1}$, l – длина оболочки, $\alpha,\delta\in[0,1]$.

В этом случае уравнение (3) довольно упрощается и принимает следующий вид:

$$D_0(1+\varepsilon\bar{x})\frac{\partial^6 W}{\partial x^6}+4\frac{D_0\varepsilon}{l}\frac{\partial^5 W}{\partial x^5}-\left[\frac{E_0(1+\varepsilon\bar{x})h}{R^2}-k_1^0(1+\alpha\bar{x})\right]\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+$$

$$+2\frac{k_1^0\alpha}{l}\frac{\partial W}{\partial x}+2\left[\frac{k_2^0\alpha}{l}+\frac{\rho_0\delta}{l}\right]\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial t^2}+\left[k_2^0(1+\alpha\bar{x})+\rho_0(1+\delta\bar{x})\right]\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial t^2}=0. \quad (4)$$

Для решения (4) поступаем следующим образом: В первом этапе будем использовать метод разделения переменных, в дальнейшем метод Бубнова-Галеркина. Решение будем искать в следующем виде:

$$W=\sin\omega t V(x), \quad (5)$$

здесь ω – круговая частота колебания, функция $V(x)$ должна удовлетворять соответствующим краевым условиям.

Подставляя (5) в (4) получаем:

$$D_0(1+\varepsilon\bar{x})\frac{d^6V}{dx^6}+4\frac{D_0\varepsilon}{l}\frac{d^5V}{dx^5}-\left[\frac{E_0h(1+\varepsilon\bar{x})}{R^2}-k_1^0(1+\alpha\bar{x})\right]\frac{d^2V}{dx^2}+$$

$$+2\frac{k_1^0\alpha}{l}\frac{dV}{dx}-2\omega^2\frac{k_2^0\alpha+\rho_0\delta}{l}\frac{dV}{dx}-\omega^2\left[k_2^0(1+\alpha\bar{x})+\rho_0(1+\delta\bar{x})\right]\frac{d^2V}{dx^2}=0. \quad (6)$$

Для однородных краевых условиях к уравнению (6) можно применять метод Бубнова-Галеркина, выбирая $V(x)$ в следующем виде [3]:

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}A_iV_i(x), \quad (7)$$

здесь A_i - неизвестные постоянные и каждая функция $V_i(x)$, $(i=1,2,...,n)$ должна удовлетворять соответствующие краевые условия.

Учитывая (7) в (6) с помощью ортогонализации Бубнова-Галеркина можно написать:

$$\sum_{i=1}^{n}A_i\int_0^l\left[L(V_i)-\omega^2\frac{2(k_2^0\alpha+\rho_0\delta)}{l}\frac{dV_i}{dx}-\omega^2\left[k_2^0(1+\alpha\bar{x})+\rho_0(1+\delta\bar{x})\right]\frac{d^2V_i}{dx^2}\right]V_k(x)dx=0,$$

$k=1,2,...,n$

где

$$L(V_i)=D_0(1+\varepsilon\bar{x})\frac{d^6V_i}{dx^6}+4\frac{D_0\varepsilon}{l}\frac{d^5V_i}{dx^5}-\left[\frac{E_0h(1+\varepsilon\bar{x})}{R^2}-k_1^0(1+\alpha\bar{x})\right]\frac{d^2V_i}{dx^2}+2\frac{k_1^0\alpha}{l}\frac{dV_i}{dx}.$$

Как известно, в общем случае ω^2 определяется из условия равенства нулю основного определителя системы алгебраических уравнений составленных из коэффициентов A_i. Как правильно отмечается в [4], для определения инженерной расчетной формулы, достаточно определить значение ω^2, который соответствует к первому приближению, т.е.

$$\int_0^l\left[L(V_1)-\omega^2\frac{2(k_2^0\alpha+\rho_0\delta)}{l}\frac{dV_1}{dx}-\omega^2\left[k_2^0(1+\alpha\bar{x})+\rho_0(1+\delta\bar{x})\right]\frac{d^2V_1}{dx^2}\right]V_1(x)dx=0. \quad (8)$$

Для определения ω^2 примем простую форму (шарнирное закрепление) аппроксимации:

$$V_1=\sin m\pi\bar{x}, \quad (9)$$

здесь m –число полуволн по образующей.

Подставляя (9) в (8) получаем:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^1 L(\sin m\pi\bar{x})\sin m\pi\bar{x}d\bar{x}}{\int_0^1 \left[\frac{2(k_2^0\alpha+\rho_0\delta)}{l}\frac{m\pi}{l}\cos m\pi\bar{x} - \left(k_2^0(1+\alpha\bar{x})+\rho_0(1+\delta\bar{x})\right)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sin m\pi\bar{x}\right]\sin m\pi\bar{x}dx}, \quad (10)$$

здесь

$$L(\sin m\pi\bar{x}) = -D_0(1+\varepsilon\bar{x})\left(\frac{m\pi}{l}\right)^6 \sin m\pi\bar{x} + 4\frac{D_0\varepsilon}{l}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^5 \cos m\pi\bar{x} +$$

$$+\left[\frac{E_0 h(1+\varepsilon\bar{x})}{R^2} - k_1^0(1+\alpha\bar{x})\right]\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sin m\pi\bar{x} + 2\frac{k_1^0\alpha}{l}\cos m\pi\bar{x} \cdot \quad (11)$$

С учетом (11), формула (10) имеет следующий вид:

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{D_0\lambda^4}{l^4} - \frac{E_0 h}{R^2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right) + k_1^0\left(1+\frac{1}{2}\alpha\right)}{k_2^0\left(1+\frac{1}{2}\alpha\right)+\rho_0\left(1+\frac{1}{2}\delta\right)}, \quad (12)$$

где $\lambda = m\pi$.

Отметим, что в случае, когда модуль упругости и плотность являются функцией только координаты толщины, решения вышеуказанных задач не вызывает особого труда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ, 1976, 376 с.
2. Безухов Н.И., Лужин С.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений. М., 1969, 423 с.
3. Тимошенко С.П. Колебание в инженерном деле. М.-Л., 1966, 344 с.
4. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М., 1991, 334 с.

DAİRƏVİ EN KƏSİYİNƏ MALİK OLAN SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN MƏXSUSİ RƏQSİ HAQQINDA

H.QASIMOV

XÜLASƏ

Məqalədə ətraf mühitin qeyri-bircins özlü-elastik müqavimətini nəzərə almaqla, qeyri-bircins silindrik örtüyün məxsusi rəqsi məsələsinə baxılır.

Fərz olunur ki, elastiklik modulu, sıxlıq və əsasın xarakteristikaları örtüyün uzunluq koordinatının kəsilməz funksiyalarıdır.

Məsələnin həllində dəyişənlərinə ayırma üsulu və Bubnov-Qalyorkin üsulu tətbiq olunur.

Açar sözlər: rəqs, örtük, tezlik, elastik.

ON THE EIGEN OSCILLATION OF ANNULAR CROSS SECTION INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL SHELL

H.GASIMOV

SUMMARY

In the paper studies the eigen oscillation of an inhomogeneous cylindrical shell, lying on a nonhomogeneous under axial compression.

It is assumed, that the elasticity module, density and characteristics of the foundation are continuous functions of length coordinate.

The solution of the problem is constracted by the method of separation of variables and Bubnov-Galerkin method.

Key words: oscillation, shell, frequency, elastic.

Поступила редакцию: 04.03.2020 г.
Подписано к печати: 22.10.2020 г.